

修士論文

パルス励起による高調波モードを用いた
ILC 超伝導加速空洞の電気的中心位置の測定法開発

東京大学大学院理学系研究科物理学専攻
山下研究室修士課程二年
糟谷 健登

平成 28 年 1 月

概要

国際リニアコライダー計画では重心系エネルギー 250 GeV~1 TeV で電子・陽電子を衝突させることで、標準理論を超える物理現象の探索を目指している。本計画では 1.3 GHz の 9 セル超伝導加速空洞を約 14000 台並べる事でこのエネルギーを達成する予定である。このときの空洞設置誤差（ミスアライメント）が標準偏差で 0.3 mm 以下であれば、ビームのエミッタンスに問題が生じないことが計算されている。空洞の設置は機械的な中心軸を直線上に揃えることに對して、ビームは加速空洞の電氣的性質に影響を受けるため、電氣的中心軸が直線上に揃っていることが望ましい。電氣的中心軸の位置を高精度で測定することが可能になれば、機械的に加速空洞の電氣的中心軸を直線上に揃えることが可能になる。本研究ではこの電氣的中心軸の位置をビームを使わず実験室規模で測定する手法を確立することを目的とした。空洞内にワイヤーを通しパルスを送ることにより擬似ビームとすることで、小規模な実験で空洞のビーム応答に近いものを調べることが可能であることに着目し、このワイヤーパルス法の確立を目指した。本研究では測定するモードとして、最低次のキックモードのうち特にビームのエミッタンスを増大させる TE_{111-7} について電氣的中心軸の位置を測定した。この測定により電氣的中心軸の位置を $50 \mu m$ の精度で測定することに成功し、電氣的中心軸の位置の実験室規模での測定法を確立した。

目次

第 1 章	序論	8
1.1	研究の目的	8
1.2	ILC 加速器	9
1.3	超伝導加速空洞について	13
第 2 章	研究手法	23
2.1	目的	23
2.2	原理	23
2.3	特徴	27
第 3 章	ANSYS HFSS による空洞内電場のシミュレーション	28
3.1	シミュレーションの目的	28
3.2	加速空洞のモデリング	28
3.3	内部電場の計算	31
3.4	TM_{111-7} の電気的中心軸の位置の計算	33
第 4 章	空洞特性の測定	37
4.1	チューニングマシンの構成	37
4.2	測定結果	40
第 5 章	測定	45
5.1	構成	45
5.2	測定	62
第 6 章	解析手法	64
6.1	離散時間フーリエ変換	64
6.2	TE_{111-7} モードのスプリットモードの分離	66
6.3	RF アンプの線形性	68
6.4	TE_{111-7} モードの電気的中心の算出	69
第 7 章	結果と考察	72
7.1	結果	72
7.2	考察	73
7.3	結論	75
7.4	改善すべき点と今後の課題・展望	76

目次	3
謝辞	78
参考文献	79
付録 A 円筒形空洞の電磁場と Q 値	80

目次

1.1	国際リニアコライダーの概要図 (出典 [2])	9
1.2	電子入射部概要図 (出典 [4])	10
1.3	陽電子入射部概要図 (出典 [4])	10
1.4	TESLA 型空洞 (出典 [3])	11
1.5	ピルボックス	13
1.6	TM ₀₁₀ モードの電場の様子	15
1.7	TE ₁₁₁ モードの電場の様子	15
1.8	多セル空洞の回路モデル (出典 [5])	17
2.1	TE ₁₁₁₋₇ のスプリットモードの電場の様子 (低周波側)	25
2.2	TE ₁₁₁₋₇ のスプリットモードの電場の様子 (高周波側)	25
2.3	TESLA 型空洞での TE ₁₁₁ モードの様子	26
2.4	ビーム通過位置と TE ₁₁₁₋₇₋₁ モードの励起の強さの関係	26
3.1	TESLA 型空洞の組図	29
3.2	TESLA 型空洞のモデル	30
3.3	TESLA 型空洞の分散曲線	32
3.4	ビームの位置と励起される TE ₁₁₁₋₇₋₁ の電場の振幅の関係 (3次元表示)	33
3.5	ビームの位置と励起される TE ₁₁₁₋₇₋₂ の電場の振幅の関係 (3次元表示)	34
3.6	ビームの位置と励起される TE ₁₁₁₋₇₋₁ の電場の振幅の関係 (等高線表示)	34
3.7	ビームの位置と励起される TE ₁₁₁₋₇₋₂ の電場の振幅の関係 (等高線表示)	34
3.8	TE ₁₁₁₋₇₋₂ の $y = 4mm$ における谷の二乗フィットの様子	35
3.9	TE ₁₁₁₋₇₋₂ の $y = 24mm$ における谷の二乗フィットの様子	35
3.10	TE ₁₁₁₋₇₋₁ 及び TE ₁₁₁₋₇₋₂ の谷の軸の直線フィットの様子	36
4.1	空洞チューニングマシン全体図	37
4.2	外径測定器の様子	38
4.3	キャリブレーション用空洞模型	38
4.4	電子ビーム溶接の跡の様子	38
4.5	ビーズ測定の様子	39
4.6	実際の金属ビーズの写真	39
4.7	空洞チューニングの様子	40
4.8	実際のジョーズの写真	40
4.9	座標系の定義	40

4.10	空洞模型の外径を測定したときのデータ例	41
4.11	Z142 空洞の各セル、フランジの補正後の中心座標の x の値	43
4.12	Z142 空洞の各セル、フランジの補正後の中心座標の y の値	43
4.13	電場平坦度の測定結果	44
5.1	空洞のフランジに空けられた穴の写真	46
5.2	フランジに空けられた穴の位置の概念図	46
5.3	ワイヤーアライメントのための構成概要図	47
5.4	測定系全体の構成	47
5.5	フランジに取り付ける円盤の写真	50
5.6	円盤に貼付けたメジャーの様子	50
5.7	固定に使用した皿ネジとテーパ型ナット	51
5.8	円盤のフランジへの取り付けの様子	51
5.9	円盤上でのワイヤーの位置の撮影（上流側）	51
5.10	ワイヤー位置の撮影の様子（上流側）	51
5.11	写真上での解析の概念図（上流側）	52
5.12	写真上での解析の結果（上流側）	52
5.13	円盤の中心点とメジャーの関係の概念図	53
5.14	円盤の淵（A 点）を顕微鏡越しに撮影した様子	53
5.15	ワイヤーの座標原点の位置と機械的中心の関係（ x 座標）	53
5.16	ワイヤーの座標原点の位置と機械的中心の関係（ y 座標）	54
5.17	空洞の水平誤差により生じる座標原点への影響	55
5.18	視線がずれたときの座標原点への影響	56
5.19	光学定盤の y 軸の傾き方向の定義の図	57
5.20	光学定盤の z 軸の傾き方向の定義の図	57
5.21	信号測定のための構成概要図	58
5.22	入力パルス波形の測定セットアップ	59
5.23	入力パルスの波形	59
5.24	BPF 特性の測定セットアップ	60
5.25	BPF の周波数スペクトル例 (@20 dBm)	60
5.26	RF アンブ特性の測定セットアップ	61
5.27	RF アンブのパワー特性 (@1.7 GHz)	61
5.28	RF アンブの周波数特性 (@-10 dBm)	61
5.29	通過パルスの波形@0 番地	62
5.30	空洞の応答波形@0 番地	62
5.31	オシロスコープでの FFT の様子	63
5.32	番地の割り振り図	63
6.1	0 番地における空洞応答波形	65
6.2	1 番地における空洞応答波形	65
6.3	0 番地におけるフーリエスペクトル	65
6.4	1 番地におけるフーリエスペクトル	65

6.5	ネットワークアナライザーで測定した TE_{111} の周波数スペクトル	66
6.6	1 番地での TE_{111-7} のスプリットの様子	67
6.7	ネットワークアナライザーで測定した TE_{111-7} のスプリットの様子	67
6.8	20 番地でのフーリエスペクトル	67
6.9	1 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング	67
6.10	20 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング	68
6.11	39 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング	68
6.12	$TE_{111-7-1}$ の各座標における信号の振幅	68
6.13	$TE_{111-7-2}$ の各座標における信号の振幅	68
6.14	アンプの線形性測定のための構成図	69
6.15	$TE_{111-7-1}$ の振幅とアッテネーターの関係	69
6.16	$TE_{111-7-2}$ の振幅とアッテネーターの関係	69
6.17	$x=2.2\text{mm}$ における V 字プロット	70
6.18	$x=2.2\text{mm}$ におけるパワーの V 字プロット	71
6.19	$TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ における谷の方程式	71
7.1	機械的中心と電気的中心の x 座標	74
7.2	機械的中心と電気的中心の y 座標	74
A.1	電場の境界条件	81
A.2	磁場の境界条件	81
A.3	導体でできた筒	82
A.4	ベッセル関数 J_0, J_1	95

表目次

1.1	主線形加速器のパラメーター (出典 [3])	11
1.2	TESLA 型空洞のパラメーター (出典 [3])	11
1.3	減衰リングのパラメーター (出典 [4])	12
1.4	衝突点でのパラメーター (出典 [4])	12
1.5	主線形加速器の各コンポーネントのミスアライメントとエミッタンス増加量の関係 (出典 [3])	12
4.1	空洞模型の各セルでの外径と中心座標	41
4.2	空洞模型のフランジでの外径と中心座標	41
4.3	Z142 空洞の各セルでの外径と中心座標	42
4.4	Z142 空洞のフランジでの外径と中心座標	42
4.5	Z142 空洞の各セルでの補正後の中心座標	42
4.6	Z142 空洞のフランジでの補正後の中心座標	42
5.1	円盤に貼付けたメジャーでのワイヤーの位置の読み値	52
5.2	ワイヤー原点のフランジ中心からのズレ	53
5.3	空洞の水準の誤差による座標原点の位置の誤差	54
5.4	視線の水平、鉛直方向からのずれによる座標原点の位置の誤差	55
7.1	各構成要素による電気的中心位置の誤差のまとめ	72
7.2	ワイヤー原点のフランジ中心からのズレ (再掲載)	73
7.3	電気的中心位置のフランジ中心からの移動量	73
A.1	$J_\nu(z)$ の n 番目の根	96
A.2	$J'_\nu(z)$ の n 番目の根	96

第 1 章

序論

1.1 研究の目的

標準理論を超える新物理探索のために、次世代の国際加速器実験として国際リニアコライダー (International Linear Collider、以下 ILC) 計画が推進されている。ILC とは超伝導加速空洞により電子及び陽電子を加速し、重心系エネルギー 250 GeV~1 TeV で正面衝突させる衝突型線形加速器実験である。加速に用いられる超伝導加速空洞のベースラインデザインは TESLA (Tera electron volt Energy Superconducting Linear Accelerator) 型 9 セル加速空洞 [1] となっており、主線形加速器部分では合計約 14,000 台が必要となっている。ILC のようなリニアコライダーでは円型コライダーに比べて衝突回数が稼げないため、ルミノシティを高くするためにはビームサイズを小さくしなければならない。そのためビームのエミッタンス増大を抑えるために空洞アライメントを精度よく行わなければならない。このとき、空洞ミスアライメントが標準偏差で 0.3 mm 以下であればビームとウェーク場との相互作用によるエミッタンスの増大が抑制され、最終収束系での規格化エミッタンスの要求値を達成できることが計算されている。[3] しかしながら、空洞のクライオモジュールへのインストール時には空洞の機械的中心軸 (空洞の形状から測る事のできる中心軸) を用いてアライメントを行うのに対して、電子・陽電子ビームがウェーク場から影響を受けないためには電気的中心軸 (空洞内に発生する加速モード及び高次モードの中心軸) を通過しなければならない。HOM カップラーの存在により生じる回転非対称性や製造過程により生じる空洞全体の歪みなどによってこの 2 種類の中心軸が一致しない可能性が存在するため、電気的中心軸の位置を正確に測定することで、電気的中心軸を機械的に取り扱えるようにする必要がある。この電気的中心軸の位置測定は一般的には電子ビームを通すことで行うが、ビーム実験は大掛かりな設備と準備が必要であるため多数の空洞について頻繁に測定を行うことができない。従って、本研究の目的を以下のように定めた。

「空洞の代表的なキックモード (TE_{111-7}) の電気的中心軸の位置を実験室規模で、ビームを使用せずに高精度で測定する手法を確立すること」

第 1 章の残りの節では ILC 加速器及び超伝導加速空洞について述べる。第 2 章では研究手法について述べる。第 3 章では空洞内電場のシミュレーションにより理想的な空洞の電気的中心軸を計算する。シミュレーションは実際に測定する際の指針を立てる上でも非常に強力なツールである。本研究では今回の測定が可能であるかの判断・保証を行うためにこのシミュレーションを行った。第 4 章では測定に使用した空洞の特性について述べる。具体的には空洞のそれぞれのセルの半径や中心の位置に加えて、加速周波数・電場平坦度を測定した。第 5 章では測定の構成と測定の手順、また測定系における誤差について述べる。第 6 章は解析手法について、第 7 章は結果と考察である。付録には円筒形空洞の電磁場モードの計算及び Q 値の計算を加えた。

本研究では Z142 空洞という特定の TESLA 型加速空洞について測定を行ったが、この空洞の固有の特性を調べるこ

とが目的ではなく、あくまでキックモードの電気的中心軸の位置を実験室規模で高精度に測定するための手法を確立することが目的であることを注意しておく。

1.2 ILC 加速器

図 1.1 は ILC 加速器の概要図である。入射部、減衰リング、主線形加速器、最終収束系などで構成されている。直線型コライダの利点は円形型コライダのようにシンクロトロン放射がないためより高エネルギーの粒子加速が可能になるという点である。一方で、技術的挑戦として、ビームを一回きりの加速で高エネルギーにしなければならないため、単位長さあたりの加速量を稼がなければならないことが挙げられる。さらに、直線型コライダでは衝突頻度が稼げないためルミノシティを上げるためにはビーム断面積を小さくしなければならない。そのため、ダンピングリングから放出されるビームを低エミッタンスに保ちながら衝突点まで運ぶ高度なビーム技術が求められる。前者は主線形加速器で、後者はそれぞれのコンポーネントのアライメントやダンピングリング及び最終収束系での技術的挑戦が必要となっている。以下で、電子ビームが生成されてから衝突するまでの概要を説明する。

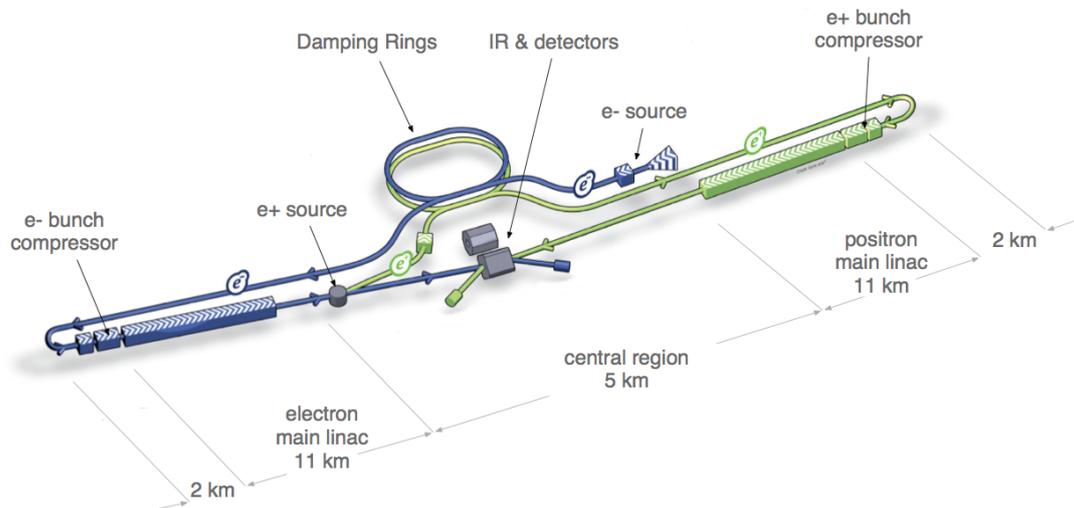


図 1.1 国際リニアコライダの概要図 (出典 [2])

1.2.1 入射部

電子源

ILC の電子源では 80% 偏極の大電流電子ビームを生成しなければならない。偏極電子は電子銃内の GaAs 光陰極にレーザー光を照射することで生成することができ、これを DC で加速することで偏極電子ビームとして取り出す事ができる。こうして得られたビームは 1 ns 程度の長さを持っているため、サブハーモニックバンチャー (SHB) で 200 ps 程度のバンチに分割し、さらに常伝導進行波管でバンチ長を 20 ps にした後に 76 MeV まで加速する。その後、超伝導加速空洞を用いて 5 GeV まで加速し、スピンローテーターでスピンを垂直方向に回転させ、減衰リングに入射する。(図 1.2)

陽電子源

陽電子は主線形加速器で加速された電子ビームをもとに作られる。まず、加速された高エネルギー電子をヘリカルアンジュレーターに通すことで 10 MeV~30 MeV の円偏光ガンマ線を生成する。このガンマ線を Ti-6%Al-4%V 標的に入射し、対生成により偏極陽電子を生成する。生成された陽電子はソレノイド磁場中の常伝導加速空洞によって捕獲され、125 MeV まで加速される。対生成により生成された電子及び残留ガンマ線はここで分離される。その後、400 MeV まで常伝導加速空洞で加速し、超伝導加速空洞で 5 GeV まで加速する。電子源と同様に、スピンローターでスピンを垂直方向に回転させ、減衰リングに入射する。(図 1.3)

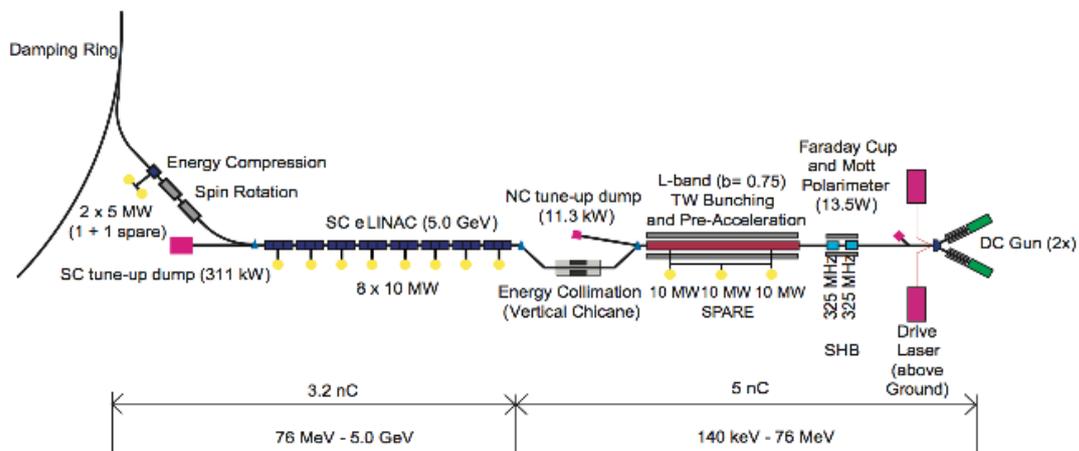


図 1.2 電子入射部概要図 (出典 [4])

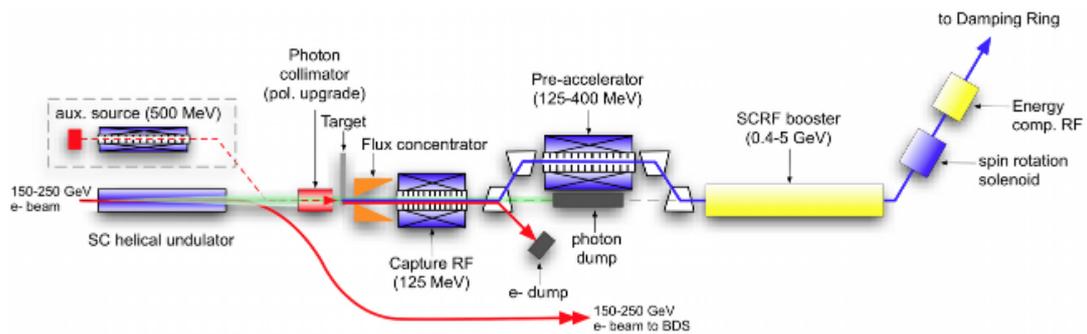


図 1.3 陽電子入射部概要図 (出典 [4])

1.2.2 減衰リング

衝突点で高いルミノシティを出すために、生成された電子・陽電子のエミッタンスを減衰リングで小さくする必要がある。衝突点での規格化エミッタンスの要求値は $\gamma\epsilon_x = 10 \mu\text{m}$, $\gamma\epsilon_y = 35 \text{ nm}$ であるが、この減衰リングのビーム取り出し口では $\gamma\epsilon_x = 5.5 \mu\text{m}$, $\gamma\epsilon_y = 20 \text{ nm}$ までエミッタンスを減少させることができる。減衰リングの主なパラメータを表 1.3 に示す。減衰リングを出た電子・陽電子ビームは Ring To Main Linac (RTML) を通りスピンを回転し、パンチ長を圧縮 (6 mm から 300 μm) した後、主線形加速器に入射される。

1.2.3 主線形加速器

ILCの電子・陽電子主線形加速器はそれぞれ約7400本の超伝導加速空洞からなっており、それぞれ約11 kmに渡る。この部分でビームを15 GeVから250 GeVまで加速する。採用される超伝導加速空洞としてTESLA型加速空洞(図1.4)がベースデザインとなっている。表1.1に主線形加速器のパラメーターを、表1.2にTESLA型加速空洞のパラメーターを示す。加速空洞はそれぞれ8つまたは9つ毎にクライオモジュールに組み込まれ、液体ヘリウムで2 Kまで冷却され超伝導状態で運転される。超伝導加速空洞の利点としては、常伝導のものに比べ電気抵抗がほぼないため空洞内に溜められたマイクロ波の空洞表面でのエネルギー損失が極めて小さくなるという点が挙げられる。そのため、超伝導状態を保つために要する冷却の電力などを考慮しても超伝導加速空洞の方が常伝導加速空洞よりも電力効率が良い。また、超伝導加速空洞では空洞内に貯蔵されたエネルギーの減衰が遅いため、ミリ秒程度の長パルスのマイクロ波源でエネルギーを溜めることができる。それにより電子ビームのパルスも長くする事ができ、パルス内でのフィードバックをかけることができるという利点もある。



図1.4 TESLA型空洞(出典[3])

パラメーター	値
空洞数	7332
ビームエネルギー	15 GeV to 250 GeV
ビームパルス長	727 μ s
バンチ間隔	554 ns
パルスあたりのバンチ数	1312
バンチあたりの電荷	3.2 nC
ビーム電流	5.8 mA
繰り返し周波数	5 Hz
RFパルス長	1.65 ms

表1.1 主線形加速器のパラメーター(出典[3])

パラメーター	値
空洞形状	テスラ型
状態	超伝導
セル数	9
加速モード	TM010, π -mode
周波数	1300 MHz
加速勾配	31.5 MV/m
Q値	$> 10^{10}$
材質	Nb

表1.2 TESLA型空洞のパラメーター(出典[3])

1.2.4 最終収束系

主線形加速器を出たビームは衝突点まで約2.2 kmの距離を走る。この間をBeam Delivery System(BDS)と呼ぶ。BDSにはビームを絞る最終収束系が存在する。ビームの絞りには四極磁石が用いられるが、エネルギーのばらつきにより焦点距離がずれてしまうため、偏向磁石及び六極磁石と組み合わせることでこれを補正している。衝突点でのビームパラメーターを表1.4に示す。

パラメーター	値
周長	3.238 km
繰り返し周波数	5 Hz
エネルギー	5 GeV
xy 方向減衰時間	23.95 ms
z 方向減衰時間	12.0 ms
x 方向規格化エミッタンス	5.5 μm
y 方向規格化エミッタンス	20 nm
平衡バンチ長	6 mm
平衡エネルギー幅	0.11%

表 1.3 減衰リングのパラメーター (出典 [4])

パラメーター	値 (500 GeV)
x 方向のビームサイズ	474 nm
y 方向のビームサイズ	5.9 nm
バンチ長	0.3 mm
エネルギーのばらつき (電子)	0.124%
エネルギーのばらつき (陽電子)	0.070%
x 方向規格化エミッタンス	10 μm
y 方向規格化エミッタンス	35 nm

表 1.4 衝突点でのパラメーター (出典 [4])

1.2.5 アライメント要求精度

上記の最終収束系でのエミッタンスを達成するには、減衰リングを出たビームのエミッタンスがその後の輸送過程においても保存されていなければならない。エミッタンス増大の原因は静的要因と動的要因に分類することができる。静的要因とは主に各コンポーネントのミスアライメントによるもので、動的要因とは地面の振動や各コンポーネントの振動によるものである。本研究では主線形加速器における超伝導加速空洞によるエミッタンス増大の静的要因について取り上げる。主線形加速器での各コンポーネントのミスアライメントとエミッタンス増大の関係について表 1.5 であることがシミュレーションにより計算されている。さらに、空洞のオフセットについては設置誤差の分布の標準偏差が 500 μm の場合に、エミッタンスの増大は約 7% であることが知られている。したがって、標準偏差が 300 μm 程度の精度でアライメントできれば大きな問題とはならないことがわかるため、これを空洞アライメントの基準値と考える事ができる。空洞のミスアライメントとエミッタンス増大の関係については次節で述べる。

ミスアライメント	設置誤差の分布の標準偏差	規格化エミッタンス増加量 [nm]
空洞のオフセット	300 μm	0.2
空洞の傾き	300 μrad	<0.1
BPM のオフセット	300 μm	400
四極磁石のオフセット	300 μm	< 0.1
四極磁石の回転	300 μrad	2.5
モジュールのオフセット	200 μm	150
モジュールの回転	20 μrad	0.7

表 1.5 主線形加速器の各コンポーネントのミスアライメントとエミッタンス増加量の関係 (出典 [3])

1.3 超伝導加速空洞について

この節では超伝導加速空洞内でビームキックに関わる高次モードがどのようにして励起されるのかを理解するのに必要な知識と、一般的な空洞の性能評価に必要なパラメーターについて述べる。

1.3.1 ピルボックス内の電場モード

実際の9連空洞については解析的に計算することができないため、各セルでどのような電場モードが存在するかを図1.5のような円筒型空洞（ピルボックス）の計算により考察する。図1.5のようにピルボックスの半径を a 、長さを d とする。

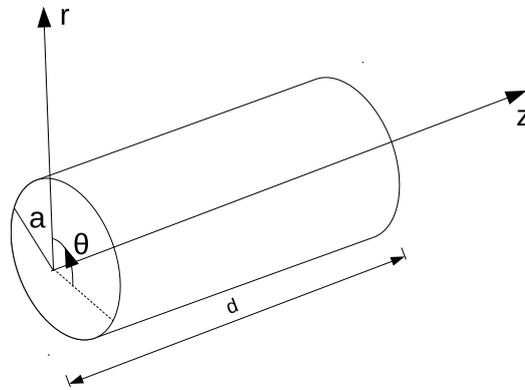


図 1.5 ピルボックス

ピルボックス内を z 軸方向に伝搬する波を考えると、マクスウェル方程式から TM モード ($E_z \neq 0, H_z = 0$) と TE モード ($E_z = 0, H_z \neq 0$) がピルボックスの固有モードとして存在する事がわかる。それぞれのモードと固有周波数は座標系を図1.5のように円筒座標系で取った場合、式(1.1)～式(1.4)によって表される。詳細な計算は付録を参照。

TM_{mnp}

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos \left(\frac{p\pi}{d} z \right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ E_r = -\frac{p\pi}{d} \frac{a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m \left(\frac{u_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin \left(\frac{p\pi}{d} z \right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ E_\theta = \frac{p\pi}{d} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \sin \left(\frac{p\pi}{d} z \right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_z = 0 \\ H_r = -i\epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \cos \left(\frac{p\pi}{d} z \right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_\theta = -i\epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m \left(\frac{u_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos \left(\frac{p\pi}{d} z \right) e^{i\omega_{mnp} t} \end{array} \right. \quad (1.1)$$

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{u_{mn}}{a} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2}, \quad p = 0, 1, 2, 3 \dots \quad (1.2)$$

TE_{mnp}

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = \epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a^2}{u'_{mn}} \frac{m}{r} H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ E_\theta = \epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_z = H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_r = \frac{p\pi}{d} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_\theta = -\frac{p\pi}{d} \frac{a^2}{u'_{mn}} \frac{m}{r} H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \end{array} \right. \quad (1.3)$$

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{u'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (1.4)$$

ここで、 J_m は m 次のベッセル関数で、 u_{mn} は m 次のベッセル関数の n 番目の根、 u'_{mn} は m 次のベッセル関数を微分したものの n 番目の根である。 m, n, p はそれぞれ θ, r, z 方向の腹と節の数を決定していると解釈できる。TE モードでは $p=0$ の場合、 $H_z = 0$ となるため不適であることに注意する。

通常、加速モードには TM₀₁₀ が選ばれる。その理由としては

- (1) 最低周波数のため他のモードとの分離が容易である
- (2) 中心付近に強い E_z をもつ
- (3) E_r, E_θ が常に 0 であるためビームをキックしない

以上3つが挙げられる。逆に、 E_z をもたずビーム軸に強い E_r をもつ TE₁₁₁ などはキックモードとしてビームのエミッタンスを増大する要因となる。一般的に、TM₀₁₀ を加速モードや基本モードと呼び、それより大きい周波数を持つモードを高次モード、高調波モード、Higher Order Mode(HOM) などと呼ぶ。図 1.6、図 1.7 に TM₀₁₀ 及び TE₁₁₁ の電場の様子を示す。

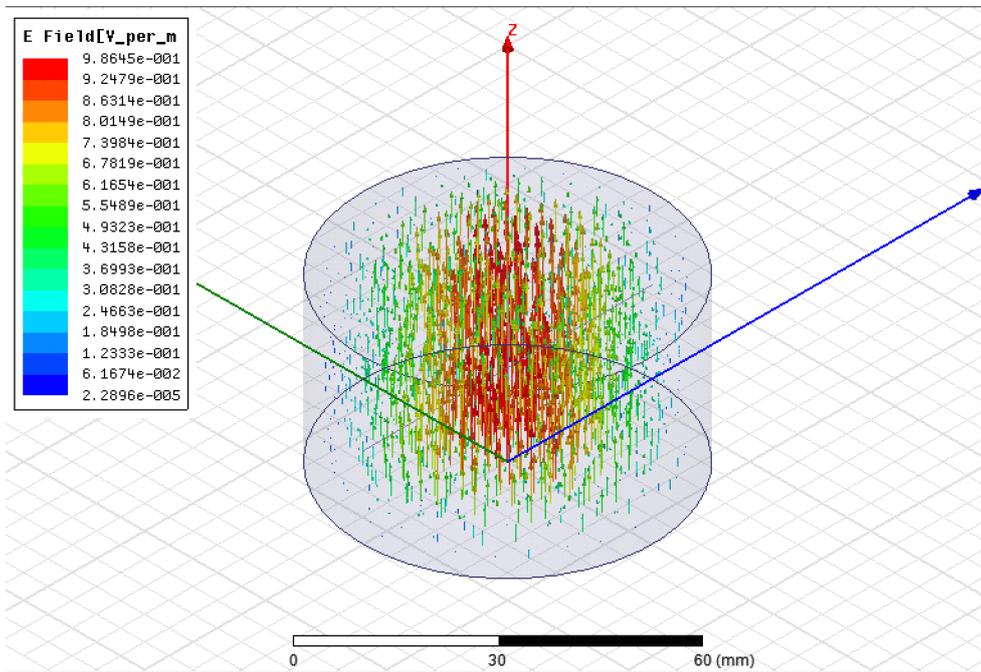


図 1.6 TM_{010} モードの電場の様子：シミュレーションソフト ANSYS HFSS でビルボックス内の電場を計算した。図は TM_{010} モードの内部電場をベクトルで表現している。図のベクトルの色が赤くなるほど電場は強くなっている。ビーム軸 (z 軸) に強い電場が存在し、ビーム軸を向いていることがわかる。

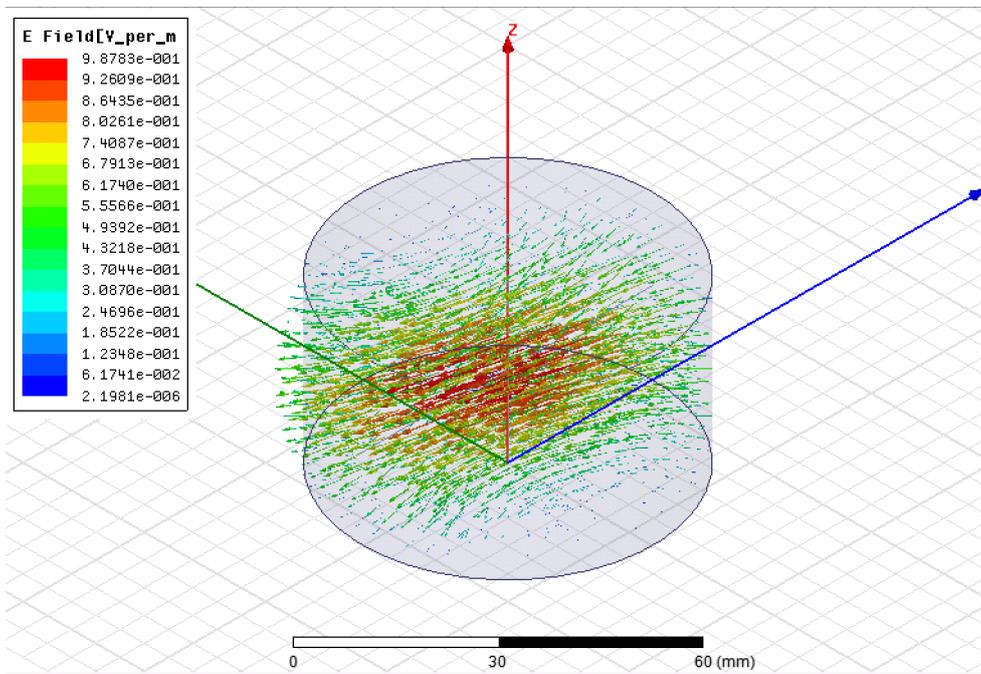


図 1.7 TE_{111} モードの電場の様子：図は TE_{111} モードの内部電場をベクトルで表現している。図のベクトルの色が赤くなるほど電場は強くなっている。ビーム軸方向には電場はなく、ビーム軸上でビームをキックするような方向に強い電場があることがわかる。

1.3.2 空洞の性能を表すパラメーター

本項では加速空洞の性能を評価するためのパラメーターの代表的なものについて説明する。詳細な計算については付録を参照。

加速勾配

加速モード中をビーム軸上に光速で移動する粒子が、空洞を通過するまでに受ける最大加速電圧は

$$V_c = \left| \int_0^d E_z|_{r=0} e^{i\omega_{010}z/c} dz \right| \quad (1.5)$$

と表せる。このとき、粒子が空洞中を移動する間も加速電場は振動しているので、走行時間分だけ電場の位相も変化する。そのため式(1.5)にはその分の係数が掛かっている事に注意する。

よって加速勾配 E_{acc} は

$$E_{acc} = \frac{V_c}{d} \quad (1.6)$$

となる。これは加速空洞の性能の代表的なものの一つで、単位長さあたりの加速性能を表している。ILC 計画では 31.5 MV/m の加速勾配を目指している。

Q 値

まず、空洞内部にエネルギー U だけ RF を蓄積することを考える。エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 \int_V |\mathbf{H}|^2 dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\mathbf{E}|^2 dv \quad (1.7)$$

と書ける。このとき空洞内壁には表面電流が流れる。それにより空洞内のエネルギーは失われていく。このときの単位時間あたりの空洞壁面全体の散逸パワーを P_c 、表面抵抗を R_s とすると

$$P_c = \frac{1}{2} R_s \int_S |\mathbf{H}|^2 ds \quad (1.8)$$

となる。この内部エネルギーと壁面でのパワー散逸の関係を

$$Q_0 = \frac{\omega_{010} U}{P_c} \quad (1.9)$$

という量で定義する。これを Q 値 (Quality factor) と呼び、これは空洞内部に溜めたエネルギーの散逸のされにくさを示している。この量を用いると

$$\frac{dU}{dt} = -P_c = -\frac{\omega_{010} U}{Q_0} \quad (1.10)$$

と書くことができるので

$$U = U_0 \exp\left(\frac{-\omega_{010} t}{Q_0}\right) \quad (1.11)$$

となる。この時定数 τ を用いると

$$\tau = \frac{Q_0}{\omega_{010}} \Leftrightarrow Q_0 = \omega_{010} \times \tau \quad (1.12)$$

と書けるため、Q 値は内部エネルギー U が $1/e$ になるまでに電場が振動できる回数に 2π をかけたものと解釈できる。

ここで注意しなければならないのは空洞におけるエネルギーの散逸が空洞壁面でのパワー散逸しかないとは仮定したことである。現実には加速空洞を使用する場合には各種ポートでの RF パワーのやり取りがあるため、これも考慮に入れなければならない。そのときの Q 値を負荷 Q 値と呼び、一般的に Q_L (Loaded Quality factor) と書く。一方、 Q_0 はこれと区別するために無負荷 Q 値 (Unloaded Quality factor) と呼ぶ。

シャントインピーダンス

Q 値は内部エネルギーと壁面でのパワー散逸の関係を表していた。一方でシャントインピーダンス (R_a) という量は加速勾配と壁面でのパワー散逸の関係についてのパラメーターで、以下で定義される。

$$R_a = \frac{V_c^2}{P_c} \quad (1.13)$$

また、これと Q_0 との比、

$$\frac{R_a}{Q_0} = \frac{V_c^2}{\omega U} \quad (1.14)$$

はビーム軸上の電場と内部エネルギーの関係を表す量となる。これは空洞損失に依らない量なので加速効率の良い空洞形状を決定する際に重要なパラメーターとなる。また、これを用いて加速空洞の内部エネルギー U を表すと、

$$U = \frac{V_c^2}{\omega_{010} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.15)$$

となる。

1.3.3 多セル空洞における電場モード

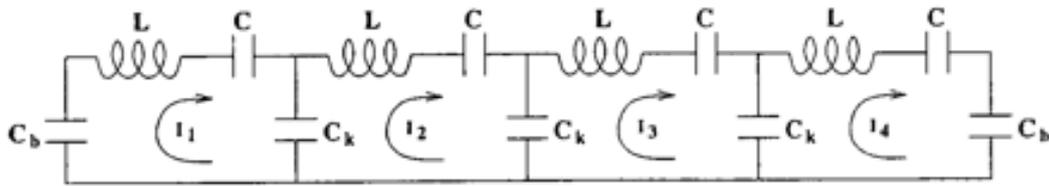


図 1.8 多セル空洞の回路モデル (出典 [5])

ビルボックスの電場計算によりそれぞれのセルにおける共振モードがわかった。今度はそれぞれのセルが繋がったときに全体としてどのような共振モードになるのかを調べる。図 1.8 のような回路モデルを考える。ただしセル数を N とする。各セルにおけるインダクタンスとキャパシタンスを L, C とし、セル同士の結合度をキャパシタンス C_k と置く。更に、両端のセルではビームチューブに接続されているためこの結合度を C_b と置く。

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad k = \frac{C}{C_k}, \quad \gamma = \frac{C}{C_b}, \quad \Omega = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (1.16)$$

と置いてキルヒホッフの法則を各セルに対して適用すると

$$(1 + k + \gamma)I_1 - kI_2 = \Omega I_1 \quad (1.17)$$

$$-kI_{j-1} + (1 + 2k)I_j - kI_{j+1} = \Omega I_j \quad (1 < j < N) \quad (1.18)$$

$$-kI_{N-1} + (1 + k + \gamma)I_N = \Omega I_N \quad (1.19)$$

が得られる。下付き添字の j はセル番号を示しており、 $j=1, 2, \dots, N$ である。慣習的に各セルでの電流 I_j を電圧 v_j に書き換えたものが以下の固有値方程式である。上付き添字の m は $m=1, \dots, N$ の値を取り、 N 連空洞における全体の

振動モードを示している。

$$\begin{pmatrix} 1+k+\gamma & -k & 0 & \dots & 0 \\ -k & 1+2k & -k & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & k & 1+2k & -k \\ 0 & \dots & 0 & -k & 1+k+\gamma \end{pmatrix} \mathbf{v}^{(m)} = \Omega^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} \quad (1.20)$$

現実の加速空洞では隣り合うセルの位相が π ずれており、各セルでの振幅も等しいという π モードを加速モードとして要求する。よってこの固有ベクトルのうちの N 番目のものを

$$\mathbf{v}^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.21)$$

と仮定する。式 (1.25) に代入すると上の二行から

$$1 + 2k + \gamma = \Omega^{(N)} \quad (1.22)$$

$$-1 - 4k = -\Omega^{(N)} \quad (1.23)$$

と得られるので

$$\gamma = 2k \quad (1.24)$$

となる。よって固有値方程式は

$$\begin{pmatrix} 1+3k & -k & 0 & \dots & 0 \\ -k & 1+2k & -k & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & k & 1+2k & -k \\ 0 & \dots & 0 & -k & 1+3k \end{pmatrix} \mathbf{v}^{(m)} = \Omega^{(m)} \mathbf{v}^{(m)} \quad (1.25)$$

となり、これを解くと

$$v_j^{(m)} = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{mN})}{N}} \sin \left[m\pi \left(\frac{2j-1}{2N} \right) \right] \quad (1.26)$$

$$\Omega^{(m)} = \left(\frac{f_m}{f_0} \right)^2 = 1 + 2k \left[1 - \cos \left(\frac{m\pi}{N} \right) \right] \quad (1.27)$$

が得られる。これより、多セル空洞ではピルボックスで得た固有モード 1 つに対して N 個のモードが存在する事がわかった。また、隣り合うセルの電場の位相差は $\frac{m\pi}{N}$ となっていることから、それぞれのモードを $\frac{m\pi}{N}$ モードと呼ぶ。例えば、加速モードでは隣り合うセルの位相差は π で各セルは TM_{010} モードで振動しているため $TM_{010-\pi}$ モードと呼ぶ。

1.3.4 ビームによるモード励起

以上のようにして、加速空洞内の各共振モードが導かれた。次に、ビームによるこれらのモードの励起について述べる。まずは、点電荷による加速モードの励起を考え、その後ビームバンチ (電流) による加速モードの励起について考える。その後、本測定で重要となるダイポールモードの励起について述べる。ダイポールモードとは磁場の極が 2 つあ

るモードを指し、式 (1.1) 及び式 (1.3) における $m=1$ に対応している。TESLA 型空洞においてはビームをキックする代表的なモードとして、ダイポールモードである TM_{110} 及び TE_{111} があげられる。これらはビームがビーム軸から離れる程、つまり空洞のミスアライメントが大きくなる程、強く励起される (後述) ため、空洞のミスアライメントによるビームのエミッタンス増大の原因となっている。

点電荷による加速モードの励起

まず、点電荷 q が加速空洞内のビーム軸上を光速で移動する場合を考える。このとき、加速空洞内に励起される加速モードの電圧の複素数表示を V_q 、その振幅を $\tilde{V}_q (> 0)$ とする。また、点電荷が通過したときに励起される加速モードの電圧の位相を α とすると、このときに励起される電圧を

$$V_q = \tilde{V}_q e^{i\alpha} e^{i\omega_{\text{acc}} t} \quad (1.28)$$

と書くことができる。ただし ω_{acc} は加速モードの角周波数である。簡単のため、空洞は無損失であるとし、空洞にはあらかじめ加速電圧 V_c が存在するものとする。加速電圧 V_c も V_q と同じ様に見ると、

$$V_c = \tilde{V}_c e^{i\phi} e^{i\omega_{\text{acc}} t} \quad (1.29)$$

となる。ただし $\tilde{V}_c > 0$ である。このとき ϕ は点電荷通過時の加速電圧の位相である。またこのときの加速空洞内部のエネルギーを U_i とすると式 (1.15) より

$$U_i = \frac{\tilde{V}_c^2}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.30)$$

と書ける。さらに、点電荷による励起が加わった後の加速空洞の内部エネルギーは

$$U_f = \frac{|\tilde{V}_c e^{i\phi} + \tilde{V}_q e^{i\alpha}|^2}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.31)$$

となることがわかる。従って、内部エネルギーの変化量 ΔU_c は

$$\Delta U_c = U_f - U_i = \frac{2\tilde{V}_c \tilde{V}_q \cos(\psi - \alpha)}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} + \frac{\tilde{V}_q^2}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.32)$$

となる。次に、点電荷のエネルギー変化量を考える。点電荷は自らの励起した加速モードによる電圧からもエネルギー変化を受ける。このときの実効値 V_{eff} を

$$V_{\text{eff}} = fV_q \quad (1.33)$$

とおく。すると点電荷が加速空洞を通過したときに受けるエネルギー変化は

$$\Delta U_q = q(\tilde{V}_c \cos \psi + f\tilde{V}_q \cos \alpha) \quad (1.34)$$

と表すことが出来る。これらに対してエネルギー保存則

$$\Delta U_q + \Delta U_c = 0 \quad (1.35)$$

が成立するので、

$$-q(\tilde{V}_c \cos \psi + f\tilde{V}_q \cos \alpha) = \frac{2\tilde{V}_c \tilde{V}_q \cos(\psi - \alpha)}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} + \frac{\tilde{V}_q^2}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.36)$$

という関係が得られる。ここで、

$$\tilde{V}_q \propto q \quad (1.37)$$

であり、 q は任意の電荷について考えていたので、 q の恒等式と見ると

$$-q\tilde{V}_c \cos \psi = \frac{2\tilde{V}_c\tilde{V}_q \cos(\psi - \alpha)}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.38)$$

$$-qf\tilde{V}_q \cos \alpha = \frac{\tilde{V}_q^2}{\omega_{\text{acc}} \frac{R_a}{Q_0}} \quad (1.39)$$

となる。式 (1.38) は ϕ が任意の値で成立しなければならないので、 α は

$$\alpha = \begin{cases} 2\pi n & (q < 0 \text{ のとき} : \text{ただし } n \text{ は整数}) \\ \pi n & (q > 0 \text{ のとき} : \text{ただし } n \text{ は奇数}) \end{cases} \quad (1.40)$$

となり

$$V_q = \begin{cases} \frac{\omega_{\text{acc}} R_a}{2Q_0} |q| e^{i\omega_{\text{acc}} t} & (q < 0 \text{ のとき}) \\ -\frac{\omega_{\text{acc}} R_a}{2Q_0} |q| e^{i\omega_{\text{acc}} t} & (q > 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1.41)$$

が得られる。これが点電荷が励起する加速モードの電圧である。この電圧は空洞の形状によってのみ決定される R_a/Q_0 と電荷 q に比例している。加速周波数、電荷を一定にした場合を考えると、励起される電圧は R_a/Q_0 によってのみ決定される。また、電圧 V_q は点電荷を減速させるように励起されることに注意する。

この結果と式 (1.39) を比較すると直ちに

$$f = \frac{1}{2} \Leftrightarrow V_{\text{eff}} = \frac{1}{2} V_q \quad (1.42)$$

となることがわかる。つまり、点電荷が自ら励起した加速モードから受ける実効電圧は加速空洞内に励起された電圧の半分になるということである。これを”fundamental theorem of beam loading” [8] と呼ぶ。

さらに、式 (1.41) を式 (1.32) に代入すると加速空洞の内部エネルギーの変化は

$$\Delta U_c = -|q|\tilde{V}_c \cos \psi + \frac{\omega_{\text{acc}} R_a}{4} \frac{R_a}{Q_0} q^2 \quad (1.43)$$

と書ける。第1項は加速電圧が荷電粒子に与えるエネルギーで、第2項が荷電粒子が励起する加速モードのエネルギーである。第2項を U_q と書く。

$$k_{\text{acc}} = \frac{\omega_{\text{acc}} R_a}{4} \frac{R_a}{Q_0} \quad (1.44)$$

と置くと

$$U_q = k_{\text{acc}} q^2 \quad (1.45)$$

となることがわかる。これをロスファクター [5] と呼ぶ。式 (1.30) を用いて書き換えると

$$k_{\text{acc}} = \frac{V_c^2}{4U_i} \quad (1.46)$$

となる。

バンチによる加速モードの励起

次に、バンチによる加速モードの励起を考える。荷電粒子がビーム軸上で長さ σ_z を持つようなガウス分布をもつようなバンチを考える。以下、簡単のため $q < 0$ とする。それぞれの電荷 dq が時刻 t_q で加速空洞を通過するとすると、 dq の励起する電圧は

$$dV_q = 2k_{\text{acc}} dq e^{i\omega_{\text{acc}} t_q} \quad (1.47)$$

とかける。よって全電荷によって励起される電圧は

$$V_q = 2k_{\text{acc}} \int e^{i\omega_{\text{acc}} q_n} dq = 2k_n \int_{-\infty}^{\infty} I(t) e^{i\omega_{\text{acc}} t} dt \quad (1.48)$$

である。ただし、加速空洞を通過する電流を

$$I(t) = \frac{Q_b}{\sqrt{2\pi\sigma_t}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma_t^2}\right) \quad (1.49)$$

とした。ここで Q_b は全電荷とし、 σ_t はパンチの長さ (標準偏差) を時間単位に直したもので、パンチの中心が通過する時刻を $t = 0$ と取っている。よってこのときの励起される加速電圧は

$$V_I = 2k_{\text{acc}} Q_b \exp\left(\frac{-\omega_{\text{acc}}^2 \sigma_t^2}{2}\right) = 2k_n Q_b \exp\left(\frac{-\omega_{\text{acc}}^2 \sigma_z^2}{2c^2}\right) \quad (1.50)$$

となる。パンチによる励起の場合も同様にして、励起される電圧の大きさは電荷 Q_b 及び R_a/Q_0 に比例することがわかった。また、新たに加わったパンチ長に関する項より、パンチ長 σ_t に対して $1/\sigma_t > \omega$ となるようなモードのみ強く励起されることがわかる。このことからビームのキックに関する HOM の励起は、定次の HOM が支配的であることがわかる。

ダイポールモードの励起

次に、ビームのよるダイポールモードの励起を考える。式 (1.1) より TM モードのダイポールモードのビーム軸方向の電場 E_z は

$$E_z = E_0 J_1\left(\frac{u_{1n} r}{a}\right) \cos\left(\frac{p\pi z}{d}\right) \cos\theta \quad (1.51)$$

と書けて、 $|x| \ll 1$ のとき $J_1(x) \simeq x/2$ であるから、十分小さな r に対して、 E_z は r に線形で変化する。本研究で取り扱う TE_{111} モードでは第3章によるシミュレーションで十分小さな r に対して E_z が線形となることがわかるので、以下の議論は本来ピルボックスでは E_z を持たない TE_{111} でも適用が可能であることに注意する。

まずは点電荷のダイポールモードの励起について考える。加速モードの励起の場合と同様にして、ダイポールモードのロスファクター k_d を、ダイポールモードのビームパイプ上 ($r = R$ とする) での電圧を V_R 、内部エネルギーを U_i として

$$k_d = \frac{\tilde{V}_R^2}{4U_i} \quad (1.52)$$

のように定義する。すると、

$$U_i = \frac{\tilde{V}_R^2}{4k_d} \quad (1.53)$$

と書けて、点電荷が $r = R$ を通った場合の励起電圧の振幅を \tilde{V}_q とすれば、式 (1.31) と同様にして励起後の内部エネルギーは

$$U_f = \frac{|\tilde{V}_R e^{i\phi} + \tilde{V}_q e^{i\alpha}|^2}{4k_d} \quad (1.54)$$

となる。点電荷が受け取るエネルギーは式 (1.34) と同様にして

$$\Delta U_q = q(\tilde{V}_R \cos\psi + f\tilde{V}_q \cos\alpha) \frac{r}{R} \quad (1.55)$$

とかけるから、加速モードの場合と同様にすると

$$V_q = \mp 2k_d |q| \frac{r}{R} e^{i\omega_n t}, \quad f = \frac{1}{2} \quad (1.56)$$

が得られる。ただし $q > 0$ で上の符号を、 $q < 0$ で下の符号を取り、 ω_n はダイポールモードの角周波数である。これより、ダイポールモードの励起される電圧もロスファクター及び電荷に比例することがわかった。さらに、点電荷の通過位置のビーム軸からの変位 r にも励起される電圧が比例することがわかった。このときダイポールモードのシャントインピーダンスは、位置 r におけるダイポールモードの電圧を $V_{||}$ として

$$R_d = \frac{V_{||}^2}{(\omega_n/c)^2 r^2 P_c} = \frac{V_R^2}{(\omega_n/c)^2 R^2 P_c} \quad (1.57)$$

のように定義される。このときロスファクターは

$$k_d = R^2 \left(\frac{\omega_n}{c}\right)^2 \frac{\omega_n R_d}{4 Q_0} \quad (1.58)$$

と書けて、 R_d/Q_0 に比例することがわかる。また、点電荷の通過による空洞の内部エネルギーの変化は

$$U_q = k_d q^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad (1.59)$$

となる。

以上が点電荷によるダイポールモードの励起であるが、これはバンチの場合でも加速モードの場合と同様の議論が可能で、その場合の励起される電圧の振幅は総電荷 Q_b 、 R_d/Q_0 、ビーム軸からの変位 r に比例することがわかる。よって前述したように、ビームがビーム軸からずれる、つまり空洞のミスアライメントが存在する場合、これらのキックモードが励起されビームのエミッタンスが増大してしまうことが確認された。

第 2 章

研究手法

本章では ILC 用超伝導加速空洞の電気的中心軸の位置を実験室規模で測定するための具体的な手法について説明する。

2.1 目的

本研究の目的は

「空洞の代表的なキックモード (TE_{111-7}) の電気的中心軸の位置を実験室規模で、ビームを使用せずに高精度で測定する手法を確立すること」

である。そのための手法として以下 2 つを実行する。

- シミュレーションを行い、実際の測定セットアップでキックモードの電気的中心軸が測定できることを確認・保証する
- 測定セットアップを構築し、実際に測定することで、キックモードの電気的中心軸の測定手法を確立する

また、本研究では TESLA 型 Z142 空洞という個体について測定を行ったが、その固有の特性を調べるのが目的ではなく、あくまでキックモードの電気的中心軸の位置を測定するための手法を確立することが目的であることを重ねて注意しておく。

2.2 原理

加速空洞の内部でどのようなモードが存在するかについては前章で述べた。そのうちでビームをキックするモードで最低周波数をもつのは TE_{111} モードである。その TE_{111} モードの中でも特に TE_{111-7} は位相速度が光速に近いので、ほぼ光速で運動する粒子との結合が強く、インピーダンスが高い。[7] によってキックモードの代表として本研究では TE_{111-7} モードについて電気的中心を測定することを試みた。また、この TE_{111-7} モードには電場の方向がおおよそ 90° ずれたモードである $TE_{111-7-1}$ 、 $TE_{111-7-2}$ が存在する (図 2.1、図 2.2)。これは TE_{111} モードの共通の性質である。 TE_{111} モードは本来二重縮退しているが、空洞のインプットカップラーや HOM カップラーなどによる z 軸周りの回転対称性の破れにより縮退が解けることによって、周波数が数 100 kHz 程度異なり、電場の方向がおおよそ 90° ずれた 2 つのモードに分離する。本研究ではこれらのうち低周波側のモードを $TE_{111-7-1}$ 、高周波側のモードを $TE_{111-7-2}$ と呼ぶことにする。また、 TE_{111-7} モードの電気的中心軸とは $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ の励起が最も小さくなるような軸として考える。

ピルボックスの計算(式(1.3))によると TE_{111} には E_z 成分は存在しない。しかし TESLA 型空洞など近年の一般的な空洞はピルボックスと異なり各セルが丸みを帯びており、境界条件が変化している。金属表面での電場は表面に対して垂直でなければならないから、電場もこの丸みに沿ってビーム軸方向に曲げられることになる。これにより TE_{111} モードは図 2.3 のようにビーム軸から電場方向への変位に比例した E_z を持つようになる。(この詳細については次章のシミュレーションの項で述べる。)ここで、前章の「ビームによるモード励起」の項を思い出すと、例えば $TE_{111-7-1}$ モードが電場方向の変位に比例した E_z を持つということは、ビームのその方向への変位が大きいほどそのモードの励起が強くなることわかる。つまり、ビームを通す位置を変数としたときに励起される $TE_{111-7-1}$ の強度をプロットすると、 $TE_{111-7-1}$ モードの電場方向に折れ曲がった谷のような 3 次元グラフ(図 2.4)が得られることがわかる。 $TE_{111-7-1,2}$ モードでそれぞれ図 2.4 のような谷を見つけ、その谷が交わる点を測定することで $TE_{111-7-1,2}$ それぞれが最も励起されないようなビーム軸を見付けることができる。これによって TE_{111-7} モードでの電気的中心軸を決定することができる。

一般的にこの測定におけるモード励起は実際のビームを通して行われるが、本研究では空洞のビーム軸に平行にワイヤーを張りそこにパルスを通し、擬似ビームとしてモードを励起し実験を行う。これにより小規模な実験設備でビーム応答に近いものを得ることが可能となっている。この手法をワイヤーパルス法と呼ぶ。ワイヤーパルス法による具体的な測定手順は以下である。ただし、ワイヤーパルスやビームによる励起は特定のモードを励起するのではなく、結合する全てのモードを励起するため、目的のモード、つまり $TE_{111-7-1,2}$ モードの信号振幅を得るにはフーリエ変換を行い、モード毎に分離をしなければならないことに注意する。

1. ワイヤーを空洞内に通し、基準点にワイヤーを合わせる
2. ワイヤー上にパルスを流し、モードを励起する
3. HOM カップラーからこの応答を取得し、信号増幅の後オシロスコープに取り込む
4. 得られた波形をフーリエ変換し、励起された $TE_{111-7-1,2}$ の信号振幅を取得する
5. 空洞を移動し、ワイヤーの位置を相対的に動かす
6. 2~5 を繰り返す
7. ワイヤーの位置と励起された $TE_{111-7-1,2}$ の信号振幅のグラフを得る
8. 2つのモードから極小励起の軸を求め、その交点から電気的中心軸を求める

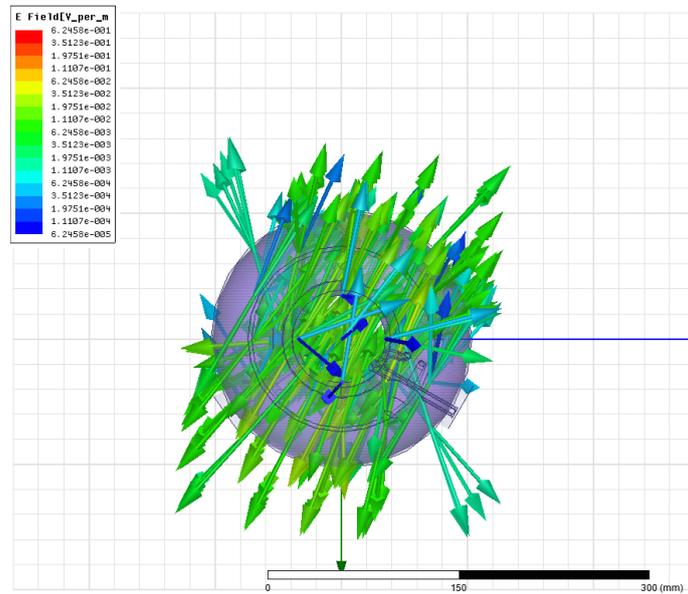


図 2.1 TE_{111-7} のスプリットモードの電場の様子 (低周波側) : ANSYS HFSS にて TE_{111-7} のモードスプリットを確認した。この図はスプリットして得られた 2 つのモードのうちの低周波側のモード ($TE_{111-7-1}$) をビーム軸方向から見た場合の電場の様子である。電場の向きはおよそ上流側の HOM カップラーの向きを向いている。

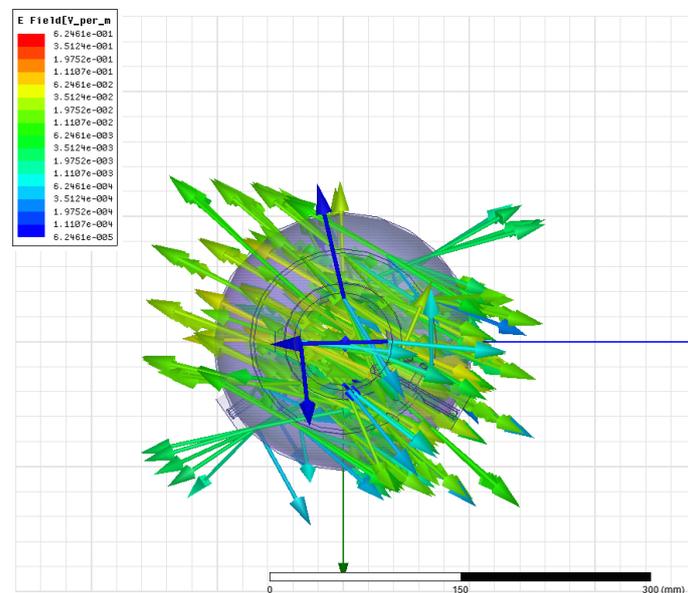


図 2.2 TE_{111-7} のスプリットモードの電場の様子 (高周波側) : この図はスプリットして得られた 2 つのモードのうちの高周波側のモード ($TE_{111-7-2}$) をビーム軸方向から見た場合の電場の様子である。電場の向きはおよそ下流側の HOM カップラーの向きを向いている。またこのスプリットの幅はおよそ 300kHz であった。

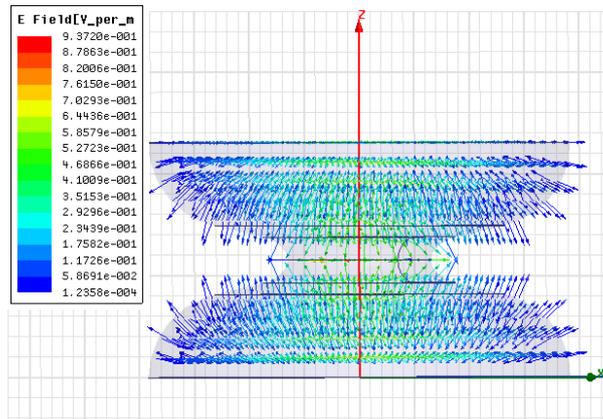


図 2.3 TESLA 型空洞での TE_{111} モードの様子：TESLA 型空洞の単セルでの TE_{111-7} の電場をシミュレーションソフト ANSYS HFSS で計算した。この図からわかるように、 TE_{111} モードはアイリス部付近（空洞のくびれ部分）の影響によりビーム軸から離れる程強い E_z を持つ。

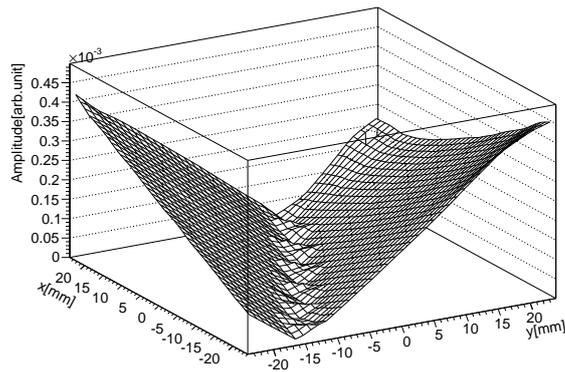


図 2.4 ビーム通過位置と $TE_{111-7-1}$ モードの励起の強さの関係：ANSYS HFSS にてビーム通過位置と励起される $TE_{111-7-1}$ モードの強さの関係を計算した。詳細については第 3 章で扱う。この図から、ある方向にこのモードが励起されにくい軸があり、そこからの変位に比例して励起される $TE_{111-7-1}$ モードの電圧の振幅が大きくなることわかる。

2.3 特徴

本実験の最大の特徴はビームをワイヤー上のパルスに置き換えたことである。このワイヤーパルス法の主な長所と短所を挙げる。

長所

- ・小規模な実験で空洞のビーム応答に近いものを調べることができる

実際のビーム実験は粒子の生成から加速を経て空洞に粒子を打ち込む必要があり、またその軌道もコントロールする必要があるため大掛かりになってしまう。本実験ではワイヤーにパルスを送るだけなので小規模な実験でビーム応答を調べる事ができる。そのため、実験に際しての準備や人員の確保に困ることがなく、より多くの空洞について性質を調べる事ができる。

- ・空洞の位置を正確に知ることができる

ILC のための空洞のビーム実験では一般的にクライオモジュールに空洞を組み込んだ後にビーム実験を行う。この場合、それぞれの空洞はクライオモジュール外から正確な位置を把握することができない。本実験では空洞を裸のまま実験に使用するためこれについて心配することなく、1台1台の空洞について性質を調べる事ができる。

短所

- ・ワイヤーによる空洞の固有モードへの影響がある

ビーム軸上から離れるに従いワイヤーによる内部電場への摂動が大きくなると考えられるため、遠方では固有モードや固有周波数に変化が生じる。

- ・ワイヤーと空洞の間での同軸モードが形成される

空洞内の中心付近にワイヤーを入れるため TEM モードが混入する可能性がある。しかし、TEM モードは空洞内部には本来存在しないモードであるため、ワイヤーを入れる前と後とを比較することにより同定することが可能である。

- ・超伝導状態での運用は困難である

ワイヤーを通す際に空洞内部が汚れるため超伝導状態での運用は困難である。

以上が本手法の特徴である。今回は TESLA 型の TE_{111-7} の電気的中心軸の測定を行っているが、ワイヤーパルス法は空洞の種類に関わらず、また励起できるモードも多いため空洞の性質や個体差を調べる上で応用の効く手法であると言える。

第 3 章

ANSYS HFSS による空洞内電場のシミュレーション

3.1 シミュレーションの目的

本章のシミュレーションの目的は「実際のワイヤパルス法によって TE_{111-7} の電気的中心軸の位置が測定可能であることを確認・保証する」ということである。特に、「 TE_{111-7} の電気的中心軸からの電場方向への変位」と「ビーム軸方向の電場の強さ」が比例するという事実は空洞の形状から来るもので、解析解が存在しない。そのため、高周波シミュレーションソフトによる数値解析を用いてこの比例関係を保証する必要がある。

この章では一般的な TESLA 型空洞における電磁場の様子をシミュレートする。図面上の TESLA 型空洞と実際の TESLA 型空洞では当然ながら形状に差があるため、機械的中心及び電気的中心が一致するとは限らない。本章では図面通りに理想的に製作された場合の空洞について TE_{111-7} の電気的中心軸の位置を計算する。シミュレーションソフトは有限要素法を用いて高周波解析を行う ANSYS HFSS を使用した。

3.2 加速空洞のモデリング

3.2.1 TESLA 型空洞の形状の概要

実際のモデリングについて述べる前に、TESLA 型空洞の構成について述べる。

TESLA 型空洞の組図は図 3.1 のようになっている。大きく分けて以下の 3 つの部分に分けることができる。

1. ロングエンドグループ

図 3.1 中の青色の線で囲まれた部分がロングエンドグループである。ビームパイプ、HOM カップラー、ピックアップポート及び 1 セル目の左側半分のセル (ロングハーフセル) の 4 つのパーツで構成されている。こちらがビームを通すときの上流側になる。以降、ロングエンドグループ側のことを上流側と表現する。また、セルの番号は上流側から数えたものとする。例えば、「3 セル」と呼んだ場合は上流側から 3 つ目のセルを指す。

2. ダンベル

図 3.1 の山吹色の線で囲まれたハーフセルを 2 つセットにしたものをダンベルと呼ぶ。図 3.1 の赤色の線で囲まれた 1 セル目の右半分から 9 セル目の左半分まではノーマルハーフセルと呼ばれる同一規格のハーフセルによって構成される。

3. ショートエンドグループ

図 3.1 の黄色の線で囲まれた部分がショートエンドグループである。ビームパイプ、HOM カップラー、インプットカップラー及び 9 セル目の右側半分のセル (ショート-halfセル) の 4 つのパーツで構成されている。こちら側がビームを通す際の下流側になる。以降、ショートエンドグループ側のことを下流側と表現する。

それぞれのパーツの役割を簡単に述べる。

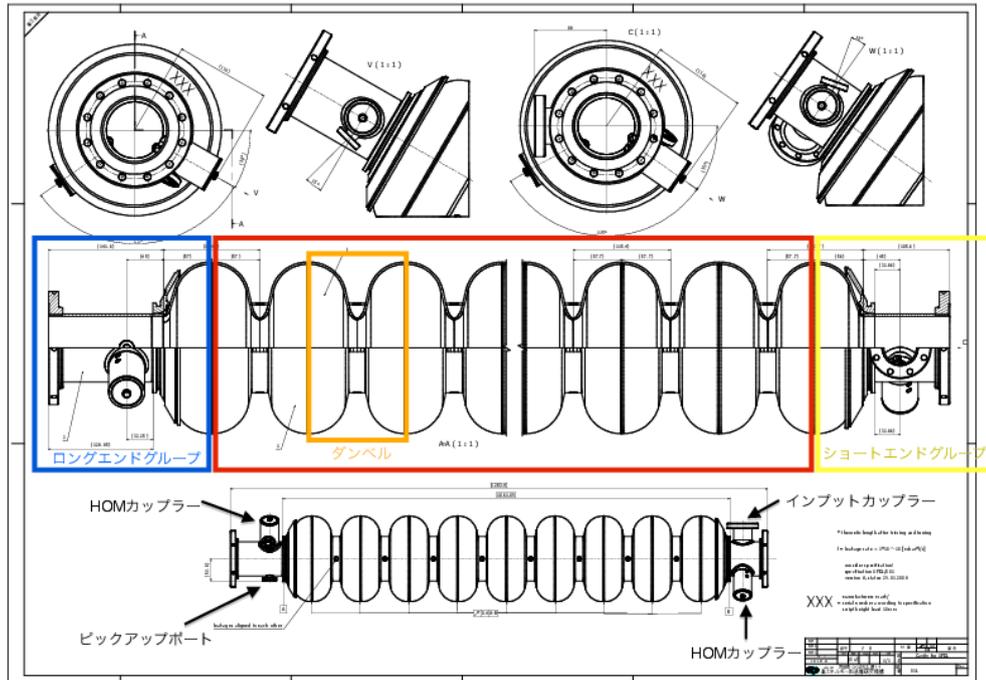


図 3.1 TESLA 型空洞の組図 [KEK より]: TESLA 型空洞の全体図である。青枠の部分がロングエンドグループ、赤枠の部分が空洞中心部、黄色枠の部分がショートエンドグループである。また、それぞれのカップラーの位置は、図の最下部にある加速空洞の組図の部分に矢印で示した。

- インプットカップラー: 加速に用いる RF を空洞内に入力する。
- HOM カップラー: 空洞内で励起された加速の妨げになるような高調波モード (HOM) に結合し、外部に引き出す。
- ピックアップポート: 加速電場をモニターする。
- ハーフセル: 空洞の共振部分を半セル毎に切り分けたもので、1 セルと 9 セルのビームチューブに接続されているものだけ口径が異なり、それぞれロングハーフセル・ショートハーフセルと呼ばれる。

3.2.2 TESLA 型空洞のモデリング

作成した TESLA 型空洞のモデルは図 3.2 のようになっている。このモデルは空洞の内部を作成したものであり、金属部分は境界条件で与えるため作成する必要がない。本研究では大気中にて測定を行うため、このモデルは空気で作っている。また、このモデルは TESLA 型空洞の図面に忠実に作成したが、2 点の差異が存在する。

1. RF 入力のためのアンテナを実装していない
2. 加速電場をピックアップするためのアンテナを実装していない

これらの部分は実際のビーム運転に際してチューニングを行うため空洞内に差し込む長さが決まっていない。さらに、本実験においてはこれらのアンテナは使用しないので、条件を揃えるためアンテナは実装していない。HOM カップラーについては図面通りのものを実装しており、カップラーから 1mm の距離までアンテナを伸ばしている。

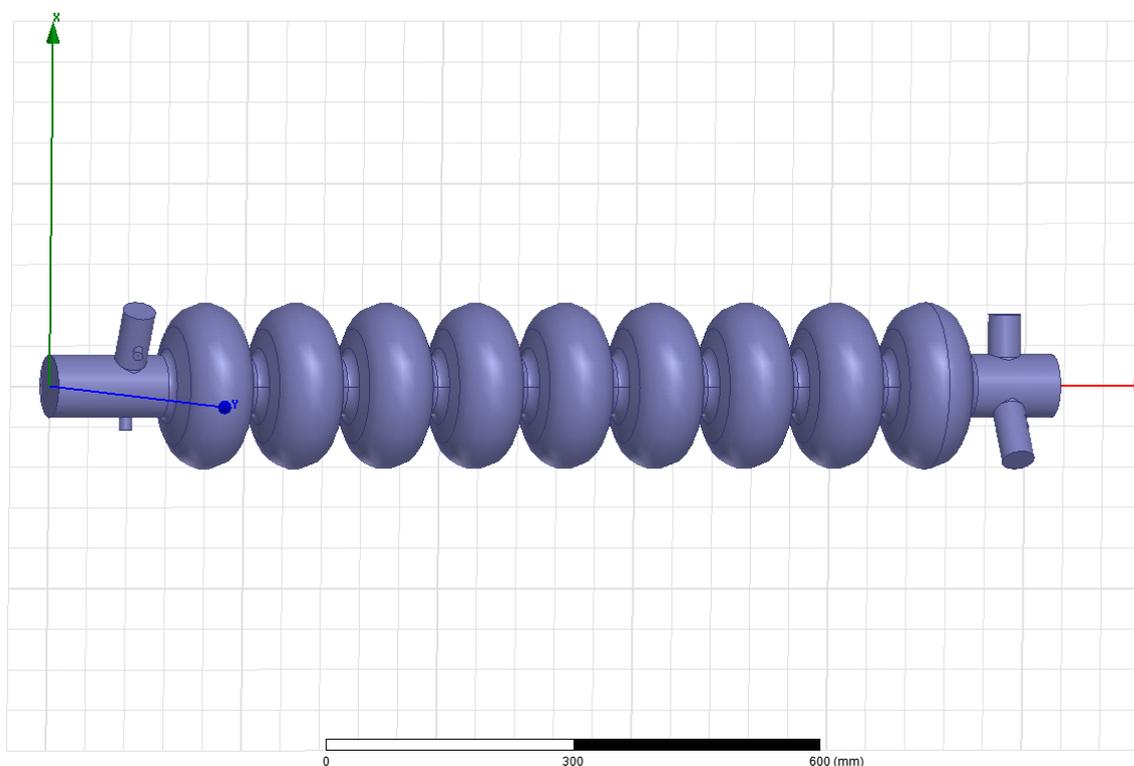


図 3.2 TESLA 型空洞のモデル

3.3 内部電場の計算

3.3.1 解析モード

ANSYS HFSS には高周波解析のためのモードが大きく分けて2つ存在する。

(i) Eigen mode(固有値モード)

固有値モードではある構造体の固有周波数に着目し、構造体を与えた境界条件から内部での共振モードを探索する。このとき、構造体内への高周波の入力・出力は考慮しないことに注意する。

(ii) Driven mode(ドライブモード)

ドライブモードでは高周波を入力・出力するポートを設定し、周波数スイープを行うことでSパラメータを計算することができる。これは現実の測定ではネットワークアナライザでの測定に対応している。

本章での内部電場の計算には固有値モードを用いる。

3.3.2 条件設定

作成した TESLA 型加速空洞のモデルに対して、内部電場を計算するためには主に以下の設定が必要である。

(a) 材質の設定

内部電磁場を計算したい構造物の材質をする必要がある。前述したように本測定では加速空洞を大気中で使用するため、大気で空洞内部の形状を作成した。これら材質についてはソフトウェア内にあらかじめパラメータが設定されているため材質を選択するだけでよい。

(b) 各表面の境界条件の設定

構造物の各表面で境界条件を設定する必要がある。境界条件には完全導体の電場境界条件や磁場境界条件、有限電気伝導度を持つ材質での境界条件などが設定可能である。TESLA 型超伝導加速空洞の材質は Nb であるため、これを設定する。本測定は室温 (20) で行うため、この温度でのおよその Nb の電気伝導度 6200000 S/m を入力した。

(c) メッシュの設定

構造物を三角錐の集合体として近似する際のオプションとして、内部や表面での三角錐のサイズの制限などが可能である。今回は表面の近似を以下のように設定した。

Surface Deviation 30 μm

Aspect Ratio 3

Surface Deviation はメッシュの張る表面と構造物の表面との距離の制限をしており、Aspect Ratio は表面における三角形メッシュのアスペクト比の制限である。その他のオプションは規定値を用いている。

3.3.3 分散曲線

以上のようにして設定することで内部電場の計算が可能になった。以下に固有値モードで TESLA 型空洞の固有モードを計算した場合の分散曲線を示す。分散曲線とは、横軸に各モードにおけるセル間での位相のずれを、縦軸にそのモードの周波数をプロットしたものである。例えば、TESLA 型空洞の加速モードは 1.3 GHz の $TM_{010-\pi}$ であるから、横軸の値は π 、縦軸の値は 1.3 GHz とする。図 3.3 の黒い点が TM_{010} モードで、左から順に $\pi/9, 2\pi/9, 3\pi/9 \dots \pi$ モードとなっている。また、その上の赤い点群が TE_{111} で、緑の点群が TM_{110} 、青い点群が TE_{211} モードとなっている。加速モードの周波数は 1.3006 GHz と計算されており、これは設計値 1.3 GHz に精度 1 MHz で一致していることがわかる。本測定では TE_{111-7} モードを使用するが、この計算により周波数は

$$f_{TE_{111-7-1}} = 1.7329 \text{ GHz} \quad , \quad f_{TE_{111-7-2}} = 1.7332 \text{ GHz} \quad (3.1)$$

となった。これより TE_{111-7} のモードスプリット間の周波数差は計算値で約 300 kHz となる。

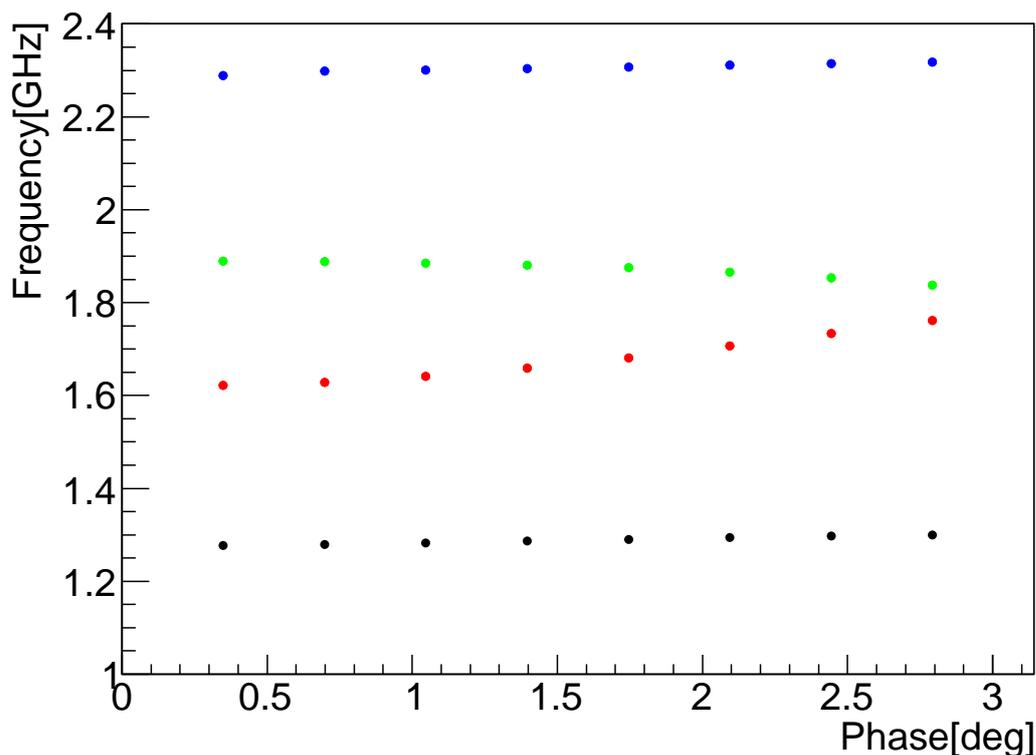


図 3.3 TESLA 型空洞の分散曲線：TESLA 型空洞の各モードを HFSS にて計算した結果を、横軸を各セル間での位相進み、縦軸を周波数としてプロットした (分散曲線)。例えば、TESLA 型空洞の加速モードは 1.3 GHz の $TM_{010-\pi}$ であるから、横軸の値は π 、縦軸の値は 1.3 GHz とする。図 3.3 の黒い点が TM_{010} モードで、左から順に $\pi/9, 2\pi/9, 3\pi/9 \dots \pi$ モードとなっている。また、その上の赤い点群が TE_{111} で、緑の点群が TM_{110} 、青い点群が TE_{211} モードとなっている。これらの同一の色の点群の周波数帯をパスバンドと呼ぶ。一方、これらの点群が存在しない、すなわち共振モードの存在しない周波数帯をストップバンドと呼ぶ。例えば、1.3 GHz 付近から 1.6 GHz 付近までは共振モードが存在しないため、ストップバンドであるが、1.6 GHz 付近から 1.9 GHz 付近までは TE_{111} モード及び TM_{110} モードが存在し、パスバンドとなる。

3.4 TM_{111-7} の電気的中心軸の位置の計算

この電場の計算結果を用いて TE_{111-7} の電気的中心軸の位置を計算する。まず、 $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-1}$ のビーム軸方向の電場 E_z から、ビームがそのモードから受ける電圧 V を計算する。ただし、シミュレーションで得た電場の値は、空洞内の最大電場を 1 MV/m と規格化していることに注意する。

$$V = \int_0^d E_z(r, \theta, z) e^{i\omega z/c} dz \quad (3.2)$$

逆に、ビームがこれらのモードを励起する場合、励起される電場の強さはこの V に比例する。従って、この V の計算を一辺 4 mm の格子点上で、それぞれ $-24 \text{ mm} \leq x \leq 24 \text{ mm}$, $-24 \text{ mm} \leq y \leq 24 \text{ mm}$ の範囲で行い、これを各位置で励起される各モードの電場の振幅とすると、その結果は図 3.4、図 3.5 のようになった。これらのグラフの縦軸は任意単位であることに注意する。また、これらのグラフは見やすさのため各点を滑らかになるよう表面で繋いでいる。2 つのモードで谷が形成されており、それぞれ異なる方向を向いていることがわかる。その様子を等高線で表示したものが図 3.6、図 3.7 である。

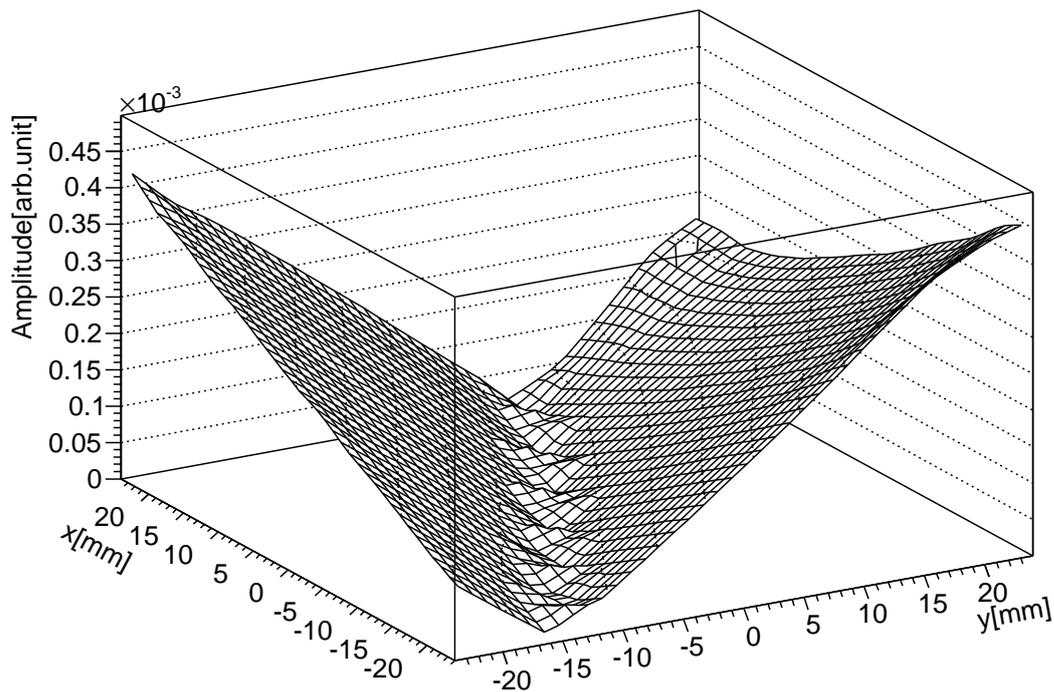


図 3.4 ビームの位置と励起される $TE_{111-7-1}$ の電場の振幅の関係 (3次元表示) : $-24 \text{ mm} \leq x \leq 24 \text{ mm}$, $-24 \text{ mm} \leq y \leq 24 \text{ mm}$ の範囲で、0 を中心とした 1 辺 4 mm の格子点上の各点をビームが通る場合の、励起される $TE_{111-7-1}$ の電場の振幅の大きさを計算した。励起されるモードの電場の振幅が極小となるような谷が形成されていることがわかる。

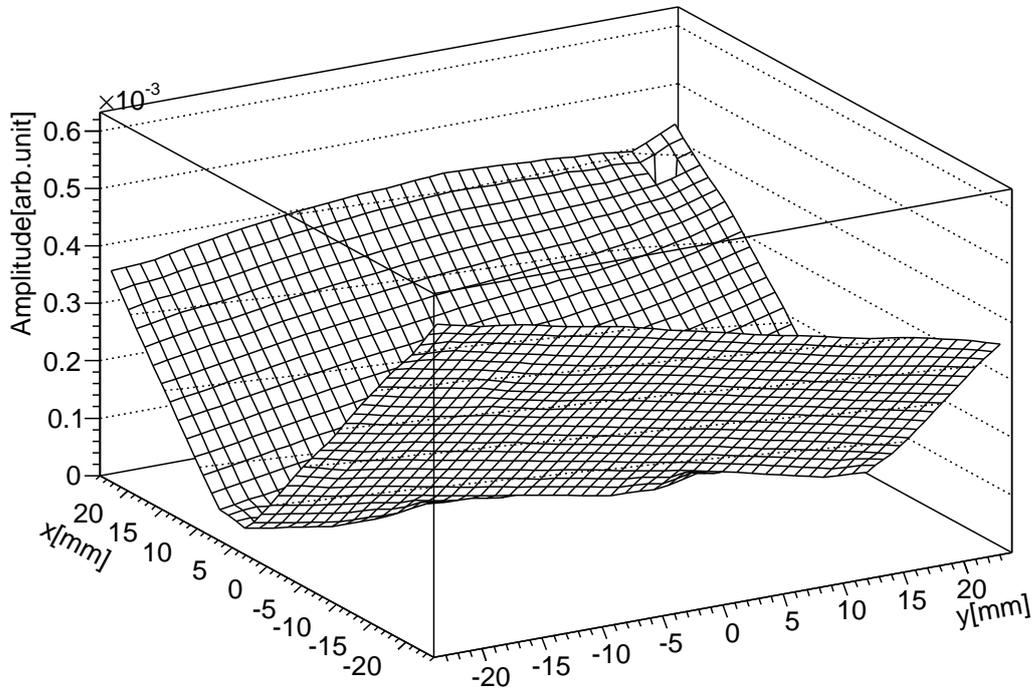


図 3.5 ビームの位置と励起される TE₁₁₁₋₇₋₂の電場の振幅の関係 (3次元表示) : -24 mm ≤ x ≤ 24mm , -24 mm ≤ y ≤ 24 mm の範囲で、0 を中心とした 1 辺 4 mm の格子点上の各点をビームが通る場合の、励起される TE₁₁₁₋₇₋₂ の電圧の振幅の大きさを計算した。励起されるモードの電場の振幅が極小となるような谷が形成されていることがわかる。

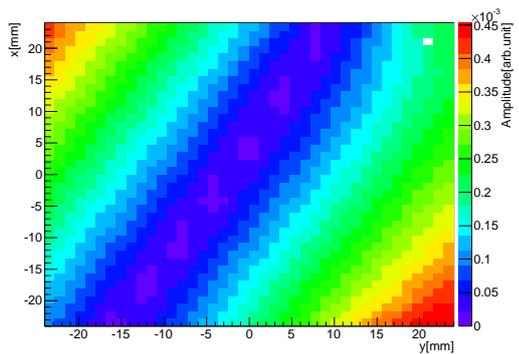


図 3.6 ビームの位置と励起される TE₁₁₁₋₇₋₁の電場の振幅の関係 (等高線表示) : 図 3.4 を等高線表示したものである。色が赤色に近づく程、励起される TE₁₁₁₋₇₋₁ の電場は大きくなり、青紫色に近づく程、その電場は小さくなる。図 3.4 の谷の部分とこの図の青紫色の線は対応している。

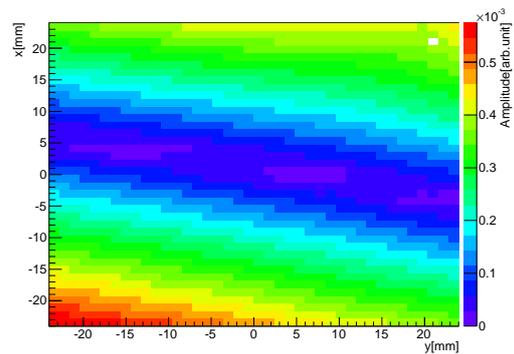


図 3.7 ビームの位置と励起される TE₁₁₁₋₇₋₂の電場の振幅の関係 (等高線表示) : 図 3.5 を等高線表示したものである。色が赤色に近づく程、励起される TE₁₁₁₋₇₋₂ の電場は大きくなり、青紫色に近づく程、その電場は小さくなる。図 3.5 の谷の部分とこの図の青紫色の線は対応している。

得られた図からもわかるように、谷の軸上では各モードのビームによる励起は極小となり、 $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ の谷の軸が交わるような点が存在する。このときビームによる $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ の励起が共に極小となるので、この位置が TE_{111-7} の電気的中心軸の位置となる。それぞれの谷の軸を求めるために、 $TE_{111-7-1}$ モードの谷を x 平面で、 $TE_{111-7-2}$ モードの谷を y 平面でカットし、それぞれの平面で谷の二次元グラフを得る。これらは谷の中心点を境に左右が傾きが同じ直線になっているため、これらのフィッティングをすることで、谷の中心点を求めることが可能である。しかし、直線でフィッティングする場合は中心点付近の点をどちら側の直線に入れてフィットするかを選択する必要がある。これを避けるためそれぞれの電場 E_z の振幅を二乗し、二次関数でフィットした。その様子を図 3.8、図 3.9 に示す。図 3.9 で示されるように、原点から離れるに従い、谷の左右での傾きが変化してしまうためフィッティングの精度が落ちてしまっていることがわかる。よって本測定では測定点を中心近傍に絞り、精度を上げる必要があることがわかる。

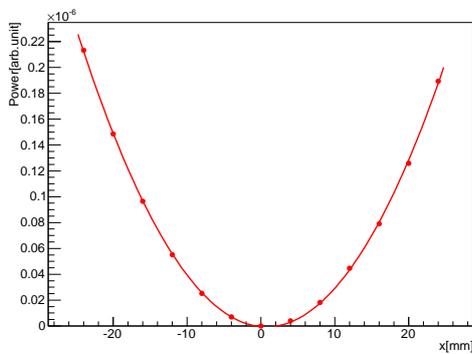


図 3.8 $TE_{111-7-2}$ の $y = 4\text{mm}$ における谷の二乗フィットの様子： $y=4\text{mm}$ における、 x と励起される電場の二乗のプロットである。これを二次関数でフィッティングすることで $y=4\text{mm}$ における $TE_{111-7-2}$ の谷の x 座標を得ることが出来る。

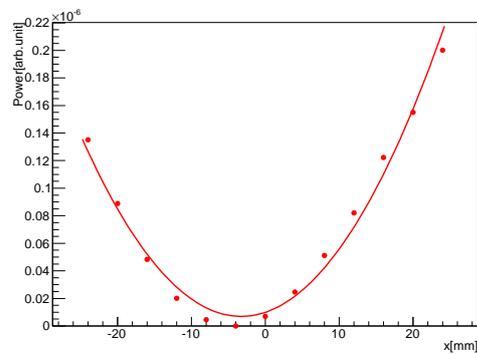


図 3.9 $TE_{111-7-2}$ の $y = 24\text{mm}$ における谷の二乗フィットの様子： $y=24\text{mm}$ における、 x と励起される電場の二乗のプロットである。これを二次関数でフィッティングすることで $y=24\text{mm}$ における $TE_{111-7-2}$ の谷の x 座標を得ることが出来る。

このようにしてそれぞれのモードで各平面での谷の中心点を導くことで、 xy 平面上での谷の軸の直線の方程式が得られる。結果を図 3.10 に示す。図の赤色の点群が $TE_{111-7-1}$ の励起が各 x 平面で極小となるような点で、黒色の点群が $TE_{111-7-2}$ の励起が各 y 平面で極小となるような点である。誤差には各平面での二乗フィットによる誤差をつけている。また、直線でよく近似できる部分でそれぞれの谷の軸をフィッティングした。それらの交点は

$$y = -1.2 \pm 3.0 \text{ mm} \quad x = 1.6 \pm 1.4 \text{ mm}$$

となった。誤差には直線フィッティングの誤差による交点の座標の誤差をつけている。ただし、座標原点は加速空洞のビーム軸である。

以上のシミュレーションについて結果をまとめる。

シミュレーションの目的

シミュレーションの目的はワイヤパルス法によって TE_{111-7} の電氣的中心軸が測定可能かどうかの判断であった。そのためには TE_{111-7} がビーム軸からの電場方向への変位に比例した E_z を持つことを保証する必要があった。

シミュレーションの結果

シミュレーションの結果、 TE_{111-7} の電場の振幅は図 3.4、図 3.5 のようになった。これを二乗してフィットした結果、中心点近傍 (± 10 mm 程度の領域) では二次関数で良く近似ができた。よって TE_{111-7} がビーム軸からの電場方向への変位に比例した E_z を持つことがわかった。このことから TE_{111-7} の電氣的中心軸がワイヤパルス法によって測定可能であると判断できる。

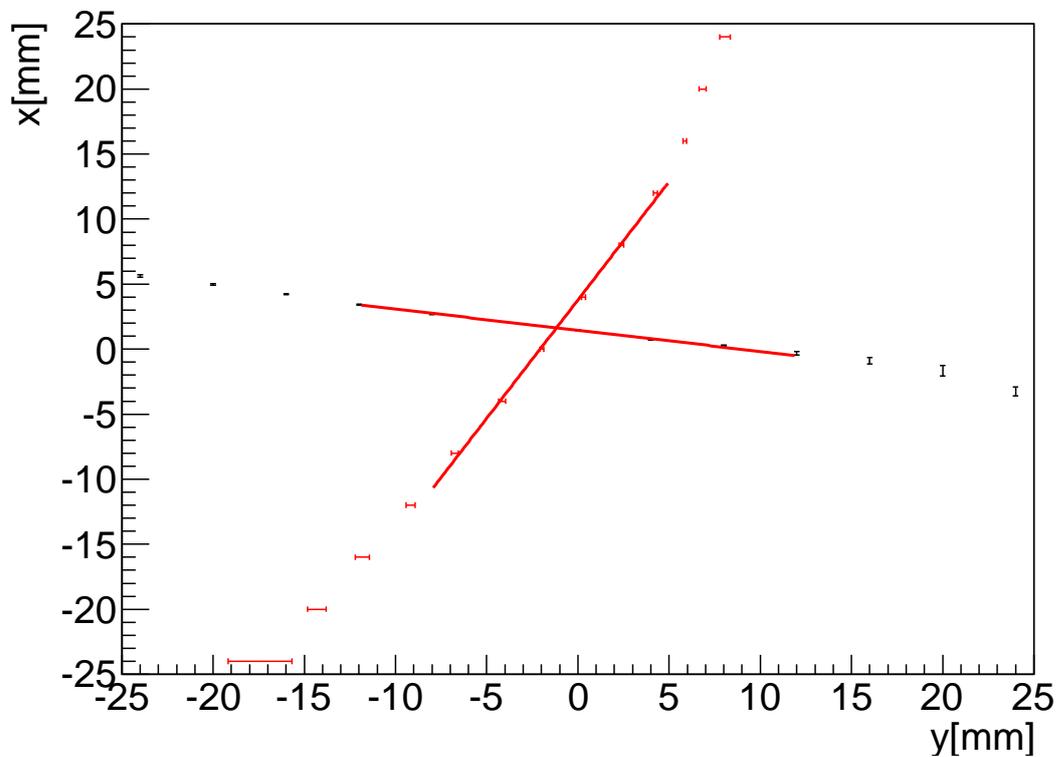


図 3.10 $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ の谷の軸の直線フィットの様子：図の赤色の点群は $TE_{111-7-1}$ の励起が各 x 平面で極小となるような点で、黒色の点群は $TE_{111-7-2}$ の励起が各 y 平面で極小となるような点である。これらがそれぞれ直線で良く近似できる部分で近似し、その交点を求めることで、 TE_{111-7} モードの電氣的中心位置を求めることができる。誤差には各平面での二乗フィットによる誤差をつけている。

第 4 章

空洞特性の測定

本章では実際に測定に用いた ZANON 社製の TESLA 型空洞 Z142 についての評価を行う。

4.1 チューニングマシンの構成

高エネルギー加速器研究機構の STF 棟では加速空洞チューニングマシン (図 4.7) を所持している。チューニングマシンとは実際に製造された加速空洞の各セル毎の周波数及び機械的中心をチューニングするための機械である。本実験ではこれを使用し Z142 空洞の機械的中心、共振周波数、電場平坦度を測定した。以下でチューニングマシンの構成について述べる。



図 4.1 空洞チューニングマシン全体図：空洞チューニングマシンは外径測定器、ビーズ測定器、チューニング機構の 3 つで構成されている。それぞれの機構間をモーター駆動の移動架台によって行き来する。図は加速空洞を HOME と呼ばれる待機位置に置いてある様子である。写真中央のゲート部分が加速空洞を機械的に伸び縮みさせることで周波数及び加速空洞の軸を調整するチューニング機構である。また、ビーズ測定はこの位置でおこなう。加速空洞の外径測定器はゲートの奥にあり、ここで外径を測定し、各セルの機械的中心点の座標を測定する。

4.1.1 外径測定

外径測定器では、図 4.2 のように、加速空洞の外径に沿ってリニアゲージを同心円上に当てていくことで、各セルの外径とその中心位置を xy 平面の座標で出力することができる。測定場所は各セルの中心を通る平面から 5 mm 程度ずらしている。これは各セルの中心を通る平面が電子ビーム溶接によって歪んでいる可能性を考慮しているためである(図 4.4)。また、各セルに加えてビームチューブ端部のフランジの中心位置も測定することが可能となっている。このときの座標原点を決めるために、ビーム軸上で一直線になるように設計された外径測定用の空洞模型を使用する。この空洞模型について一度測定を行い、その位置を座標原点として再定義する。実際のキャリブレーション用の空洞模型の様子が図 4.3 である。外径測定での情報をもとにチューニングパートにて各セルとフランジの中心が直線になるよう空洞を伸び縮みさせる。



図 4.2 外径測定器の様子：図は外径測定中の様子である。空洞上方にあるバーが空洞の同心円上に移動し、バーに取り付けられたリニアゲージによって各角度でのバーと空洞表面との距離を測定することができる。それにより空洞の各セル、フランジの機械的中心点の位置を測定することが可能になっている。



図 4.3 キャリブレーション用空洞模型：図はキャリブレーション用の空洞模型の実際の写真である。材質はステンレスである。この模型空洞は旋盤による削りだしによって製造されているため、中心軸の精度及び外径の精度は高いと考えられる。

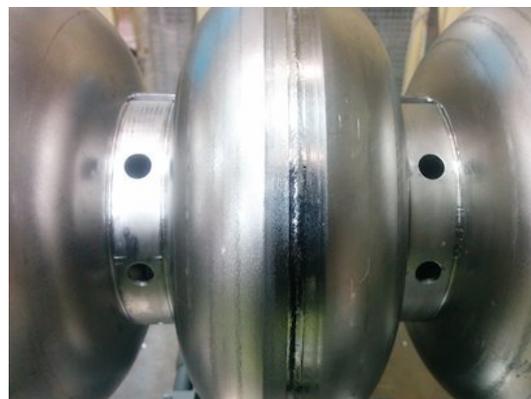


図 4.4 電子ビーム溶接の跡の様子：図の中央付近のざらざらとしている表面が電子ビーム溶接の跡である。幅は約 3 mm で、この表面は凸凹が激しく、外径を測定するには不適である。そのため、溶接跡の左右 5 mm 程の旋盤加工済みの領域を使用して外径を測定する。

4.1.2 周波数・ビーズ測定

外径測定を終えた後、ネットワークアナライザによる TM_{010} モードの周波数測定とビーズ測定を行う。ビーズ測定とは図 4.6 のようにワイヤーに取り付けた金属ビーズを図 4.5 のように空洞のビーム軸上に通すことで空洞内境界条件に摂動を与え、周波数の応答を見ることで内部の電場やそれぞれのセルの周波数の情報を得るという手法である。[9] ここで得た周波数の情報をもとにチューニングパートでは各セルの周波数を目標周波数になるように調整する。

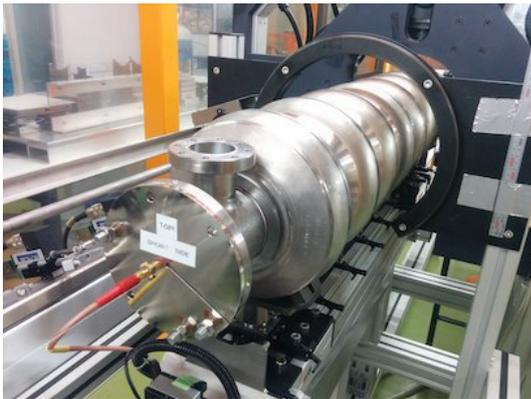


図 4.5 ビーズ測定の様子：実際のビーズ測定の様子である。空洞内にはワイヤーが通っており、金属ビーズがビーム軸上を自由に移動できるようになっている。さらに、空洞の両端のフランジにアンテナ付きの蓋（ワイヤーが通る穴があいている。）を取り付け、それらのアンテナをネットワークアナライザに繋ぐことで空洞内の周波数の応答を見ることができるようになっている。

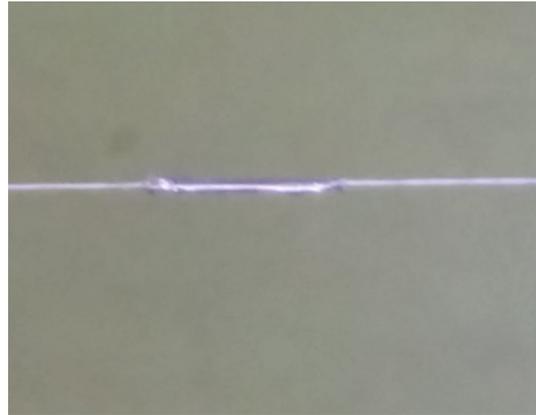


図 4.6 実際の金属ビーズの写真：実際に測定に使用した金属ビーズの写真である。ワイヤーと同軸になるように円筒型のアルミニウムが取り付けられている。

4.1.3 チューニング

チューニングパートでは図 4.8 のような黒いアーム（以下ジョーズと呼ぶ。）を 3 セット用いてセルを 3 方向からアイリス部分で挟み込み、伸び縮みさせることで各セルの周波数と曲がりを調整する。周波数を下げる場合はジョーズをセルに対して内側に動かすことにより、セルをアイリス部分で縮める。それによりセル全体が半径方向に広がるため、周波数上がる。逆に周波数を上げる場合はジョーズを外側に広げる。ここで注意しなければならないのが、周波数を下げる場合はセル全体が縮まりやすいことに対して、周波数を上げる場合はアイリス部分だけが引っ張られるため一部のみが広がりやすいことである。また、一度塑性変形をしてしまうとジョーズでの修正は難しい。よって周波数の上げ下げの回数はできるだけ少なくした方がよい。特に、空洞の曲がりの調整では空洞が曲がるまで周波数を一定にしつつ調整をしなければならないため、空洞の周波数の上げ下げの回数が増えてしまう。今回の測定では空洞の塑性変形のリスクを回避するため、またチューニング前から十分な電場平坦度及び周波数平坦度を得ていたため、チューニングは行わなかった。

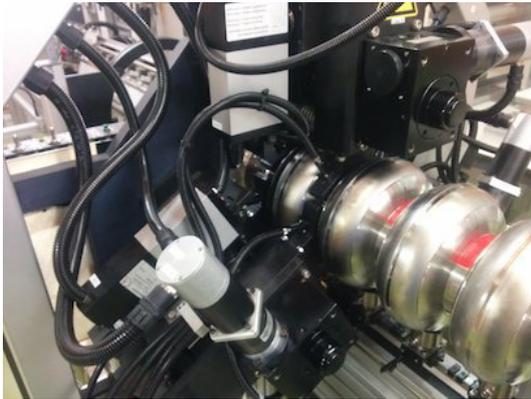


図 4.7 空洞チューニングの様子：チューニングマシンで TESLA 型空洞の 2 セル目をチューニングしている様子である。2 セル目を上、左斜め下、右斜め下の計 3 カ所に付けられている黒い 2 対のアーム (ジョーズ) で前後に挟み込んでいる。この対となったジョーズを前後に動かすことで空洞のセルを変形させる。

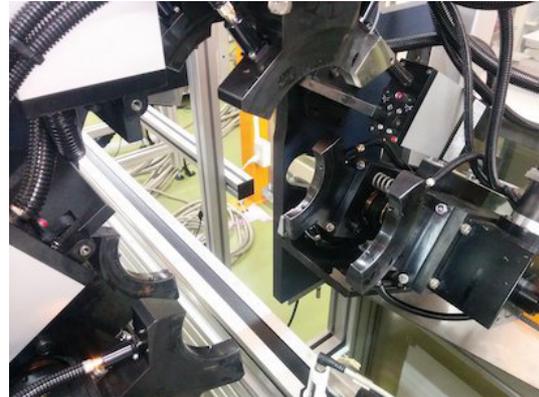


図 4.8 実際のジョーズの写真：チューニングを行うアーム (ジョーズ) の部分の写真である。セルを 3 方向から前後に挟み込めるようになっており、それぞれの対で伸び縮みを調整することで任意の方向に空洞を曲げることができる。

4.2 測定結果

4.2.1 キャリブレーション

空洞の外径測定器では、 x 軸と y 軸は図 4.9 のように取っており、キャリブレーション時の座標原点は、過去のある 1 回のキャリブレーション時の模型空洞の各セルの中心点の位置となっている。そのため、この「ある 1 回のキャリブレーションによって得られた中心点の位置」をそのまま使うのではなく、「模型空洞の各セルの中心点の真の位置」を座標原点とする必要がある。従って、本測定では同じキャリブレーション下で 40 回模型空洞の測定を行い、それをガウス関数でフィットし (あるキャリブレーション下での) 中心点の座標とその誤差を求めた。空洞模型に対する一回の外径測定で得られるデータは図 4.10 のようになっている。



図 4.9 座標系の定義：座標系は図のように取っている。一般には 1 セル目は上流側のセルを指すが、チューニングマシンでは仕様により下流側セルを 1 セルと定義していることに注意する。そのため、他の測定と比較するために、生データ以外の表示では上流側を 1 セルに変換している。



図 4.10 空洞模型の外径を測定したときのデータ例：キャリブレーション用の空洞模型を測定した様子である。画面上の波形がリニアゲージのある角度における伸びの量を表している。それぞれの波形は色によって何番目のセルまたはフランジであるかわかるようになっている。この波形から各セル、フランジにおける機械的中心位置が算出される。このとき、座標原点は過去のとあるキャリブレーション時の模型空洞の各セル、フランジの中心点の位置となっている。このときの xy 座標系での各セル、フランジの座標を示したものが右下の 2 つのグラフである。また、左下のグラフはビーム軸方向に見たときの各中心点の位置をプロットしたものである。この測定は空洞模型のもので、それぞれの中心点は座標原点に密集していることがわかる。

図 4.10 の左上の波形がそれぞれのフランジ、セルにリニアゲージを当てたときの応答で、左下の円が空洞をビーム軸上で見たときのそれぞれの中心位置の分布である。その右側の波形はそれぞれの中心位置を x, y 座標で表示したものである。このときの座標原点は、過去のとあるキャリブレーション時の模型空洞の各セルの中心点の位置となっていることに再度注意する。また、図 4.10 ではチューニングマシンの仕様として、セル番号が下流側から付いていることに注意する。この測定をキャリブレーション用の空洞模型に対して連続で 40 回測定した。これより各フランジと各セルの外径と中心位置のヒストグラムを作成した。この結果をそれぞれガウス分布でフィットし、中心値と誤差を求めた。結果を表 4.1、表 4.2 にまとめる。同様にして、この表でのセルの番号は上流側から順に付けていることに注意する。この測定ではいずれのセルの座標も誤差が数 μm 以内に収まっており、非常に精度よく測定できていることがわかる。

	セル 1	セル 2	セル 3	セル 4	セル 5	セル 6	セル 7	セル 8	セル 9
外径 [mm]	105.176(3)	105.164(2)	105.179(3)	105.165(2)	105.147(5)	105.134(2)	105.123(3)	105.132(3)	105.116(2)
x_{calib} [mm]	-0.016(5)	-0.010(3)	-0.006(5)	0.002(4)	0.001(3)	0.012(9)	0.004(8)	-0.001(2)	0.020(2)
y_{calib} [mm]	-0.002(5)	-0.006(5)	-0.002(12)	-0.007(7)	-0.014(5)	-0.015(5)	-0.014(3)	-0.024(2)	-0.018(3)

表 4.1 空洞模型の各セルでの外径と中心座標：あるキャリブレーション下で空洞模型の測定を 40 回行ったときの各セルでの中心位置の座標を、ヒストグラムのフィッティングから求めた。誤差にはフィッティング誤差をつけている。

	フランジ (上流側)	フランジ (下流側)
外径 [mm]	70.092(3)	69.966(5)
x_{calib} [mm]	-0.027(4)	0.004(8)
y_{calib} [mm]	-0.003(7)	-0.014(3)

表 4.2 空洞模型のフランジでの外径と中心座標：あるキャリブレーション下で空洞模型の測定を 40 回行ったときの各フランジでの中心位置の座標を、ヒストグラムのフィッティングから求めた。誤差にはフィッティング誤差をつけている。

4.2.2 外径測定結果

同様に本実験に用いる TESLA 型空洞 Z142 についても 40 回連続して測定を行った。結果を表 4.3、表 4.4 に示す。これとキャリブレーションの結果から空洞模型のビーム軸を原点とした Z142 空洞の各中心点が求められる。その結果を表 4.5、表 4.6 に示す。また、その結果をグラフに表したものが図 4.11 と図 4.12 である。ここでのセルの番号は上流側のフランジを 0 番とし、下流側のフランジを 10 番とした。図からも明らかであるが Z142 空洞はバナナのような形に曲がっており、両端のフランジに対して内部のセルが x 方向に 1 mm 以上盛り上がっている。しかしながら 1 セルから 9 セルのみを見ると、中心座標は x 方向、 y 方向ともに 0.5 mm 以内の差に収まっていることがわかる。ILC の空洞アライメント許容値が標準偏差 300 μm であることを思い出すと、この Z142 空洞は適切な向きで配置することで十分な加速及びビームの安定性が得られると考えて良い。よって Z142 空洞は ILC 計画の実行を考慮すれば、評価可能な対象であるということがわかる。

	セル 1	セル 2	セル 3	セル 4	セル 5	セル 6	セル 7	セル 8	セル 9
外径 [mm]	105.27(1)	105.545(3)	105.409(4)	105.233(2)	105.286(2)	105.337(3)	105.479(6)	105.496(3)	105.268(3)
x_{z142} [mm]	0.69(1)	0.89(2)	0.998(2)	1.003(3)	0.882(5)	0.88(2)	0.72(1)	0.696(6)	0.552(3)
y_{z142} [mm]	-0.12(2)	-0.33(3)	-0.459(5)	-0.44(1)	-0.531(9)	-0.425(7)	-0.541(9)	-0.539(8)	-0.45(1)

表 4.3 Z142 空洞の各セルでの外径と中心座標：あるキャリブレーション下で Z142 空洞の測定を 40 回行ったときの各セルでの中心位置の座標を、ヒストグラムのフィッティングから求めた。誤差にはフィッティング誤差をつけている。

	フランジ (上流側)	フランジ (下流側)
外径 [mm]	69.980(4)	70.004(3)
x_{z142} [mm]	-1.238(6)	-0.439(3)
y_{z142} [mm]	-0.54(4)	-0.149(5)

表 4.4 Z142 空洞のフランジでの外径と中心座標：あるキャリブレーション下で Z142 空洞の測定を 40 回行ったときの各フランジでの中心位置の座標を、ヒストグラムのフィッティングから求めた。誤差にはフィッティング誤差をつけている。

	セル 1	セル 2	セル 3	セル 4	セル 5	セル 6	セル 7	セル 8	セル 9
x_{z142t} [mm]	0.70(1)	0.90(2)	1.004(5)	1.001(5)	0.881(6)	0.87(2)	0.72(1)	0.697(6)	0.532(4)
y_{z142t} [mm]	-0.12(2)	-0.32(3)	-0.46(1)	-0.43(1)	-0.52(1)	-0.410(9)	-0.527(9)	-0.515(8)	-0.43(1)

表 4.5 Z142 空洞の各セルでの補正後の中心座標：表 4.3 の値を空洞模型の真の中心位置を原点として書き直したものである。誤差は空洞模型の真の中心位置の誤差と、あるキャリブレーション下で測定した Z142 空洞の中心座標の誤差の二乗和平方根を用いた。

	フランジ (上流側)	フランジ (下流側)
x_{z142t} [mm]	-1.211(7)	-0.433(9)
y_{z142t} [mm]	-0.54(4)	-0.135(6)

表 4.6 Z142 空洞のフランジでの補正後の中心座標：表 4.4 の値を空洞模型の真の中心位置を原点として書き直したものである。誤差は空洞模型の真の中心位置の誤差と、あるキャリブレーション下で測定した Z142 空洞の中心座標の誤差の二乗和平方根を用いた。

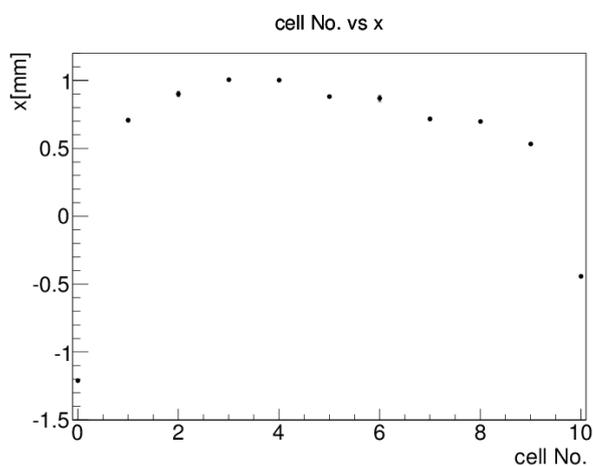


図 4.11 Z142 空洞の各セル、フランジの補正後の中心座標の x の値 : Z142 空洞の各セル、フランジの中心座標の x の値を縦軸に、セル番号を横軸にプロットしたものである。セル番号 0 番は上流側フランジ、セル番号 10 番は下流側フランジである。このときの座標原点は、空洞模型の真の中心位置である。誤差は表 4.5、表 4.6 のものをつけている。

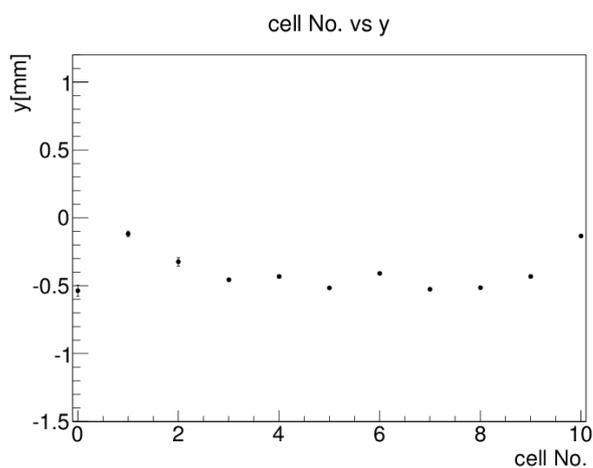


図 4.12 Z142 空洞の各セル、フランジの補正後の中心座標の y の値 : Z142 空洞の各セル、フランジの中心座標の y の値を縦軸に、セル番号を横軸にプロットしたものである。セル番号 0 番は上流側フランジ、セル番号 10 番は下流側フランジである。このときの座標原点は、空洞模型の真の中心位置である。誤差は表 4.5、表 4.6 のものをつけている。

4.2.3 周波数・ピーズ測定測定結果

測定の結果、加速モードは 1297.423 MHz の周波数を持ち、電場平坦度は 98% であることがわかった。この空洞はフランジ部分では大きく曲がっているが、セルの部分では軸のズレは少なく、本実験の測定をするには十分な性能である。

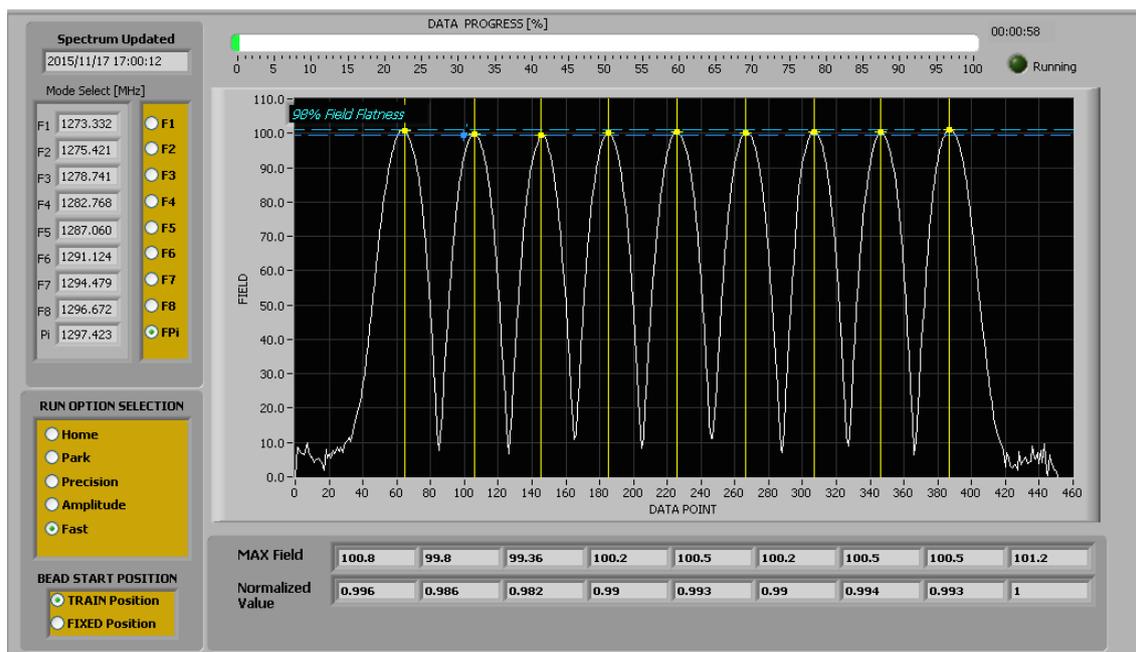


図 4.13 電場平坦度の測定結果：チューニングマシンによる周波数・ピーズ測定の結果である。左側の縦に並んだ数字は TM_{010} モードの周波数を表しており、上から順に $1/9\pi, 2/9\pi, \dots, \pi$ モードの周波数である。中央のグラフは各セルにおける加速電場の強さを表しており、98% の電場平坦度を達成している。

第 5 章

測定

本章では測定の構成とそれぞれの構成要素についての詳細な説明を行う。

5.1 構成

測定の手順の概要は以下の通りである。

1. ワイヤーを空洞内に通し、基準点にワイヤーを合わせる
2. ワイヤー上にパルスを流し、モードを励起する
3. HOM カップラーからこの応答を取得し、信号増幅の後オシロスコープに取り込む
4. 得られた波形をフーリエ変換し、励起された $TE_{111-7-1,2}$ の信号振幅を取得する
5. 空洞を移動し、ワイヤーの位置を相対的に動かす
6. 2~5 を繰り返す
7. ワイヤーの位置と励起された $TE_{111-7-1,2}$ の信号振幅のグラフを得る
8. 2つのモードから極小励起の軸を求め、その交点から電気的中心軸を求める

本測定での構成は以下の 2 点に大きく分かれる。

(i) ワイヤーアライメントのための構成

ワイヤーを如何にして精度よく空洞の基準点に合わせるのか、そして空洞を如何にして精度良くワイヤーに対して移動させるのかに焦点を置く。

(ii) 信号測定のための構成

空洞の中で励起された目的のモードを如何にして精度良く測定するのかに焦点を置く。

5.1.1 ワイヤーアライメントのための構成

ワイヤーアライメントのための構成を以下の 5 項目に分ける。

- 空洞の基準点について
- 基準点へのワイヤーの位置合わせについて
- 空洞の移動について
- 空洞の基準点の評価について
- アライメント時の誤差について

空洞の基準点について

本測定での座標原点となる空洞の基準点とその座標系について述べる。

Z142 空洞には図 5.1 のように両端のフランジ部分にレーザートラッカー用の球形ミラーを置くためのすり鉢状の穴 (以下、穴と呼ぶ。) が掘ってある。穴の半径は表面上で 3.6 mm で奥に行くにつれ半径は小さくなり、深さ 2.8 mm で半径 0.6 mm となる。穴の中心部には半径 50 μm 程度の目印が存在する。この穴は空洞のアライメントのためにあらかじめ掘られているもので、図 5.2 のようにインプットカップラーを上側にしたときに上流側から見て右と下、左斜め下についている (以下、それぞれ穴 1、穴 2、穴 3 と呼ぶ。)。レーザートラッカーを用いれば、これらの穴の座標を知ることができるため、加速空洞をクライオモジュールにインストールする前にそれぞれの空洞の位置を調整し、ビーム軸が直線になるよう調整することができるようになっている。つまり空洞のアライメントにおいての空洞の機械的な中心軸はこのフランジの穴によって決定している。これは必ずしもフランジの真の中心に一致するとは限らないことに注意する。

本測定ではこれを使用して、ワイヤーの原点を決定する。まず、この空洞をインプットカップラーが鉛直上方にくるように図 5.2 と同様の向きで配置する。このとき、空洞のフランジ部分には水準器を置く場所があり、ここで水平を取る。水準器は以下のものを用いた。

大菱計器製作所 (株) 製 精密フィックスレベル 524A

感度 0.1 mm/m , 質量 200 g , 寸法 100×20×24

空洞の水平が取れているとする。穴 1 から水平方向に移動した位置かつ穴 2 から鉛直上方に移動した位置である点 (図 5.2 の穴 1 と穴 2 に伸びている黒い矢印が交差する点) をワイヤーの座標原点 (以下、この点をワイヤーの座標原点 (x_{w0}, y_{w0}) と呼ぶ。) と定義する。当然ながら、理想的にフランジが作成されていて、理想的にこれらの穴が掘られている場合、このワイヤーの座標原点はフランジの真の中心位置に一致する。また、実際にこのワイヤーの座標原点にワイヤーを合わせる場合は、何らかの方法で水平方向からフランジの穴 1 を、鉛直下方からフランジの穴 2 を観測し、それぞれがワイヤーの直線上に来るように空洞の位置を調整することで、ワイヤーをその原点に合わせることができる。

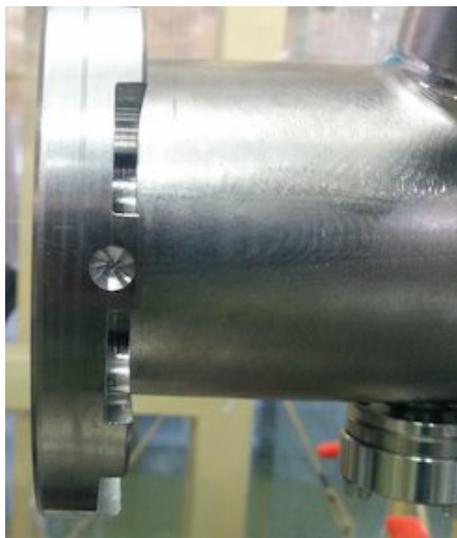


図 5.1 空洞のフランジに空けられた穴の写真

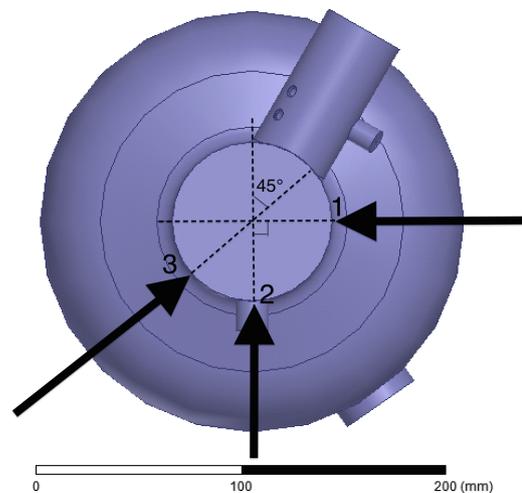


図 5.2 フランジに空けられた穴の位置の概念図

基準点へのワイヤーの位置合わせについて

以上でワイヤー原点の定義をした。ワイヤーをこの原点に合わせるための構成概要を図 5.3 に、実際の様子を図 5.4 に示す。座標軸の向きは空洞の外径測定の場合と同じになるように取った。ワイヤーの y 座標を原点に合わせるにはフランジの下側を鉛直下方から鉛直上方に向かって視なければならないため、水平望遠鏡で得た水平を直角プリズムで跳ね上げることで鉛直下方からの視点を実現させた。

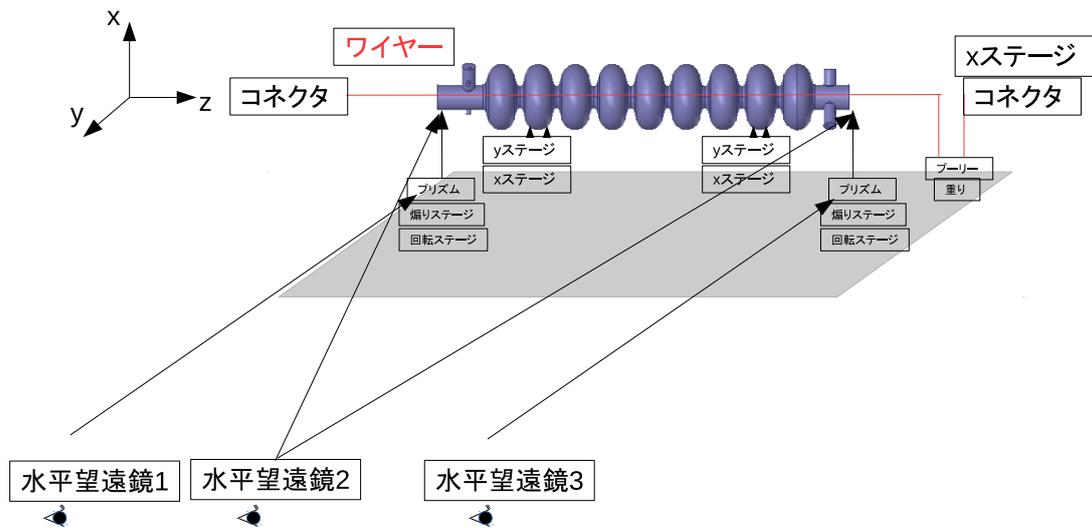


図 5.3 ワイヤーアライメントのための構成概要図



図 5.4 測定系全体の構成

図 5.3 の灰色の台は光学定盤となっており、それぞれのステージを固定することができるようになっている。また、この光学定盤は可動式であり x, y 方向のいずれにも動かすことができる。

ワイヤーを原点に合わせるための手順は以下の通りである。

(1) 空洞の設置

空洞を支持するための xy ステージを光学定盤の長辺に平行になるように設置する。その後空洞の 2 セルと 8 セルで支持するように空洞を置く。

(2) ワイヤーの設置

ワイヤーを空洞内に通し、ワイヤーが光学定盤の長辺に平行になるように設置する。その後、ワイヤーが水平になるように水平望遠鏡 2 で確認しつつ図の右側のステージで調整する。

(3) 直角プリズムの設置

直角プリズムは水平に設置しなければ、望遠鏡からの視線が鉛直方向に反射されない。よってプリズムの下には煽り調整ステージを実装しており、プリズムを水平に置く事を可能にしている。また、 θ ステージを用いてプリズムをワイヤーに対して平行に設置することで、望遠鏡のレンズ上でのワイヤーが水平になるように視ることができる。以上 2 つのステージを調整する。

(4) 粗調整

望遠鏡 2 のレンズ上でワイヤーとフランジの穴 1 の中心位置がおおよそ一致するように光学定盤を x 方向に調整する。その後、望遠鏡 1 または 3 でワイヤーとフランジの穴 2 の中心位置がおおよそ一致するように光学定盤を y 方向に調整する。

(5) 微調整

望遠鏡 2 のレンズ上でワイヤーとフランジの穴 1 の中心位置がおおよそ一致するように空洞を x ステージを用いて x 方向に調整する。このとき、2 セル側と 8 セル側で交互に調整し、上流側と下流側のワイヤーとフランジの穴 1 が両方とも一致するまで繰り返す。同様にして望遠鏡 1 と望遠鏡 3 で確認しつつワイヤーとフランジの穴 2 の中心位置がおおよそ一致するように空洞を y ステージで y 方向に調整する。

以上の手順によりワイヤーを原点に合わせるができる。

構成要素についての詳細を以下に記す。【】内の名称は図 5.3 に揃えてある。

【ワイヤー】ニラコ(株)製

材質 タングステン+金メッキ , 太さ $70 \mu m$

【水平望遠鏡 1】トプコン(株)製 一級水準儀 TS-E1

倍率 42 倍 , 有効径 50 mm , 主気泡管感度 $10''/2 \text{ mm}$

【水平望遠鏡 2】同上

【水平望遠鏡 3】ソキア・トプコン(株)製 一級水準儀 PL1

倍率 42 倍 , 有効径 50 mm , 主気泡管感度 $10''/2 \text{ mm}$

【プリズム】中央精機(株)製 直角プリズムミラー(反射強化アルミコート)RAMR-50EA

角度交差 $1^\circ/30$, 基板面精度 $1/8 \lambda$

【煽りステージ】中央精機(株)製 二軸傾斜ステージ TD-104

ステージ面 $125\text{mm} \times 125\text{mm}$, 稼働域 $\pm 2^\circ$

【回転ステージ】中央精機(株)製 透過型微動回転ステージ $\phi 150$ (標準型) RS - 211T

ステージ面 $\phi 125\text{mm}$, 感度 $1^\circ/300$

【x ステージ】シグマ光機(株) 型番不明

目盛り $10\ \mu\text{m}$, ツマミ一回転 $500\ \mu\text{m}$

【y ステージ】シグマ光機(株) 型番不明

目盛り $10\ \mu\text{m}$, ツマミ一回転 $500\ \mu\text{m}$

【x ステージ(ワイヤー用)】シグマ光機(株) 型番不明

目盛り $10\ \mu\text{m}$, ツマミ一回転 $500\ \mu\text{m}$

さらに、プリズムと傾斜ステージを固定するためにアルミプレートで台座を作成した。このアルミプレートは上下面をサーフェス研磨で仕上げており、板厚平行度は 100mm に対して最大値で 0.03mm 、平面度は同じく 100mm に対して最大値で 0.06mm となっているため、このアルミプレート上は十分に平面度は良く、面の粗さによるプリズムの傾きなどはないと考える。また、このアルミ台座の上に水準器を置きながら煽りステージで水平を確保する。使用した水準器は以下のものである。

新潟理研測範(株)製 精密平型水準器

感度 0.05mm/m , 質量 1kg , 寸法 $150 \times 40 \times 45$

空洞の移動について

ワイヤーを原点に置くことができるようになったので、次に空洞の移動によるワイヤーの移動を考える。粗調整を除く空洞の移動に関しては全て空洞を2セルと8セルで支持している xy ステージにて行う。このステージの移動量は xy 方向それぞれリニアゲージにより測定している。使用したリニアゲージの詳細を以下に記す。

ミットヨ(株)製 リニアゲージ 542-122

測定範囲 25mm , 最小表示量 $1\ \mu\text{m}$, 指示精度 $1.5\ \mu\text{m}$

また、空洞は2セルと8セルの二カ所で指示し、それぞれのステージで動かす。このときの空洞の移動量を

「空洞を2セルと8セルで支持している XY ステージの移動量をそれぞれリニアゲージで測定し、その読み値がそれぞれ目標値の $\pm 3\ \mu\text{m}$ 以下になるまでステージを調整する。その後、 X 方向、 Y 方向それぞれについて2セル側と8セル側のリニアゲージの読み値を平均したもの」

と定義した。

空洞原点の評価

以上のようにしてワイヤーを原点に設置し、移動することが可能になった。しかし、機械的中心と電気的中心を比較するには、ワイヤーの座標原点からフランジの真の中心までの座標が必要である。なぜなら、外径測定で得た機械的中心位置のデータはそれぞれのフランジ、セルの真の中心を示しているのに対し、ワイヤーの位置については座標原点(穴の位置精度などによって決まり、真の中心点と一致するとは限らない。)からの移動量を示しているからである。従って上記の方法で設置したワイヤーがフランジの内部のどの位置にあるのかを以下の方法で測定した。

まず、図 5.5 のようなフランジにネジで取り付け可能で、半径がフランジのものと同じ円盤を用意した。これはワイヤーが空洞内部を通過するように張られていても脱着が可能ないように、中心部にワイヤーが通過するための穴があけられており、さらに中心から外周部まで切れ目が入れている。これに図 5.6 のようにセッティングメジャーを直角になるように貼付ける。このとき、水平軸が水平望遠鏡の張る水平を一致するようにメジャーを貼らなければならない。そのため、この円盤を空洞のフランジに取り付けた状態でローテーティングレーザー(水平を自動で出すことのできる回転式レーザー)を当て、レーザーに平行になるようにメジャーを貼った。この水平軸のメジャーに対して直角になるように鉛直軸のメジャーを貼った。これにより円盤上での座標を定義することができた。

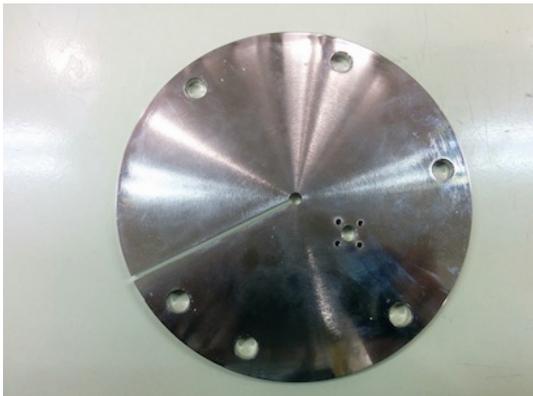


図 5.5 フランジに取り付ける円盤の写真



図 5.6 円盤に貼付けたメジャーの様子

この円盤を用いてワイヤーがフランジのどの位置を通過しているかを測定した。まず、この円盤を既にワイヤーの通っている空洞のフランジに対して同心円上になるように取り付ける。取り付けには図 5.7 の皿ネジとテーパ型ナットを用いており、これによりネジでの取り付けによる軸ズレを防いでいる。取り付けの様子は図 5.8 に示す。その後、図 5.9 のように円盤上で方眼紙をワイヤーに当てた状態で写真を撮る。このとき、方眼紙がワイヤーに接した状態かどうかを判別するために、顕微鏡を使用した。撮影の様子を図 5.10 に示す。



図 5.7 固定に使用した皿ネジとテーパ型ナット



図 5.8 円盤のフランジへの取り付けの様子

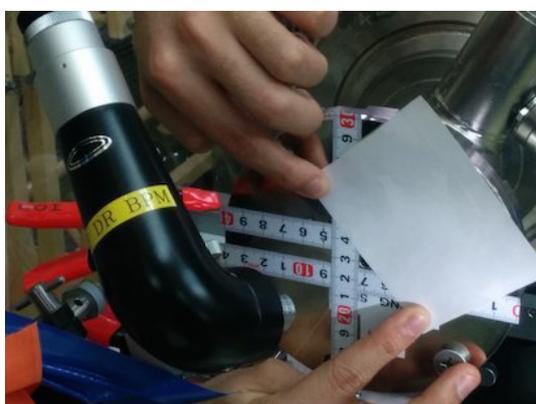


図 5.9 円盤上でのワイヤーの位置の撮影（上流側）



図 5.10 ワイヤー位置の撮影の様子（上流側）

撮影された写真から以下のようにして、2DCAD 上でワイヤーの位置のメジャーの読み値 (x_{m0}, y_{m0}) を得た。

(1) 写真上での座標系を定義

水平軸、鉛直軸それぞれのメジャーの底辺に一致するように直線を引いた。これは図 5.11 及び図 5.12 での赤線に対応している。これが写真上で定義される座標軸である。撮影はほぼ正面から行ったため、これらの直線は直交していた。

(2) ワイヤーの位置の測定

ワイヤーと方眼紙の交点から、(1) で張った座標軸に対してそれぞれ垂直に直線を引く。図 5.11 及び図 5.12 での青線に対応している。これと赤線との交点がワイヤーの位置のメジャーでの読み値を示している。この交点と一番近い目盛りの距離を写真上の長さで測定した。尚、目盛りには太さがあるため、その中心線が目盛りの示す値を持つものとして長さを測定した。

(3) 写真上での長さ、実際の長さの変換

写真上での長さが実際にどれくらいの長さになるかを測定する必要がある。図 5.12 のように青線から最も近い 2 つの目盛り間を実際の 1 mm としたとき、この長さを写真上の長さで測定した。この場合も目盛りの中心線同士の距離を実際の 1 mm としていることに注意する。これによって写真上での長さを実際の長さに変換

することができる。ワイヤーと一番近い目盛りの写真上での距離は(2)でわかっているのので、これを実際の長さに変換してやれば、ワイヤーの位置のメジャーでの読み値を知ることが出来る。

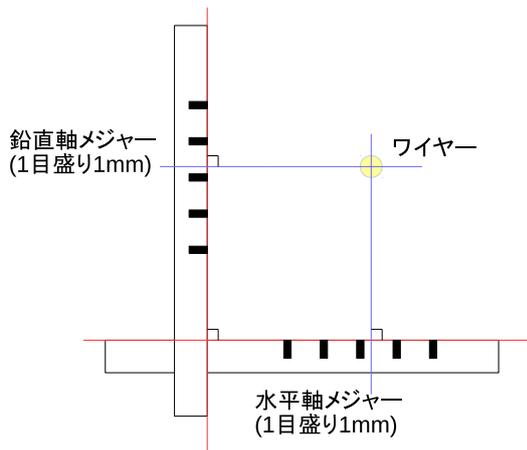


図 5.11 写真上での解析の概念図 (上流側)

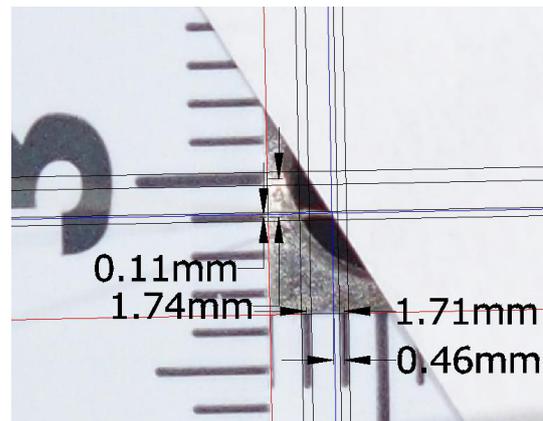


図 5.12 写真上での解析の結果 (上流側)

結果は以下ようになった。ただし、上流側では撮影の都合上、円盤を 180° 回転させて取り付けて測定していることに注意する。また、誤差はこの測定を独立に 10 回行ったときの標準偏差を使用している。

	$x_{m0}[mm]$	$y_{m0}[mm]$
上流側	229.06 ± 0.08	71.27 ± 0.08
下流側	229.07 ± 0.08	69.65 ± 0.08

表 5.1 円盤に貼付けたメジャーでのワイヤーの位置の読み値

次に、円盤の中心の読み値 (x_{mc}, y_{mc}) を求める必要がある。円盤の淵とメジャーの交点をそれぞれ図 5.13 のように A、B、C、D 点とすると、円盤の中心は線分 AB 及び線分 CD の垂直二等分線上にあるから、中心点の読み値は x 座標は A 点と B 点のメジャーでの読み値の平均値、y 座標は C 点と D 点の読み値の平均値で与えられる。それぞれの読み値は顕微鏡越しに写真を撮ることで求めた。図 5.14 にその様子を示す。淵の座標の求め方は上記のワイヤーの位置の求め方と同様である。結果は以下の通りである。誤差はこの測定を 10 回独立に行ったときの標準偏差をつけている。

$$(x_{mc}, y_{mc}) = (230.05 \pm 0.03mm, 69.98 \pm 0.03mm)$$

以上から、ワイヤー原点のフランジ中心からのズレを求めることができる。上流側では円盤を 180° 回転していたことに注意をして、このズレ ($\Delta x, \Delta y$) を求めると表 5.2 のようになる。ただし $\Delta x, \Delta y$ の正負は図 5.3 と同じ向きに取っている。

これによりワイヤーの原点と機械的中心との関係が得られて、外径測定で得たデータにワイヤーを原点に置いた場合のワイヤーの通る軌跡をプロットしたものが図 5.15、図 5.16 である。本測定ではこのワイヤーの傾きを保ったまま、空

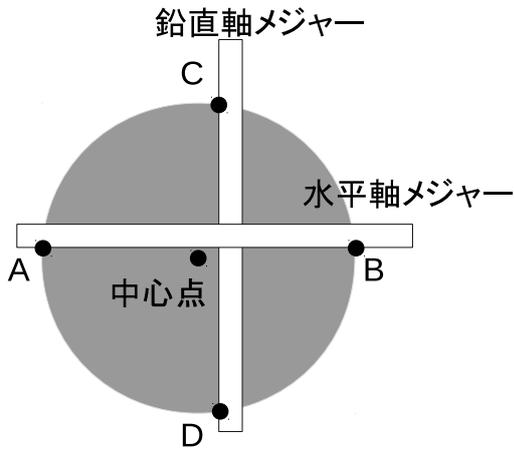


図 5.13 円盤の中心点とメジャーの関係の概念図

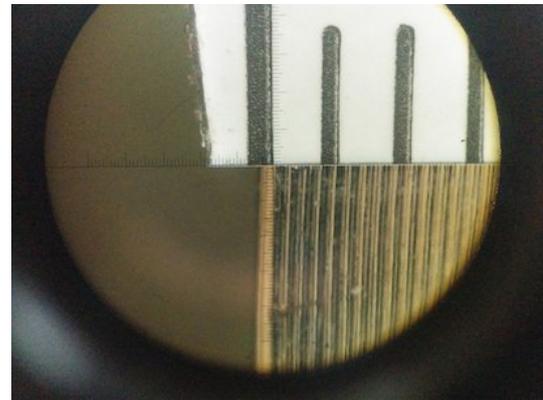


図 5.14 円盤の淵 (A 点) を顕微鏡越しに撮影した様子

	$\Delta x [mm]$	$\Delta y [mm]$
上流側	-0.99 ± 0.09	-1.29 ± 0.09
下流側	0.98 ± 0.09	-0.03 ± 0.09

表 5.2 ワイヤー原点のフランジ中心からのズレ

洞を移動する。そのため、ワイヤーは常に空洞のセル部分に対して傾いた状態であることに注意する。さらに、得られた電気的中心軸というのはワイヤーのこの傾きの状態での電気的中心軸の位置であって、ワイヤーの傾きが変化すればその位置も変化するはずである。

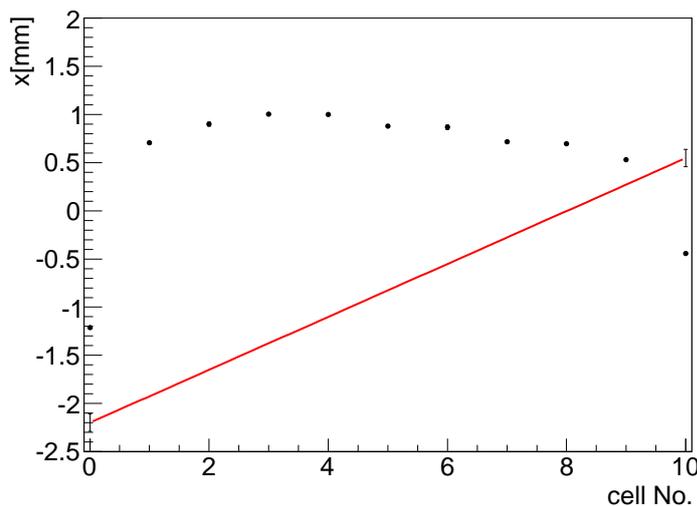


図 5.15 ワイヤーの座標原点の位置と機械的中心の関係 (x 座標) : 赤線は空洞内を通るワイヤーを示している。このグラフに置ける $x = 0$ となる点は、空洞模型の真の中心位置を指していることに注意する。

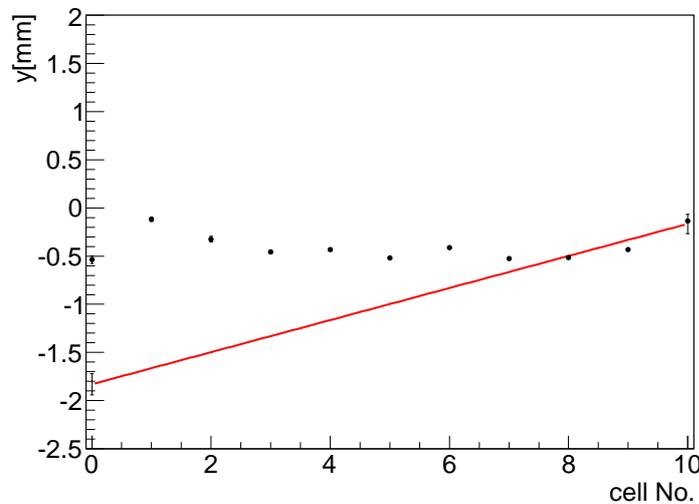


図 5.16 ワイヤーの座標原点の位置と機械的中心の関係 (y 座標) : 赤線は空洞内を通るワイヤーを示している。このグラフに置ける $y = 0$ となる点は、空洞模型の真の中心位置を指していることに注意する。

アライメント時の誤差について

ワイヤーを座標原点にアライメントする際の誤差として以下の 3 点を考える。

- 空洞の回転による誤差
- 水平望遠鏡による視線のずれによる誤差
- ワイヤーと穴の位置合わせの際の誤差
- ワイヤーのたるみによる誤差

空洞の回転による誤差

まず、空洞の水平がとれていない場合の誤差 ($\Delta x_{w0-r}, \Delta y_{w0-r}$) を考える。

空洞の水平が取れておらず角度 θ_r だけ回転している場合を考える。このとき、回転の影響は図 5.17 で $\theta_1 = \theta_2 = \theta_r$ として考えれば良い。空洞の水平出しに用いた水準器の主気泡管の指示精度は明記がないため、JIS 規格の B 級 3 種水準器の半分の精度 (1 目盛り)[12] とすると、感度は 0.1 mm/m であるから空洞は 0.1 mrad の精度で水平であると言える。よってこのときの取りうる θ_r は $\theta_r < 0.1$ mrad であることがわかる。これより空洞の水平がとれていない場合の誤差が求められて以下ようになる。

	フランジ (上流側)	フランジ (下流側)
$ \Delta x_{w0-r} $	0.007 mm	0.007 mm
$ \Delta y_{w0-r} $	0.007 mm	0.007 mm

表 5.3 空洞の水準の誤差による座標原点の位置の誤差

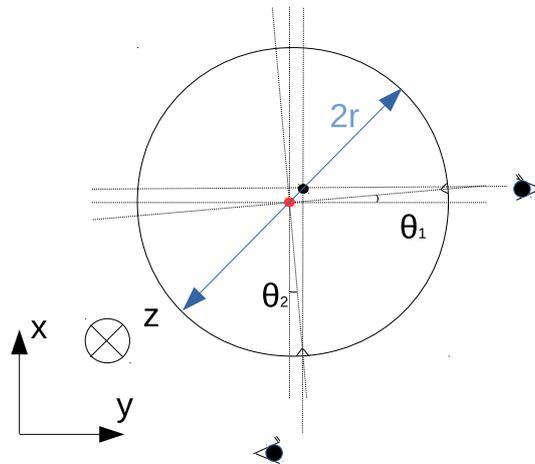


図 5.17 空洞の水平誤差により生じる座標原点への影響：空洞の回転により本来ならば図の赤い点に設置せれるはずのワイヤーが図の黒い点に設置されてしまう。このときのずれの大きさは $|r \sin \theta_r|$ と書ける。

水平望遠鏡による視線のずれによる誤差

空洞が回転した場合と同様にして水平望遠鏡の視線の誤差を図 5.18 のように考える。まずは、空洞の回転やフランジの穴の位置が正しい場合を考える。水平からの視線が水平から θ_{e1} 、鉛直下方からの視線が θ_{e2} ずれているとし、 $\theta_{e1} \ll 1$ 、 $\theta_{e2} \ll 1$ とすれば、座標原点の誤差 (Δx_{w0-e} , Δy_{w0-e}) は

$$\Delta x_{w0-e} = r \tan \theta_{e1} \tag{5.1}$$

$$\Delta y_{w0-e} = r \tan \theta_{e2} \tag{5.2}$$

となることがわかる。使用した水平望遠鏡の主気泡管の感度は $10''/2 \text{ mm}$ であるから、その誤差は $50 \mu\text{rad}$ 程度であるので、 $\theta_{e1} \ll 1$ を満たしている。一方、 θ_{e2} に関しては、プリズムの傾きの誤差も加わることに注意する。プリズム設置時に使用した水準器の感度は 0.05 mm/m で、これは JIS 規定に沿っているので精度として 0.5 目盛りを許容すると θ_{e2} には 0.025 mrad の誤差がつく。これに対してプリズムの角度交差は $1^\circ/30 = 0.58 \text{ mrad}$ であるから、水平望遠鏡の水平精度、台の水平精度、プリズムの角度精度の二乗和の平方根を考えると、 $\theta_{e2} = 0.58 \text{ mrad}$ であり、 $\theta_{e2} \ll 1$ を満たしている。よって式 (5.1)(5.2) は正しいと判断できる。

次に、空洞の回転 θ_r やフランジの位置精度 θ_1, θ_2 、フランジのねじれ θ_t を考慮する。このときも $\theta_r, \theta_1, \theta_2, \theta_t \ll 1$ の場合は同じように近似が可能で式 (5.1)(5.2) は成立する。

以上より Δx_{w0-e} , Δy_{w0-e} が見積もられるので、結果をまとめると以下の表ようになる。

	フランジ (上流側)	フランジ (下流側)
$ \Delta x_{w0-e} $	$3.4 \mu\text{m}$	$3.4 \mu\text{m}$
$ \Delta y_{w0-e} $	$41 \mu\text{m}$	$41 \mu\text{m}$

表 5.4 視線の水平、鉛直方向からのずれによる座標原点の位置の誤差

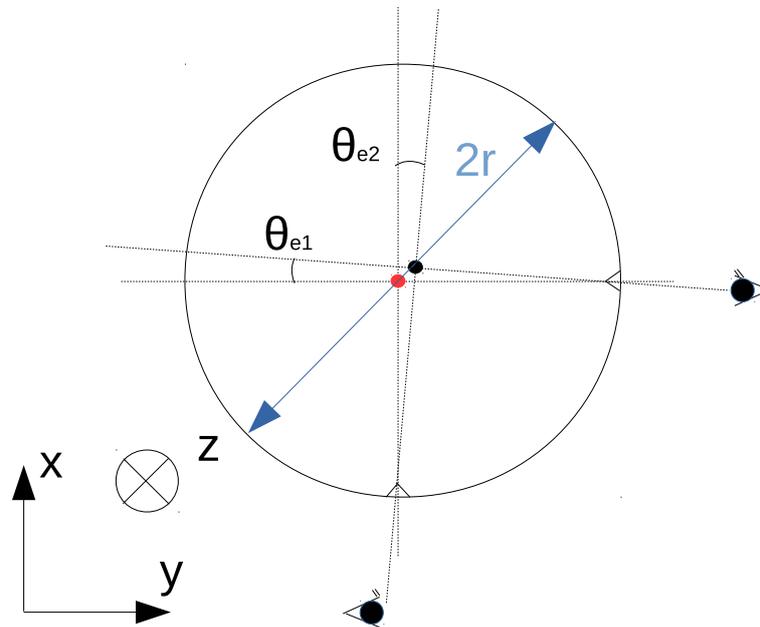


図 5.18 視線がずれたときの座標原点への影響：視線がずれてしまった場合、その角度のずれによって本来図の赤い点に設置されるはずであったワイヤーが図の黒い点に設置されてしまう。

ワイヤーと穴の位置合わせの際の誤差

さらに、これに加えて水平望遠鏡でワイヤーと穴 1、穴 2 の中心位置を合わせる際の精度についても考慮する必要がある。ワイヤーと穴の中心位置を合わせる際には、まずワイヤーに水平望遠鏡の基準線を合わせ、その後その基準線に穴の中心位置を合わせる。そのため、ワイヤーと基準線を合わせる精度と穴の中心位置と基準線を合わせる精度について考える必要がある。まず、ワイヤーに水平望遠鏡の基準線を合わせる精度は $17 \mu\text{m}$ である。これはワイヤーを基準線に 20 回合わせた場合の基準線の位置の標準偏差を用いた。同様に、水平望遠鏡の基準線を穴の中心位置に合わせる精度は $10 \mu\text{m}$ である。よってワイヤーと穴の中心位置を一致させる精度は $20 \mu\text{m}$ であることがわかる。

ワイヤーのたるみによる誤差

本実験ではワイヤーにプリーをかけ、そこに重り 740g を加えている。このときのワイヤーたるみは 6 セルで最大となり、ワイヤーの端点からおよそ $100 \mu\text{m}$ 程度たわんでいる。空洞のフランジ部分ではおよそ $70 \mu\text{m}$ たわんでいるので、誤差として $\pm 30 \mu\text{m}$ をつける。

空洞の移動に関する誤差

空洞の移動についてはリニアゲージで測定している。このリニアゲージの読み取り精度が $1.5 \mu\text{m}$ で、空洞の移動時にはそれぞれのステージで $3 \mu\text{m}$ の誤差を許しているので、2 セル側または 8 セル側のうちの一方の誤差の最大値は $\sqrt{3^2 + 1.5^2} \mu\text{m} = 3.4 \mu\text{m}$ となる。移動量は両側のセルでの平均値なので、空洞の移動の誤差の最大値は $2.4 \mu\text{m}$ となる。

次に、光学定盤の傾きによる移動方向の回転を考える。ワイヤーの座標原点からのワイヤーの正味の移動量とリニアゲージの読み値はこの回転によって一致しなくなる。空洞の移動量がリニアゲージの読み値で (dx, dy) で、 y 軸方向の傾きを θ_y 、 z 軸方向の傾きを θ_z とする。ただし θ_y は x 軸から y 軸へ向かう向きにとったものとする。このとき、正

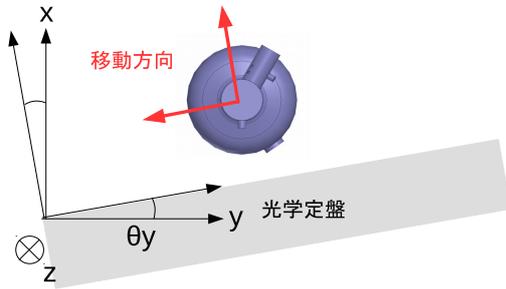


図 5.19 光学定盤の y 軸の傾き方向の定義の図

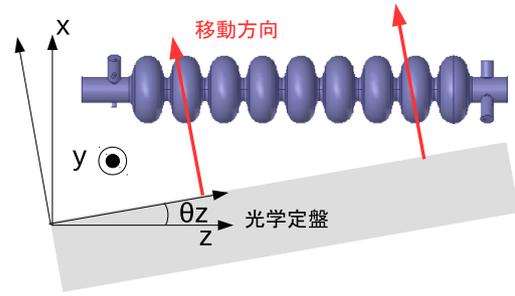


図 5.20 光学定盤の z 軸の傾き方向の定義の図

味の移動量は

$$(dx_{\text{true}}, dy_{\text{true}}) = ((dx \cos \theta_y - dy \sin \theta_y) \cos \theta_z, dy \cos \theta_y + dx \sin \theta_y) \quad (5.3)$$

となる。また、リニアゲージが XY ステージの移動に対して垂直でない場合、その角度のずれ θ_g にたいして読み値は真の移動量 dl に対して $dl \cos \theta_g$ となる。よってこれも考慮すると

$$(dx_{\text{true}}, dy_{\text{true}}) = ((dx \cos \theta_g \cos \theta_y - dy \cos \theta_g \sin \theta_y) \cos \theta_z, dy \cos \theta_g \cos \theta_y + dx \cos \theta_g \sin \theta_y) \quad (5.4)$$

となる。光学定盤の水平を水準器で測定したところ $|\theta_y| < 0.5 \text{ mrad}, |\theta_z| < 0.5 \text{ mrad}$ で、リニアゲージの設置精度は $|\theta_g| < 17 \text{ mrad} (1^\circ)$ であるから、本測定での最大移動量 (2.7 mm, 1.2 mm) に対して誤差は最大で (1.0 μm , 1.2 μm) となる。

5.1.2 信号測定のための構成

次に、信号測定に関する構成について述べる。図 5.21 がその構成の概要図である。

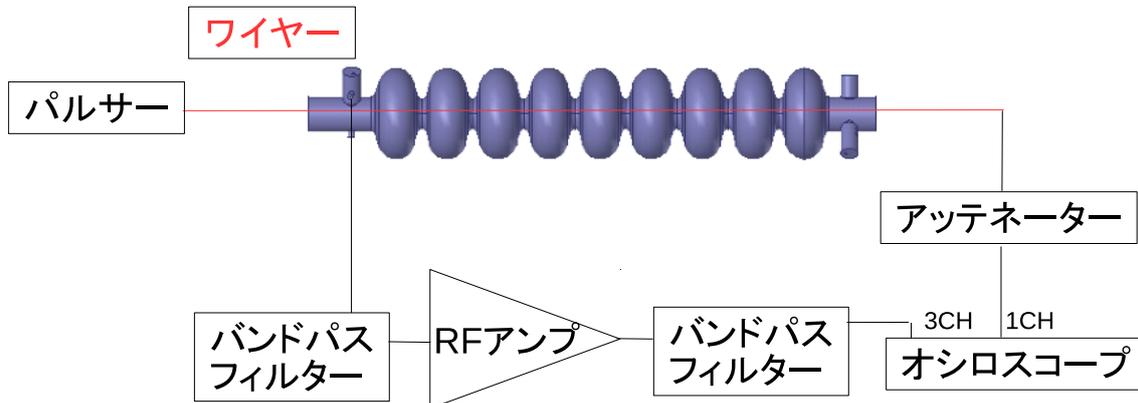


図 5.21 信号測定のための構成概要図

パルサーから出したパルスがワイヤーを伝って空腔内で電場を励起し、アッテネーターを通りオシロスコープの1CHにトリガーとして入力される。空腔の応答電場は上流側の HOM カップラーから出てバンドパスフィルター (BPF) を通り、RF アンプで増幅され、再び BPF に入り、オシロスコープの3CHに入力される。バンドパスフィルターでは今回の測定に用いる TE_{111} モード以外の周波数帯を強く減衰し、信号部分のみを RF アンプで増幅する。その後もう一度 BPF でノイズを落とす。

以下で構成要素の詳細について述べる。【】内の名前は図 5.21 に揃えてある。

【パルサー】高エネルギー加速器研究機構製 Fast Grid Pulser 500 ps width, ~ 500 V

【アッテネーター】HUBER+SUHNER 社製 Coaxial Attenuators type 6820.01.A(20 dB)

【アッテネーター】HUBER+SUHNER 社製 Coaxial Attenuators type 6906.01.A(6 dB)

【バンドパスフィルター】TRILITHIC 社製 Band Pass Filter 23042 5CC1695/210-3-KK

【RF アンプ】Mini-Circuits 社製 Coaxial Low Noise Amplifier ZX60-3011+

帯域 400 ~ 3000MHz , RF 入力の最大パワー +15 dBm

【オシロスコープ】Agilent Technologies 社製 Oscilloscope DSO9404A

帯域 ~4 GHz , CH 数 4CH , サンプルングレート 20 GHzSa/s

以下でパルサー、BPF、RF アンプの特性についてまとめる。

パルサーの出力波形

パルサーの出力する波形を図 5.22 のセットアップで測定した。非常に強力なパルサーのため、オシロスコープの保護のために 44 dB のアッテネーターを入れていることに注意する。結果は図 5.23 である。44 dB 減衰しているので、元のピーク電圧は

$$V \simeq -4.8 \text{ V} \times 10^{\frac{44}{20}} \simeq -760 \text{ V}$$

となる。また、このパルスの標準偏差はおよそ 200 ps であることがわかる。式 (1.50) のビームによる励起の場合と同様に考えると、このパルスの標準偏差 σ_p は短ければ短い程、HOM を励起することができる。本測定では HOM を励起することが目的であるので、このように σ_p の小さな物を用意した。また、入力電圧が高い程、励起されるモードの電圧も大きくなるのでピーク値の大きなパルサーを用意した。

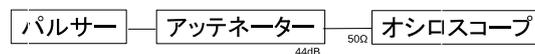


図 5.22 入力パルス波形の測定セットアップ：パルサーからのパルスを計 44 dB のアッテネーターで減衰し、50 Ω のオシロスコープで波形を取得した。

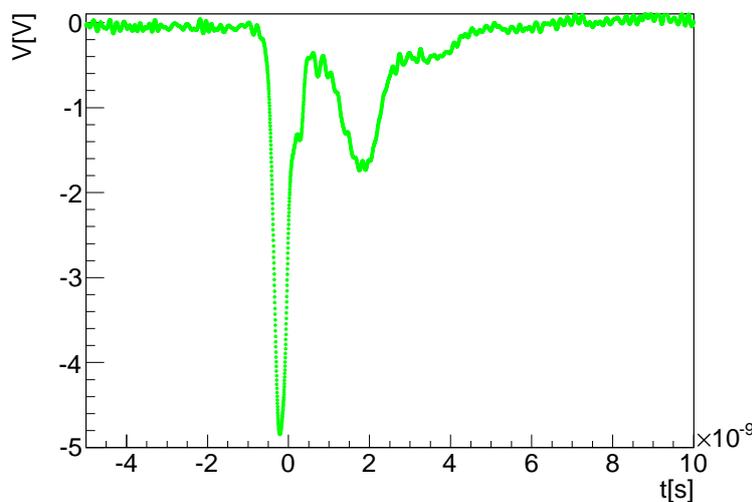


図 5.23 入力パルスの波形：パルサーから出力された電圧を 44 dB のアッテネーターを通してオシロスコープで観察した。ピーク電圧は -4.8 V、パルスの標準偏差 σ_p はおよそ 200ps であることがわかった。

BPF の周波数特性とパワー特性

BPF には周波数特性とパワー特性があるためそれらについても測定をした。セットアップは図 5.24 である。ネットワークアナライザーで入力パワーを 0 dBm から 20 dBm まで 2 dBm 刻みで S_{12} の周波数スペクトルを測定した。ただし、 S_{12} とは CH2 から出力し、CH1 に入力されるパワーの比を表している。この測定時の周波数域は 1 GHz から 2.4 GHz である。入力パワー 20 dBm での周波数スペクトルを図 5.25 に示す。ただしこのスペクトルはケーブル

ロスを経験した後の波形であることを注意する。図 5.25 からわかるように、周波数域 1.6 GHz~1.8 GHz のみをほぼ損失なしで通し、その他を大きく減衰している。また、各入力パワーでのスペクトルの波形に大きな変化は見られなかった。本実験では TE_{111-7} モード (1.73 GHz) の付近を主に測定するので BPF による影響はないと考えられる。

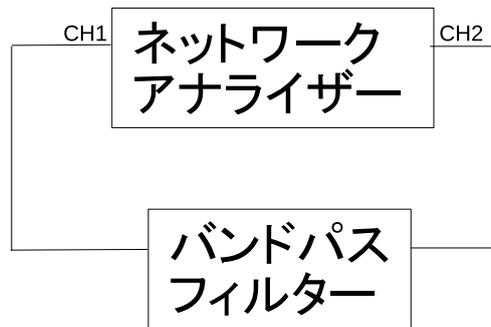


図 5.24 BPF 特性の測定セットアップ

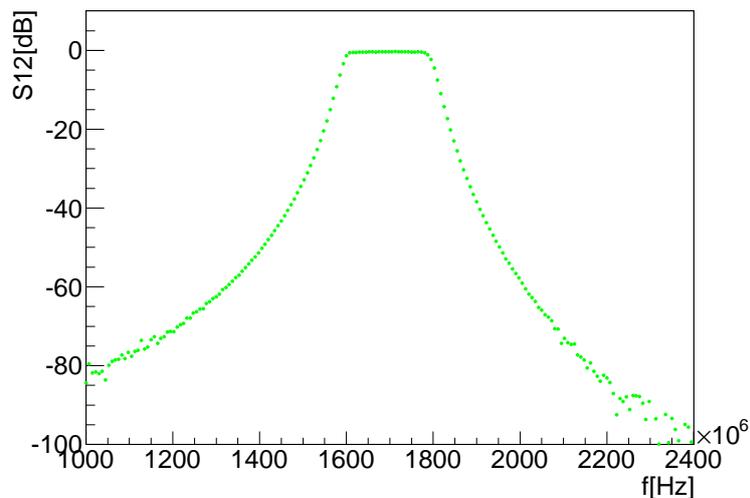


図 5.25 BPF の周波数スペクトル例 (@20 dBm) : ネットワークアナライザで測定した BPF の S_{12} の周波数特性である。1.6 GHz~1.8 GHz 付近の周波数では CH2 から CH1 へのパワーの減衰はほぼないものの、その他の周波数帯では大きく減衰していることがわかる。

RF アンプの周波数特性とパワー特性

RF アンプの周波数特性とパワー特性を測定するため図 5.26 のようなセットアップを用いた。

図のセットアップで S_{21} を測定した。増幅後のパワーを CH2 に直接入力してしまうとネットワークアナライザが故障する可能性があるため、20 dB のアッテネーターを間に入れた。よって測定を開始する前に、ケーブルロスに加えて

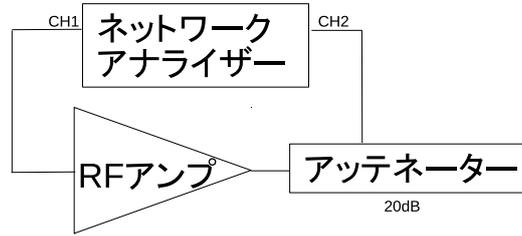


図 5.26 RF アンプ特性の測定セットアップ：ネットワークアナライザにて RF アンプのパワー特性、周波数特性を調べた。ネットワークアナライザの保護のために 20 dB のアッテネーターを RF アンプの直後に入れた。また、RF アンプに逆向きにパワーを入れてしまうと故障の原因となる可能性があるため、パワーを入れる方向には十分注意をする必要がある。今回は S_{21} を測定した。

アッテネーターによる減衰もキャリブレーションする必要がある。キャリブレーション後のパワー特性と周波数特性をそれぞれ図 5.27 と図 5.28 に示す。図よりわかるようにこの RF アンプはパワーが 0 dBm を超えると線形性がなくなり、周波数の増加にたいして増幅率は緩やかに減少していることがわかる。RF アンプの信号への影響は解析手法について述べた第 6 章で扱う。

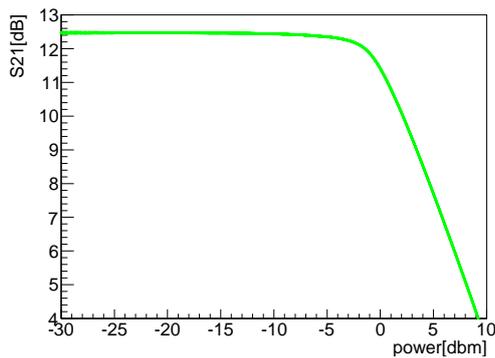


図 5.27 RF アンプのパワー特性 (@1.7 GHz) : RF アンプのパワー特性を -30 dBm から 10 dBm まで調べた。入力パワーが 0 dBm を超えたあたりから増幅率が急激に減少していることがわかる。この区間では増幅率が線形ではなくなるので、別途考慮する必要がある。

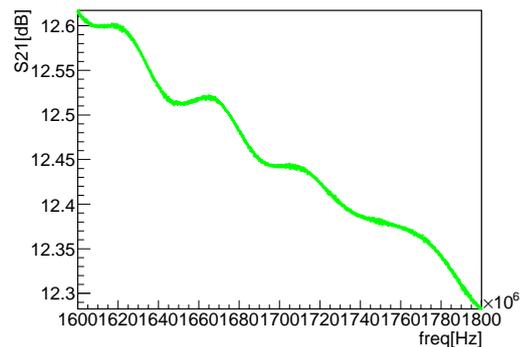


図 5.28 RF アンプの周波数特性 (@-10 dBm) : RF アンプの周波数特性を 1.6 GHz から 1.8 GHz まで調べた。この図から周波数の上昇に伴い、緩やかに増幅率が減少していることがわかる。

5.2 測定

以上が測定の構成になる。次に実際の測定について述べる。

まず、ワイヤーを原点に合わせ、その点を0番目の点(以下0番地と呼ぶ。)として空洞の応答波形を取得する。このときのオシロスコープの設定は以下のようにになっている。

オシロスコープの設定

【サンプリングレート】10 GSa/s

【波形取得時間】5 μ s

【波形データ平均回数】1024回

【トリガー】CH1

また、パルサーは100 Hzでパルスを出力している。このときの0番地での通過パルスとHOMカップラーからの空洞の応答波形をそれぞれ図5.29と図5.30に示す。

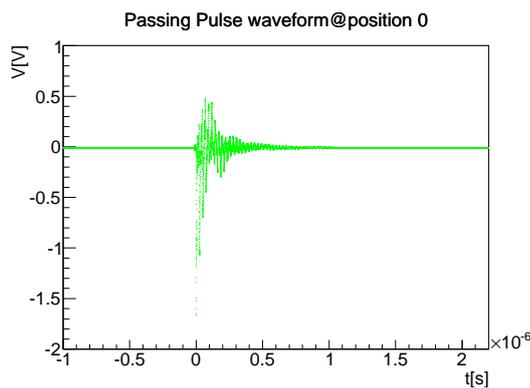


図 5.29 通過パルスの波形@0番地：ワイヤー原点(0番地)でワイヤーにパルスを通したときの、空洞を通過したパルスの波形である。この信号をトリガーにして上流側のHOMカップラーからの信号を測定する。

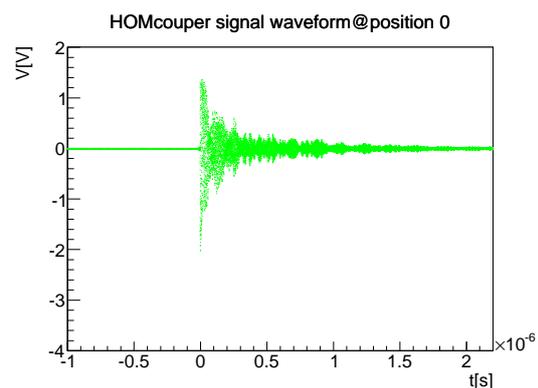


図 5.30 空洞の応答波形@0番地：ワイヤー原点(0番地)でワイヤーにパルスを通したときの、上流側のHOMカップラーからの信号の波形である。この電圧には空洞内の様々のモードの周波数成分が混じっている。

HOMカップラーから出力される空洞の応答波形は、空洞内で励起された全てのモードが混ざっている状態のため、これを分離し TE_{111-7} の強度のみを取り出さなければならない。そのため、得られた波形に離散時間フーリエ変換(DTFT)をかけ、そのフーリエスペクトルから TE_{111-7} の強度を得る必要がある。この詳細は解析手法について述べた次章に譲る。

0番地での測定を終えた後に、空洞を移動する必要があるが、ワイヤーが空洞中心から大きくずれた点はワイヤーによる摂動を大きく受けており内部電場が乱れていると推測される。よってあらかじめ空洞を TE_{111-7} の電気的中心付近に移動し、そこから細かく周辺の測定をする必要がある。 TE_{111-7} の電気的中心位置にあたりをつけるために、オシロスコープでFFT(高速フーリエ変換)をかけながら空洞を移動させる。これにより TE_{111-7} の強度が最小となる点付近を探し出し、そこを1番地として測定を開始する。これより、1番地の座標は0番地を原点としたとき以下のように

なった。

$$1 \text{ 番地の座標} \quad (x_1, y_1) = (2.20\text{mm}, 0.65\text{mm})$$

その後、1 番地から 121 番地までを連続して測定した。それぞれの番地の間隔は $100 \mu\text{m}$ で、1 番地から上下左右に $500 \mu\text{m}$ ずつ格子点状に割り振った。オシロスコープでの FFT の様子を図 5.31 に、番地の割り振りを図 5.32 に示す。また、測定中の温度は 20.5 で一定であった。

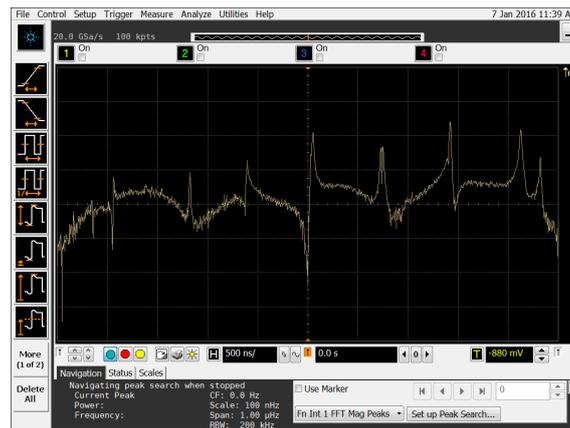


図 5.31 オシロスコープでの FFT の様子：周波数帯域は 1.6GHz から 1.8GHz までを表示している。右から数えて 4 つ目のピークが TE_{111-7} のモードである。

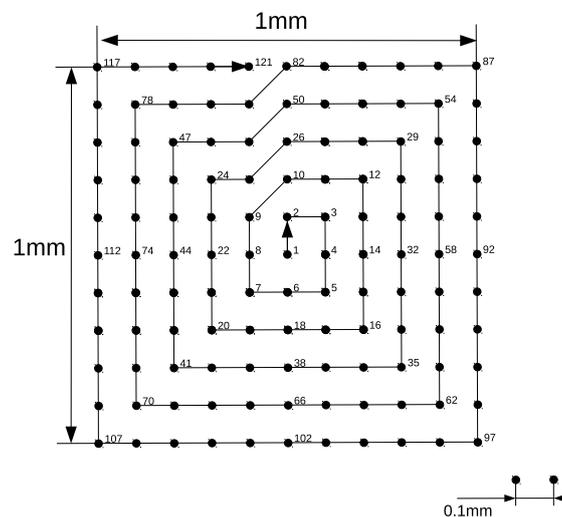


図 5.32 番地の割り振り図：ワイヤーの原点を 0 番地として、 TE_{111-7} の励起が一番小さくなるような点を探す。そこを 1 番地として、その点から時計回りに順に番号を振っていく。

第 6 章

解析手法

本章では各番地で得た図 5.30 のような空洞の応答波形からどのようにして TE_{111-7} の電気的中心を決定するかについて述べる。

6.1 離散時間フーリエ変換

前述したように、HOM カップラーから得る応答波形は励起された全てのモードが混ざり合っている状態なので、これを離散時間フーリエ変換 (DTFT) で周波数スペクトルに変換し、モード毎の電圧に分離しなくてはならない。実数の離散集合 $x[n]$ (n は正数) に対しての DTFT は以下の式で定義される。ここで ω は正規化角周波数である。

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-i\omega n} \quad (6.1)$$

実際の計算ではこれを有限長で利用する。オシロスコープで得た応答波形の n 番目の点の電圧を $v[n]$ とし、 ω を正規化角周波数としたときのフーリエスペクトルを $V(\omega)$ とすると、取得データ N 点での DTFT は

$$V_{\text{normalize}}(\omega) = \sum_{n=1}^N v[n]e^{-i\omega n} \quad (6.2)$$

と表される。サンプリング周期 Δt とすれば正規化周波数は非正規化角周波数 Ω を用いて $\omega = \Omega \times \Delta t$ となる。よって非正規化周波数を f とすれば、DTFT は

$$V(f) = \sum_{n=1}^N v[n]e^{-2\pi i f n \Delta t} \quad (6.3)$$

という計算で得られることがわかる。この $V(f)$ は複素数であることに注意すると、振幅スペクトルは $\sqrt{|V(f)|^2}$ で得る事ができる。

本測定でのオシロスコープのサンプリング周波数は 10 GSa/s であったから、 $\Delta t = 10^{-10}$ s となる。周波数 f に関してはサンプリング定理より $f < \frac{1}{2\Delta t}$ の範囲で自由にとることができる。

周波数域を 1.6 GHz から 1.8 GHz、間隔を 20 kHz として 0 番地と 1 番地での HOM カップラーからの応答波形を $t > 0$ の範囲で DTFT したものが図 6.3 と図 6.4 である。元の波形は図 6.1 と図 6.2 である。このフーリエスペクトルから TE_{111-7} モードを同定する必要がある。空洞にワイヤーを通す前にネットワークアナライザーにて取得していた TE_{111} モード付近の周波数スペクトルは図 6.5 である。ただし、ネットワークアナライザーでの測定は 2 つの HOM カップラーをポートとして用いた。これと固有値モードによるシミュレーションの結果より TE_{111-7} は 1730 MHz 付近のピークを持つことがわかる。

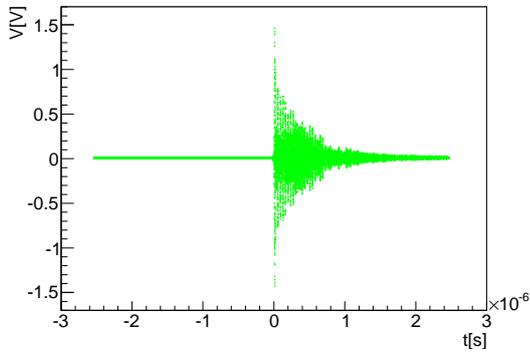


図 6.1 0 番地における空洞応答波形：座標原点 (0 番地) における上流側 HOM カップラーからの電場応答である。0 番地はおよそ電気的中心位置に近い 1 番地から 2mm 以上離れており、励起される HOM は大きくなる。図 6.2 に比べて応答電圧が大きいことがわかる。

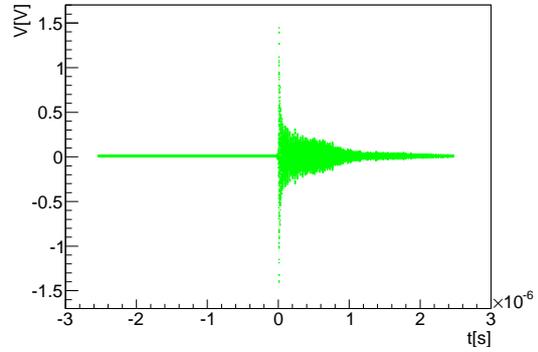


図 6.2 1 番地における空洞応答波形：1 番地における上流側 HOM カップラーからの電場応答である。1 番地はおよそ電気的中心位置に近いため、励起される HOM、特に TE_{111-7} の励起が小さい。図 6.2 に比べて応答電圧が小さいことがわかる。

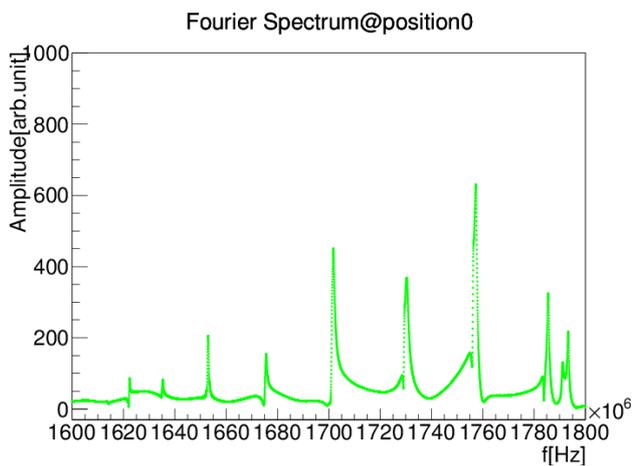


図 6.3 0 番地におけるフーリエスペクトル：図 6.1 のフーリエスペクトルである。1625 MHz 付近のピークから順に、 $TE_{111-2}, TE_{111-3}, \dots, TE_{111-9}$ と続いている。図 6.4 と比較すると全体的に電圧は高いが、特に TE_{111-7} はその差が大きいことがわかる。

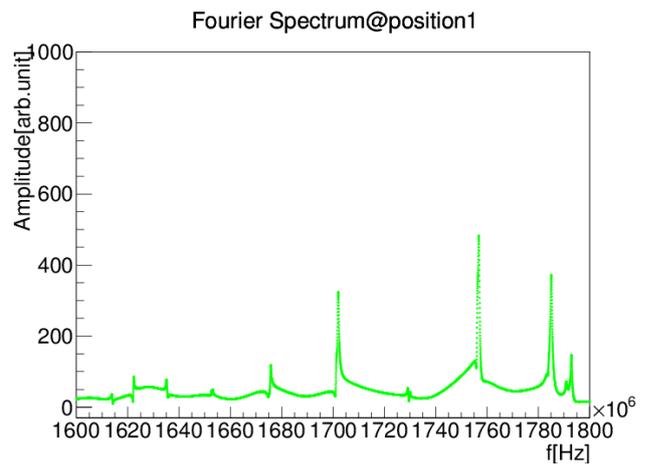


図 6.4 1 番地におけるフーリエスペクトル：図 6.2 のフーリエスペクトルである。オシロスコープの FFT で確認した通り、 TE_{111-7} はあまり励起されていない。また、こちらは図 6.3 と異なり 1615 MHz 付近にピークが見られる。これは TE_{111-1} である。

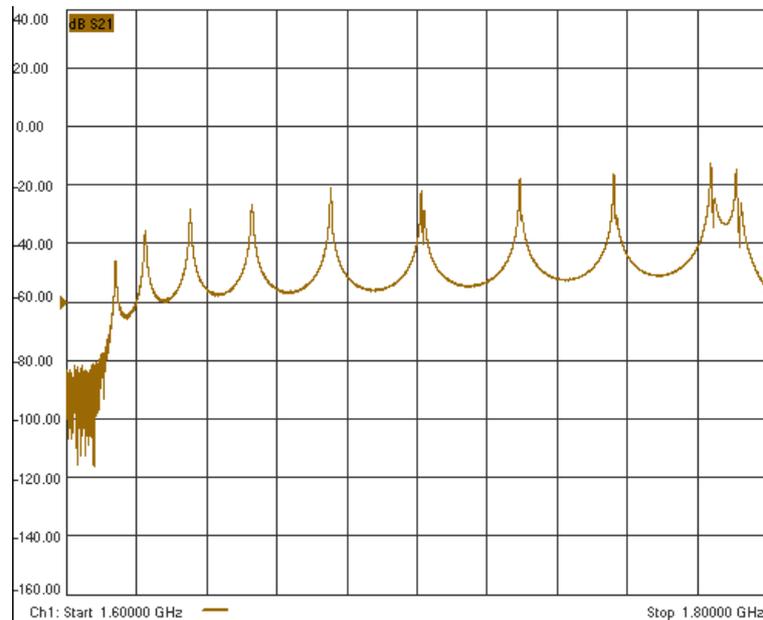


図 6.5 ネットワークアナライザで測定した TE_{111} の周波数スペクトル：アンテナは空洞両側の HOM カップラーのものを使用している。左のピークから順に、 $TE_{111-1}, TE_{111-2}, \dots, TE_{111-9}$ と並んでいる。

6.2 TE_{111-7} モードのスプリットモードの分離

TE_{111-7} モードの信号が同定できたので、次にこのスプリットモード $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ を見つける必要がある。周波数域を 1720 MHz~1740 MHz に絞って 1 番地でのフーリエスペクトルを計算した結果が図 6.6 である。このときの周波数間隔は 2 kHz で計算した。この 2 つのピークの周波数差は約 1 MHz である。ワイヤーがない場合にネットワークアナライザでこの周波数範囲を測定した場合にもこの 2 つのピークは見られ、その様子は図 6.7 である。この場合の周波数の差はおよそ 650 kHz であった。シミュレーションでは正確にスプリットモード $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ を同定することができ、これらのモードの周波数の差は約 300 kHz であった。ワイヤーによる内部境界条件の摂動及び実際の空洞の回転非対称性を考えると、フーリエスペクトル上での周波数差はこれより大きいはずである。また、周辺には他のモードは見当たらなかった。従って図 6.6 の 2 つのモードは $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ と考えるのが妥当である。

$TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ のモードが同定できたので、次にこれらの強度を読み取らなければならない。図 6.6 のように完全にスペクトルが分離しているような場合は簡単にピーク値を読み取ることができるが、例えば図 6.8 のように片方のピークにもう片方のピークが隠れてしまう場合がある。よってこれらのスペクトルをブライトウィグナー関数の和でフィッティングすることでピークの高さを求めた。フィッティングの様子は図 6.9 図 6.10 図 6.11 に示す。

図 6.9 は 1 番地でのフーリエスペクトルをフィッティングしたものである。2 つのピークが分離されておりフィッティングは容易である。測定点のうち 8 割強はこのタイプでのフィッティングが可能である。図 6.10 は図 6.8 の波形をフィッティングしたものである。このような波形をフィッティングする際には、あらかじめフィッティングの初期パラメーターが適切に入力されていないとならない。本測定のワイヤーの移動量内ではそれぞれのピークの周波数はほぼ一定であるとして、初期パラメーターには常に同じ周波数を入れてある。また、信号の強度は連続的に変化すると考えら

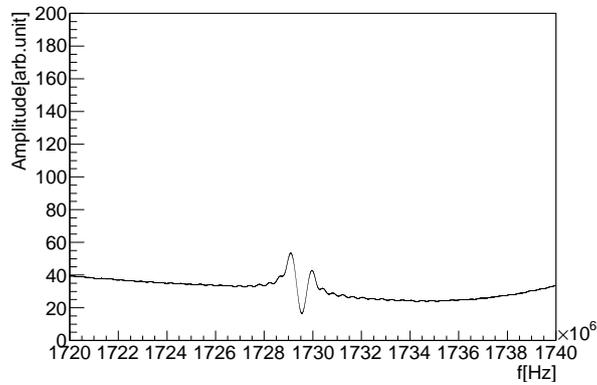


図 6.6 1 番地での TE_{111-7} のスプリットの様子

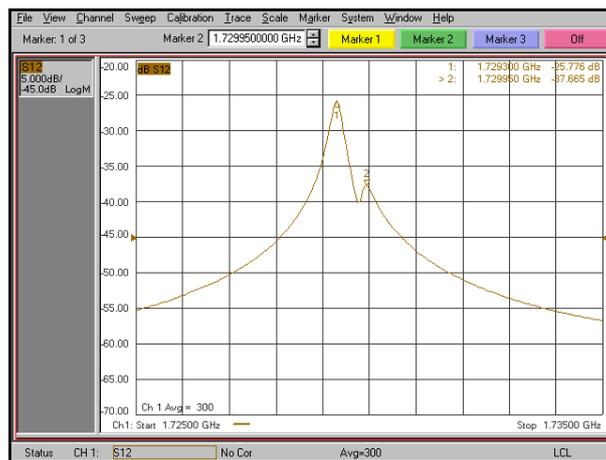


図 6.7 ネットワークアナライザで測定した TE_{111-7} のスプリットの様子

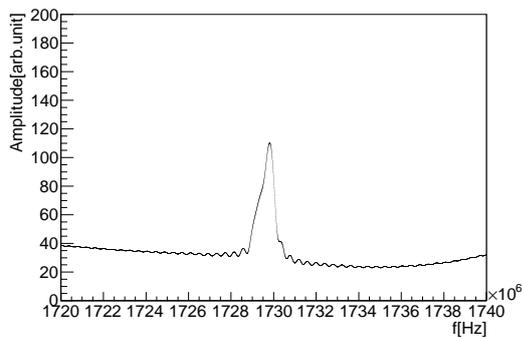


図 6.8 20 番地でのフーリエスペクトル

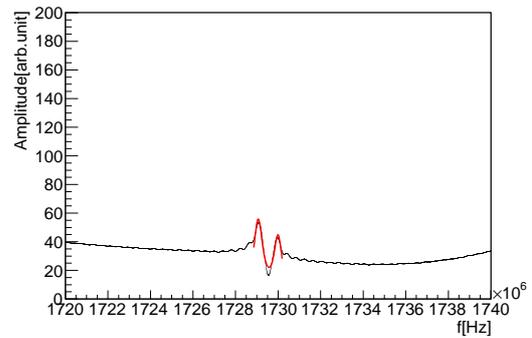


図 6.9 1 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング

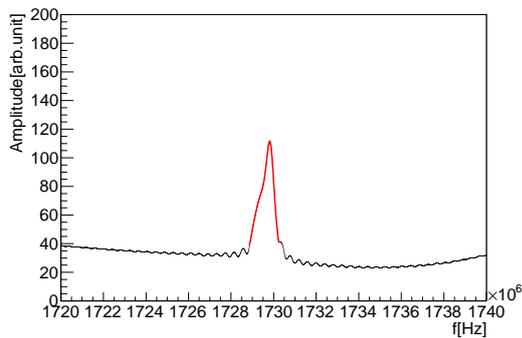


図 6.10 20 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング

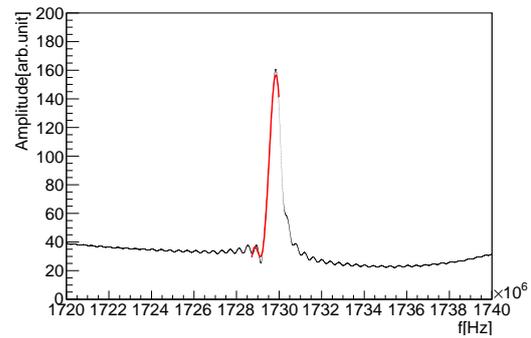


図 6.11 39 番地でのフーリエスペクトルのフィッティング

れるので、ピーク値の初期パラメータは周囲の番地のピーク値からあたりをつけることができる。例えば、39 番地でのフーリエスペクトルは 2 つのピークのうち低周波側の $TE_{111-7-1}$ モードの信号がノイズと判別がつきにくくなっているが、これは周囲の番地との比較により図 6.11 のようにフィッティングできる。このようにして全ての番地で $TE_{111-7-1}$ 及び $TE_{111-7-2}$ のそれぞれの振幅を求める。この結果を座標に対してプロットしたものがそれぞれ図 6.12 と図 6.13 である。図では見やすいように各点を滑らかに平面で繋いでいる。

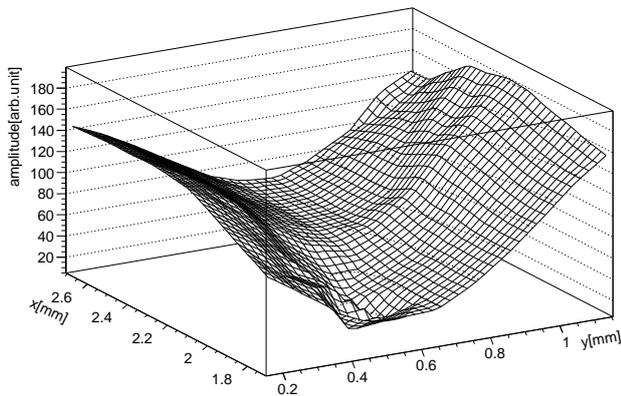


図 6.12 $TE_{111-7-1}$ の各座標における信号の振幅：ワイヤーの位置 xy に対する $TE_{111-7-1}$ の励起の振幅の 3 次元プロットを平面で繋いだ。 $TE_{111-7-1}$ の励起されにくい谷が形成されていることがわかる。

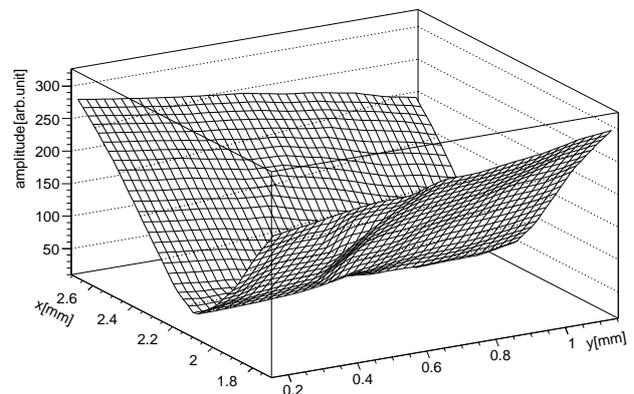


図 6.13 $TE_{111-7-2}$ の各座標における信号の振幅：ワイヤーの位置 xy に対する $TE_{111-7-2}$ の励起の振幅の 3 次元プロットを平面で繋いだ。 $TE_{111-7-2}$ の励起されにくい谷が形成されていることがわかる。

6.3 RF アンプの線形性

以上で各番地における 2 つのモードの振幅を得たが、ここで RF アンプがパワーに対して非線形であったことを思い出すと、全ての測定点が電気的中心的算出に使用できるとは限らない。よって図 6.14 のセットアップにて RF アンプの線形性を確認した。

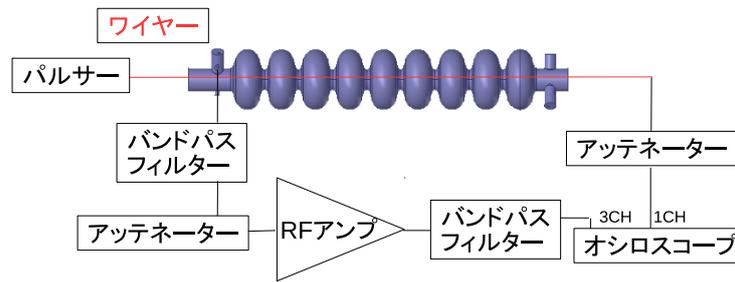


図 6.14 アンプの線形性測定のための構成図

本測定の構成と異なる点は、一段目の BPF の後にアッテネーターを挿入していることである。これはアッテネーターの減衰度を変化させたときに、 TE_{111-1} および TE_{111-2} モードがどのように変化するかを確認するためである。これによってそれぞれのモードの振幅とアッテネーターの減衰度の相関を見ることができ、これらが線形であるような振幅の領域のみをフィッティング等に用いることで、RF アンプの非線形性の影響を避けることができる。測定はそれぞれの振幅が最大となるような番地で行う必要があるため、 $TE_{111-7-1}$ は 95 番地、 $TE_{111-7-2}$ は 97 番地で測定した。アッテネーターは 0dB から 21dB まで 3dB 毎に測定した。結果を図 6.15、図 6.16 に示す。プロットの縦軸はフーリエスペクトルの信号の振幅の対数を取っている。 $TE_{111-7-1}$ では振幅が少なくとも 330 以下で、 $TE_{111-7-2}$ では振幅が少なくとも 245 以下では RF アンプによる増幅が線形であることを確認した。本測定ではこれ以上の振幅を持つような測定点は存在しなかったため、RF アンプによる非線形増幅は存在しなかった。

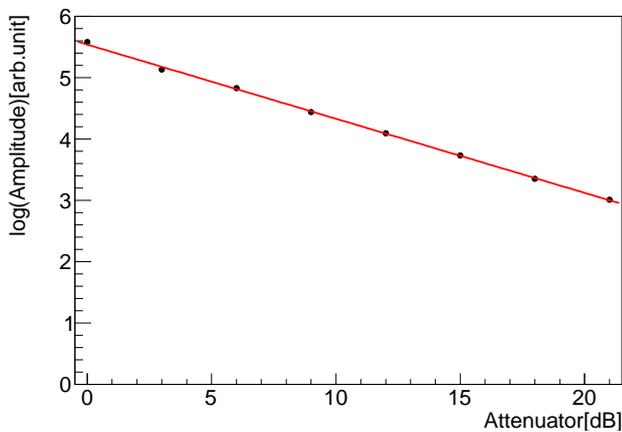


図 6.15 $TE_{111-7-1}$ の振幅とアッテネーターの関係：横軸にアッテネーターの減衰度、縦軸にその場合の信号の振幅の対数をとったものとしてプロットした。振幅が 330 以下では線形であることを確認した。

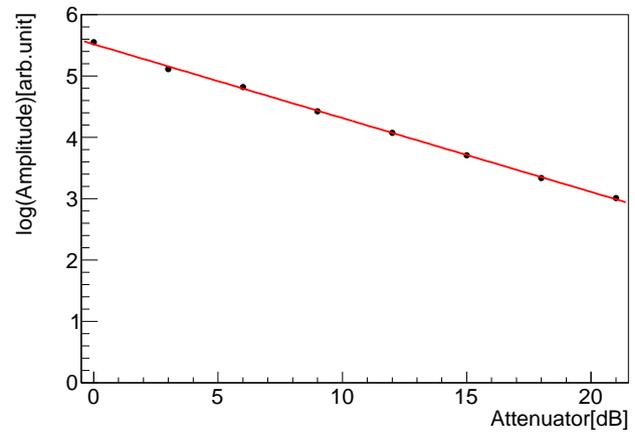


図 6.16 $TE_{111-7-2}$ の振幅とアッテネーターの関係：横軸にアッテネーターの減衰度、縦軸にその場合の信号の振幅の対数をとったものとしてプロットした。振幅が 245 以下では線形であることを確認した。

6.4 TE_{111-7} モードの電気的中心の算出

図 6.12 と図 6.13 からわかるように、それぞれのモードの偏極方向（図の谷がある方向）はほぼ 90° にスプリットしている。このことから、この 2 つのモードは TE_{111-7} のスプリットモードであることが再確認される。よってこの

図の谷の部分で交差する点が TE_{111-7} の電気的中心軸であると言える。以下で、この求め方について述べる。

$TE_{111-7-1}$ モードは谷の方向が x 軸に、 $TE_{111-7-2}$ モードは谷の方向が y 軸に平行に近いので、 $TE_{111-7-1}$ は y -Amplitude 平面で図 6.12 を、 $TE_{111-7-2}$ は x -Amplitude 平面で図 6.13 を切ることを考える。例としてここでは $TE_{111-7-1}$ について述べる。 $TE_{111-7-1}$ では y -Amplitude 平面で図 6.12 を切るので、測定した各 x 座標毎に y -Amplitude のグラフを作成する。ここで、 x の値は各測定点毎に一致していないことに注意する。 x, y の値には目標値の $\pm 3 \mu\text{m}$ の誤差を許容し測定を行っているためである。しかしこの奥行き誤差は谷の軸に平行に近い向きで平面を切っていることから、測定値への影響は十分に小さいと考えられる。このときの y -Amplitude のグラフの例を図 6.17 に示す。いずれも谷を谷の軸に垂直に近い方向から切るため V 字のグラフが得られる。以下、V 字プロットと呼ぶ。

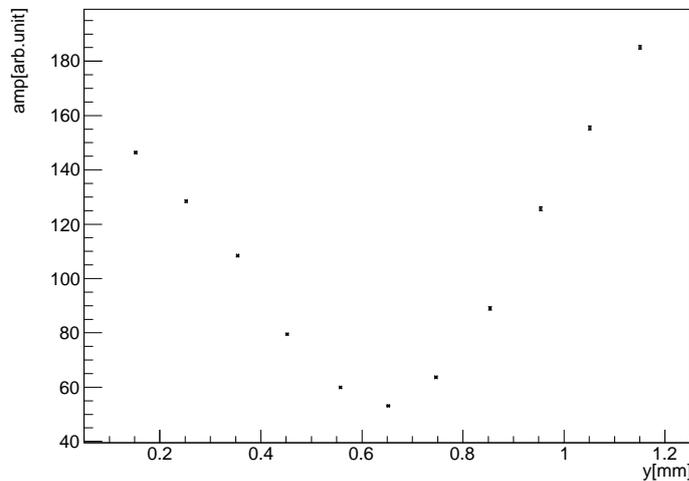


図 6.17 $x=2.2\text{mm}$ における V 字プロット： $x = 2.2\text{mm}$ の平面上での TE_{111-7} の励起された電場の振幅と y 座標の関係を示している。V 字を描くように 2 本の傾きの等しい直線が谷を形成している。

シミュレーションの項を思い出すと、この V 字プロットは 2 本の直線になっているはずである。しかしながらこれを左右で直線近似した場合には中心の点を右側または左側のどちらの直線にフィットするかを選ばなければならない。よってこれを避けるために、振幅の二乗を考えることによって二次関数でフィットすることを選んだ。このときのグラフとフィッティングの様子を図 6.18 に示す。

このようにして得られた各 x での谷の y 座標を xy 平面で図示することで、 xy 平面上での谷の方程式が得られる。これを $TE_{111-7-2}$ に対しても行うことで、2 本の方程式が得られ、その交点が TE_{111-7} の電気的中心位置となる。結果を図示したものが 6.19 である。交点の座標は $(x, y) = (2.205 \pm 0.001 \text{ mm}, 0.624 \pm 0.012 \text{ mm})$ であることがわかった。誤差にはフィッティングによるものと、 y 座標にはデータ点のばらつきから $10 \mu\text{m}$ の誤差をつけた。

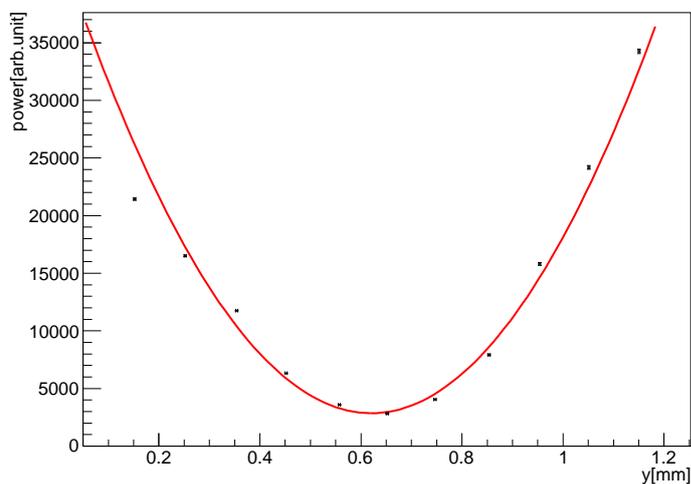


図 6.18 $x=2.2\text{mm}$ におけるパワーの V 字プロット： $x=2.2\text{mm}$ の平面上での TE_{111-7} の励起された電場のパワーと y 座標 の関係を示している。また、それを二次関数でフィットした。

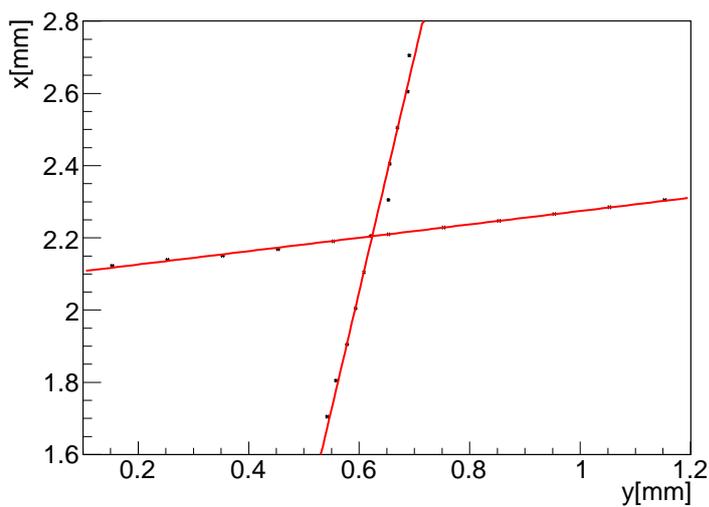


図 6.19 $\text{TE}_{111-7-1}$ 及び $\text{TE}_{111-7-2}$ における谷の方程式： $\text{TE}_{111-7-1}$ 及び $\text{TE}_{111-7-2}$ の励起される電場が最小となるような谷の座標を xy 平面でプロットした。これをそれぞれ直線でフィットし、交点の座標を得た。

第7章

結果と考察

7.1 結果

前章の解析により Z142 空洞の電気的中心位置は $(x_{ec}, y_{ec}) = (2.205 \text{ mm}, 0.624 \text{ mm})$ であることがわかった。このときの座標はフランジの穴 1,2 によって定義される位置を座標原点としていることに再度注意する。このときの誤差を考える必要がある。表 7.1 に各種誤差をまとめた。ただし () マークのついた誤差は上流側と下流側で均一につく誤差であるためワイヤーの角度に影響はないことに注意する。

	Δx (上流側)	Δy (上流側)	Δx (下流側)	Δy (下流側)
ワイヤーの座標原点からの誤差				
空洞設置時の回転による誤差 ()	7 μm	7 μm	7 μm	7 μm
視準のずれによる誤差	3.4 μm	41 μm	3.4 μm	41 μm
ワイヤーと穴の位置合わせによる誤差	20 μm	20 μm	20 μm	20 μm
ワイヤーのたるみ	30 μm		30 μm	
電気的中心の位置の誤差				
電気的中心算出時の誤差 ()	1 μm	12 μm	1 μm	12 μm

表 7.1 各構成要素による電気的中心位置の誤差のまとめ

まずは座標原点のフランジ中心からの誤差を考えず、座標原点を基準点として考える。このとき、ワイヤー位置合わせの座標原点に対する誤差 $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ は「ワイヤーの座標原点からの誤差」の各項目が独立誤差であることから、二乗和平方根を取ることによって得られて

$$(\Delta x_0, \Delta y_0) = (37 \mu\text{m}, 46 \mu\text{m})$$

である。さらに、上流側のワイヤーの座標原点からの誤差によるずれと下流側の座標原点からの誤差によるずれの差は距離にして最大でおよそ 100 μm であるから、空洞の長さがおおよそ 1278 mm であることを踏まえると、このときの角度誤差 $\Delta\theta_{\text{wire}}$ は

$$\Delta\theta_{\text{wire}} \simeq 80 \mu\text{rad}$$

であることがわかる。また、電気的中心位置算出時の誤差 $(\Delta x_{ec}, \Delta y_{ec})$ は

$$(\Delta x_{ec}, \Delta y_{ec}) = (1 \mu\text{m}, 12 \mu\text{m})$$

である。「ワイヤーの座標原点からの誤差」と「電気的中心の位置の誤差」は独立誤差であるからこれらの二乗和平方根を考えることで電気的中心位置への誤差をつけることができる。よって電気的中心位置の座標を誤差付きで求めると

$$(x_{ec}, y_{ec}) = (2.20 \pm 0.04 \text{ mm}, 0.62 \pm 0.05 \text{ mm}) \quad (7.1)$$

となった。ただしワイヤーの角度には $\Delta\theta_{\text{wire}} = 80 \mu\text{rad}$ の誤差がつく。

また、この結果と外径測定で得た機械的中心のデータとの比較することを考える。機械的中心のデータは模型空洞のビーム軸各計測点の原点として座標を表示しているため、ワイヤーの座標系をこの座標系に変換する必要がある。まず、ワイヤーの座標原点とフランジ中心との偏差を求める必要がある。そのために、この実測を行い表 7.2 の結果を得た。

	$\Delta x[\text{mm}]$	$\Delta y[\text{mm}]$
上流側	-0.99 ± 0.09	-1.29 ± 0.09
下流側	0.98 ± 0.09	-0.03 ± 0.09

表 7.2 ワイヤー原点のフランジ中心からのズレ (再掲載)

ワイヤーの座標系での電気的中心位置は既に式 (7.1) によりわかっているため、表 7.2 を加えることで電気的中心位置のフランジの真の中心からの移動量がわかる。表に結果を示す。誤差はそれぞれの誤差の二乗和平方根を用いた。

	$\Delta x[\text{mm}]$	$\Delta y[\text{mm}]$
上流側	1.21 ± 0.09	-0.66 ± 0.10
下流側	3.18 ± 0.09	0.60 ± 0.10

表 7.3 電気的中心位置のフランジ中心からの移動量

よってこの移動量を模型空洞のビーム軸を原点とした座標系でのフランジ中心の座標に加えれば良い。これより、電気的中心を模型空洞の座標に書き換え、図 4.11 及び図 4.12 に電気的中心の位置とワイヤーを書き足すと、それぞれ図 7.1、図 7.2 のようになる。赤線がワイヤーの通る位置である。電気的中心の誤差には表 7.3 における $(\Delta x, \Delta y)$ の誤差とフランジ中心の位置の誤差の二乗和平方根を用いた。図からもわかるように、ワイヤーの傾きと各セルの機械的中心を結ぶ直線の傾きは一致しない。その要因としては以下の 2 点が存在する。

(i) フランジの中心とワイヤーの座標原点のずれによる影響

(ii) Z142 空洞の曲がりの影響

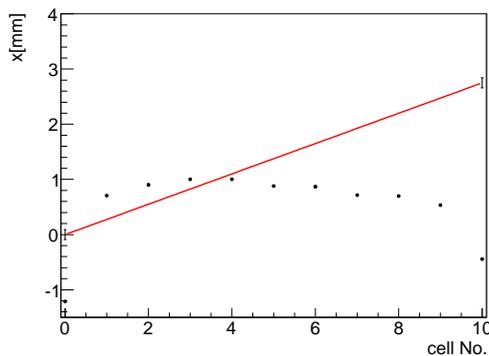
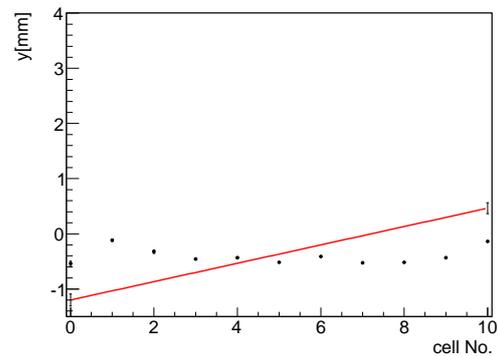
これら 2 つの要因により x 方向ではおよそ 2 mrad、 y 方向ではおよそ 1.3 mrad の角度のずれが生じる。

7.2 考察

電気的中心の位置はフランジの穴によって決められる座標原点から

$$(x_{ec}, y_{ec}) = (2.20 \pm 0.04 \text{ mm}, 0.62 \pm 0.05 \text{ mm}) \quad (7.2)$$

の位置にあることがわかった。前述したように、加速空洞のクライオモジュールへの取り付け時にはこのフランジに付けられた穴にレーザートラッカーの反射球をつけることにより、穴の座標を得ることでアライメントを行う。つまり、本実験で定義した座標原点から電気的中心位置への移動量がわかっているならば、空洞アライメント時に電気的中心を各空

図 7.1 機械的中心と電気的中心の x 座標図 7.2 機械的中心と電気的中心の y 座標

洞毎に直線上に並べる事が可能である。これによりビームへのキックによるエミッタンス増大を抑えることが可能であると考えられる。

一方で、各空洞一台一台の性能を調べるためにはその機械的中心と電気的中心の関係に言及する必要があることに注意しなければならない。これらの比較として図 7.1、図 7.2 を得る事ができたため、図より空洞の機械的中心と電気的中心の位置について定量的に比較するための方法を考える。第一に、機械的中心は各フランジ、各セルに対して点で定義されるが、電気的中心は空洞を通過する線で定義されるためこのままでは比較することは困難である。そのため、機械的中心を線で定義し直すか、電気的中心を各セル毎に定義し直すことを考えるが、後者はこの測定におけるデータのみでは非常に困難であるため前者を考える。このとき、電気的中心は空洞の全長に対して定義されているが、両端のフランジ部には TE_{111-7} モードの電場は存在しないことから、機械的中心との関係を考える場合はセル部分にのみ注目すればよいことがわかる。よって機械的中心をセル部分のみで直線フィットしたものを機械的中心軸と呼び、これと電気的中心を比較すればよい。このとき直線フィットには各セルの TE_{111-7} モードの電場の強さに比例した重み付けをしなければならないことに注意する。というのも、電気的中心の測定時には各空洞の寄与は均一ではなく TE_{111-7} の各セルにおける電場の強さによって重み付けされているからである。この重みは内部電場の実測によって決定することが望ましいが、これは別途実験が必要である。このようにして線で定義された機械的中心軸を電気的中心と比較するにあたり次なる問題点が、それぞれの角度を一致させる必要があるということである。本測定ではフランジの穴で決められる座標原点によってワイヤーの傾きは決定されており、これが機械的中心軸の傾きとは大きく異なる。そのため、定量的に機械的中心軸と電気的中心について比較することは難しい。しかしながら本測定と同様のセットアップにて機械的中心軸と電気的中心の傾きを一致させることは可能である。これは外径測定で得たデータからあらかじめ機械的中心軸を算出しておき、ワイヤーを張った後にその傾きの差の分だけ空洞の傾きを調整することで実現可能である。

最後に、本実験でのワイヤーの座標原点とフランジの真の中心が表 7.2 で示される量だけずれてしまった理由について考察をする。ワイヤーの座標原点への位置合わせの誤差 ($50 \mu\text{m}$ 以下) はこのずれが 1 mm のオーダーであることを考慮すると、ずれの要因になる可能性は低いと考えられる。また、ワイヤーの座標原点への位置合わせを複数回行った場合でも系統的にワイヤーの座標原点とフランジの真の中心位置はずれていたことを確認しており、10 回の位置合わせに対してこのずれの標準偏差はおよそ $100 \mu\text{m}$ であった。つまり、何か他の系統的な原因が存在するはずである。この原因の候補として考えられるのはフランジについている穴の精度が非常に悪いという場合である。例えば、 $50 \mu\text{m}$ の精度で穴をあけられるとした場合を仮定すると座標原点とフランジの真の中心とのずれは $50 \mu\text{m}$ であると近似できる。この機械工作精度が例えば 1 mm であった場合、これらの値は全て 1 mm となる。仮にこの穴の位置が原因であるとすると、空洞アライメント時の各空洞の傾きがこの穴の位置のばらつきによってランダムにふらついてしまうのでビームをキックしてしまう要因になるため改善する必要がある。

7.3 結論

本研究の目的は、実験室規模で空洞の電気的中心位置の測定法を確立することであった。

その実現のために本実験ではワイヤーパルス法を採用し、この方法による TE_{111-7} の電気的中心位置の位置精度が $100 \mu\text{m}$ 以上であることを目標とした。それに際して、まずこの方法での TE_{111-7} の電気的中心位置の測定が可能かどうかの検証が必要であったため、シミュレーションを行った。それにより TE_{111-7} の電気的中心位置の計算に成功した。

測定に際しては以下の問題点が存在した。

- (a) ワイヤーの座標原点への位置合わせを精度 $100 \mu\text{m}$ 以上で行う必要があること
- (b) 空洞の移動を十分高精度で行う必要があること
- (c) 空洞からの TE_{111-7} の応答が十分強く見え、スプリットの様子が見える必要があること
- (d) 電気的中心位置の算出の位置精度 $100 \mu\text{m}$ 以上が必要であること
- (e) ワイヤーによる内部電場への摂動の効果を考慮する必要があること
- (f) ワイヤーと空洞による同軸モードの混入の効果を考慮する必要があること

以上の問題点に対して以下の対処をした。

- (a) 非常に高精度な水平望遠鏡と直角プリズムを組み合わせることで位置精度 $50 \mu\text{m}$ を達成した
- (b) 1目盛り $10 \mu\text{m}$ の XY ステージと最小読み値 $1 \mu\text{m}$ のリニアゲージを組み合わせることで移動精度 $2 \mu\text{m}$ を達成した
- (c) 高強度パルサー、RF アンプ、バンドパスフィルターを組み合わせることで TE_{111-7} のスプリットの確認を達成した
- (d) 各測定点での波形取得を 1024 回にし、平均化することで高精度でのフィッティングが可能となり、位置精度 $5 \mu\text{m}$ を達成した
- (e) ワイヤーの電気的中心の近傍だけを測定することで摂動の効果を抑えた
- (f) シミュレーションによると TE_{111-7} の近傍には同軸モードは存在しなかったため考慮する必要がなかった

これらの結果は以下ようになった。

「電気的中心位置を位置精度 $50 \mu\text{m}$ で求めることができた。」

よってワイヤーパルス法による TE_{111-7} の電気的中心位置の測定が可能であることをシミュレーションで示すと同時に、位置精度 $100 \mu\text{m}$ 以上で測定する方法を確立したと言える。

7.4 改善すべき点と今後の課題・展望

本測定方法の改善すべき点を以下に挙げる。

(1) 水平望遠鏡の台数を減らす

本測定に用いた水平望遠鏡は非常に高精度に視準を取ることが可能であったが、問題点が3点存在する。まず1点目は設置場所を広くとる必要があるという問題である。2点目に、水平望遠鏡の水平出しにはかなりの時間がかかるという問題である。そして3点目に、一度水平が出た望遠鏡も振動や温度変化や人為的理由などにより水平が崩れることが多く、その都度水平出しをする必要があるという問題である。これら3点は水平望遠鏡を扱う上で当然のことであるが、簡易な方法で電気的中心を測定するという本実験の目的を考慮すると、測定以外の部分に時間がかかりすぎるのは問題であると言える。そのため、水平望遠鏡の台数を減らす、または使用しない方法を考案することで測定にかかる時間の大幅短縮と実験難易度の易化を目指すべきである。

(2) 信号測定の自動化

本測定では信号測定におけるプロセスを全て手動にて行った。具体的に自動化できる部分は、信号を1番地に移動させてから後の波形取得 番地移動 波形取得 ... の繰り返し部分である。電子制御可能なXYステージを用意することでこれが可能になる。波形の自動取得を実現することで、ワイヤーの位置を中心点近傍でより細かく動かすことができるようになり、精度の向上にも繋がる。

(3) ワイヤーの長さを短くする

本測定では空洞長さ約1287 mmにたいしてワイヤーの長さは約2100 mmであった。ワイヤーが長ければ長いほどたるみは大きくなるためなるべく短い方が良い。また、入力パルスを空洞内に無駄なく入れるためにもワイヤーは短い方が良い。(4) 測定する空洞に目印を増やす

本測定ではワイヤーのたるみによる効果を調べることができなかったが、これは空洞を90°または180°回転させることにより測定が可能である。しかしながら、ワイヤーを座標原点に置くための穴が特定位置にしか付いていないため、これを行うことができなかった。今後、空洞を製造する際には目印となる穴を少なくとも4方は付けるとワイヤーパルス法の正確さが向上すると考えられる。

最後に、今後の課題・展望を列挙する

(a) 本測定の結果とビーム測定による結果との照合

本測定で行ったワイヤーパルス法がビーム測定の代替になることの証明はなされていない。というのもワイヤーによる内部空間の境界条件の変化に電場への影響や電子ビームとパルスの違いによる影響というものを評価する必要があるからである。この結果がビーム測定による結果と一致したとき、はじめてワイヤーパルス法がビーム測定の代替になるものだと言えることが出来る。これについては今後より性能のよい空洞を用いて両方の手法を実施し、確かめる必要がある。

(b) ワイヤーによる電場への影響のシミュレーション

ワイヤーによる電場への影響はシミュレーションによっても評価することが可能であると考えられる。しかしながら、細いワイヤーのシミュレーションをするには非常に強力な計算機が必要であるため、今回は行うことができなかった。

(c) 空洞の形状を考慮したモデリングによる電磁場シミュレーション

曲がりなどを考慮した現実の空洞に近い形状のモデルを実装し電磁場シミュレーションを行うことにより、現実の空洞測定における指標とすることができる。また、外径測定器で得られる情報をモデルに焼き直すことができれば、シミュレーションと実測の比較も容易にできるようになる。

(d) 本手法の様々な応用

ワイヤーパルス法はワイヤーを通すだけでビーム応答に近い応答が得られるもので、非常に応用の効く手法である。例えば、本実験で測定しなかった他のキックモードについての電気的中心軸を測定し比較することや、ビームパイプに局在するモードの電気的中心軸の測定をすることも可能である。今回の実験ではビームの位置に着目して行ったが、ビームの傾きについての研究をすることも可能である。この他にもビームを用いる実験であれば本手法で代替することが可能である。

謝辞

まず、本研究の機会を与えて頂き、適切な御指導、御助言をくださった山下了先生に心より感謝致します。

本研究は高エネルギー加速器研究機構 (KEK) のご協力の下、行われました。早野仁司先生には毎週の個別ミーティングから実技指導に至るまで御指導を賜りました。荒木栄氏にはワイヤーのアライメント方法について貴重なアドバイスを頂きました。また、倉本綾佳氏には測定で行き詰まっていた際に、ご助力頂きました。KEK での同期である宇都宮大学の及川大基君には、日頃の議論だけでなく、日常生活においても様々な場面でご協力を頂きました。そして STF の皆様には工学的な知識のない私に、その基礎と実技指導までして頂きました。

山下研究室の田辺友彦氏、倉田正和氏、片山領氏、東直氏、山田崇人氏、家城斉氏、長倉直樹氏、藤倉昇平君にはミーティングなどを通して様々な視点から助言を賜りました。特に東直氏には、ゼミなどを通して加速空洞の基礎についてご指導頂きました。また、同期である長倉直樹君とは話題を選ばず、様々な議論に付き合っていました。後輩の藤倉昇平君には深夜に渡る長時間の実験にもご協力頂きました。

ICEPP の同期である加納勇也君、笹山悦宏君、渡邊直樹君、小川真治君、吉田昂平君、山谷昌大君、山崎友寛君、齊藤真彦君、西澤佑一君、柴田直哉君、中浦正太君とは日頃の議論や食事などを通して楽しい日常を送ることができました。秘書の塩田雅子氏、竹本葉子氏、山浦華世氏、手塚淑恵氏には諸手続等の仕事で支えていただき、研究を支障なく進めることができました。

最後に、私をこれまで支え続けてくれた両親と姉に深く感謝の意を表します。

参考文献

- [1] B.Aune et al. ,”Superconducting TESLA cavities”,Phys.Rev.ST Accel.Beams 3,092001,(2000)
- [2] THE INTERNATIONAL LINERA COLLIDER Technical Design Report Volume 1 - Executive Summary,(2013)
- [3] THE INTERNATIONAL LINERA COLLIDER Technical Design Report Volume 3 - Accelerator Part I : R&D in the Technical Design Phase,(2013)
- [4] THE INTERNATIONAL LINERA COLLIDER Technical Design Report Volume 3 - Accelerator Part II : Baseline Design,(2013)
- [5] Hasan Padamsee et al. ,”RF Superconductivity for Accelerators”,(1998)
- [6] 横谷馨,”OHO’14 リニアコライダー加速器”,(2014)
- [7] R.Wanzenberg,”Monopole,Dipole,and Quadrupole Passbands of the TESLA 9-cell Cavity”,TESLA 2001-33,(2001)
- [8] P. Wilson, ”High Energy Electron Linacs: Applications to Storage Ring RF Systems and Linear Colliders”, AIP Conference Proceedings No.87,(1981)
- [9] L.C.Maier Jr. and J.C.Slater,”Field Strength Measurements in Resonant Cavities”,Journal of Applied Physics 23,68,(1952)
- [10] 渡邊謙,”超伝導 9 セル加速空洞の高次モードに関する研究”, 博士論文,2007
- [11] 菖蒲田義博,”ビームの受けるインピーダンスとビームの不安定性の理論”,JAEA, Japan Atomic Energy Agency,(2010)
- [12] 日本工業規格,”B7510 精密水準器”,(1993)
- [13] 高田耕治,”高周波加速の基礎”,(2002)

付録 A

円筒形空洞の電磁場と Q 値

円筒形空洞の電磁場

完全導体での境界条件

左下図のように導体を境に一周する経路を考える。マクスウェル方程式より

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

なのでこれを周内の面積で積分するとストークスの定理より

$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \int -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \iff \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

$d \Rightarrow 0$ の極限を取ってやると、 $dS \Rightarrow 0$ となるので右辺は 0 になる。また、図の鉛直方向の電場は $d \Rightarrow 0$ で寄与が無視できるので、水平方向のベクトルを \mathbf{t} とすると

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{t} = 0 \iff E_{1//} = E_{2//}$$

完全導体中では電場は存在しないので $E_{1//} = 0$ 、よって境界条件は

$$E_{2//} = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 = 0 \tag{A.1}$$

次に右下図のように導体と真空の境界を含む円筒を考える。同様にしてマクスウェル方程式とガウスの定理より

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$h \Rightarrow 0$ の極限では側面の寄与は無視できるので

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{S} = 0 \iff B_{1\perp} = B_{2\perp}$$

完全導体で $B_{1\perp} = 0$ なので

$$B_{2\perp} = 0 \iff \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_2 = 0 \tag{A.2}$$

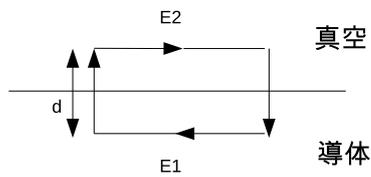


図 A.1 電場の境界条件

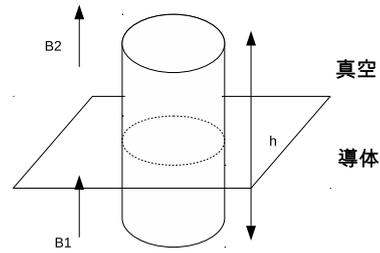


図 A.2 磁場の境界条件

波動方程式の導出

真空中のマクスウェル方程式は

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{A.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{A.4}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{A.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{A.6}$$

であるから (A.3) の rot を考えて

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}$$

ここで、一般に

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{A.7}$$

であるから、これと (A.4) 用いて

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

さらに (A.5) を用いて整理すると

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0$$

磁場の方も同様にして求められるから、B を H に書き換えてやって

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} = 0 \tag{A.8}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{H} = 0 \tag{A.9}$$

が得られた。

導体内の電磁場の伝搬

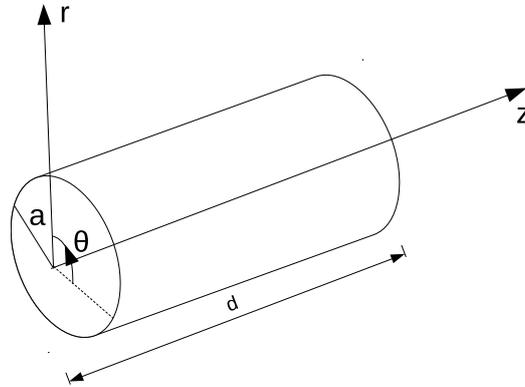


図 A.3 導体でできた筒

上図のような口の開いた筒の中を電磁場が通るときモードを考える。まず、以下のように z 軸方向に正の向きで伝わる波は

$$\mathbf{E}(x, t) = \tilde{\mathbf{E}}(r, \theta)e^{i\omega t - ikz} \tag{A.10}$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \tilde{\mathbf{H}}(r, \theta)e^{i\omega t - ikz} \tag{A.11}$$

と書ける。まず電場のみ見ていくことにする。波動方程式 (A.8) に上の電場の式を代入すると

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} &= 0 \\ \Rightarrow \left(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} &= 0 \end{aligned} \tag{A.12}$$

ただし

$$\nabla_{\perp} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, 0 \right) \tag{A.13}$$

$$\gamma^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \tag{A.14}$$

とする。またこのときマクスウェル方程式 (A.5) より

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \iff \nabla \cdot (\tilde{\mathbf{E}}e^{i\omega t - ikz}) = 0$$

よって

$$\nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{E}} = ik\tilde{E}_z \tag{A.15}$$

となるので (A.12) は

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2 \right) \tilde{\mathbf{E}} &= 0 \iff \tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\gamma^2} \nabla_{\perp}^2 \tilde{\mathbf{E}} \\ \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{\gamma^2} \left(\nabla_{\perp} (\nabla_{\perp} \cdot \tilde{\mathbf{E}}) - \nabla_{\perp} \times (\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{E}}) \right) \end{aligned}$$

このとき (A.15) を用いると

$$\tilde{\mathbf{E}} = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - \nabla_{\perp} \times (\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{E}}) \right)$$

この x 成分を考えると

$$\tilde{E}_x = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \partial_x \tilde{E}_z - \partial_y (\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{E}})_z \right)$$

最後の項はマクスウェル方程式から $(\nabla_{\perp} \times \tilde{\mathbf{E}})_z = -i\omega\mu_0 \tilde{H}_z$ なので

$$\tilde{E}_x = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \partial_x \tilde{E}_z + \partial_y (i\omega\mu_0 \tilde{H}_z) \right)$$

同様に y 成分は

$$\tilde{E}_y = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \partial_y \tilde{E}_z - \partial_x (i\omega\mu_0 \tilde{H}_z) \right)$$

よってこれらをまとめると

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\perp} = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \nabla_{\perp} \tilde{E}_z - i\omega\mu_0 \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} \tilde{H}_z \right) \quad (\text{A.16})$$

同様にして磁場は

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\perp} = -\frac{1}{\gamma^2} \left(ik \nabla_{\perp} \tilde{H}_z + i\omega\epsilon_0 \mathbf{e}_z \times \nabla_{\perp} \tilde{E}_z \right) \quad (\text{A.17})$$

となることがわかった。以上で電場と磁場の z 成分から他の成分を導くことが可能になった。次に \tilde{E}_z, \tilde{H}_z の具体的な形を考える。(A.12) の z 成分について円筒座標で書き換えると

$$(\nabla_{\perp}^2 + \gamma^2) \tilde{E}_z = 0 \iff \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \gamma^2 \right) \tilde{E}_z = 0$$

$\tilde{E}_z = R(r)\Theta(\theta)$ と変数分離すると v を定数として

$$\begin{cases} \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left(1 - \frac{v^2}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0 & (r \text{ 成分}) \\ \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + v^2 \Theta(\theta) = 0 & (\theta \text{ 成分}) \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

が得られる。(ただし $\rho = \gamma r$)

r 方向はベッセル方程式で、 θ 方向は単振動の式となる。

まず θ 方向を見ると、 ϕ_0 を任意の位相としてただちに

$$\Theta(\theta) \propto \cos(m\theta + \phi_0) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A.19})$$

となる。このとき $v = m$ となる。

この r 方向はベッセル方程式の解を用いて、無限遠で収束することを考えると

$$R(r) \propto J_m(\gamma r) \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (\text{A.20})$$

と書くことができる。(A.19)(A.20) より

$$\tilde{E}_z(r, \theta) = E_{mn} J_m(\gamma r) \cos(m\theta + \phi_0) \quad (\text{A.21})$$

となる。磁場もまったく同様にして

$$\tilde{H}_z(r, \theta) = H_{mn} J_m(\gamma r) \cos(m\theta + \phi_0) \quad (\text{A.22})$$

と書ける。以下では TMmode と TE mode で分けて考える。

TMmode

TMmode では $\tilde{H}_z = 0$ である。さらに、境界条件 (A.1) より

$$\tilde{E}_z(a, \theta) = 0 \Rightarrow J_m(\gamma a) = 0$$

よって γa はベッセル関数の根でなければならない。m 次のベッセル関数の n 番目の根を u_{mn} とすると $\gamma = \frac{u_{mn}}{a}$ であるから

$$\tilde{E}_z(r, \theta) = E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \quad (\text{A.23})$$

となる。

これらに注意しながら (A.21) を (A.16) に適用して

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= -\frac{ika^2}{u_{mn}^2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix} E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ &= -\frac{ika^2 E_{mn}}{u_{mn}^2} \begin{pmatrix} \frac{u_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ -\frac{m}{r} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_r \\ \tilde{E}_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様に (A.22) を (A.17) に適用して

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{\perp} &= -\frac{i\omega\epsilon_0 a^2}{u_{mn}^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix} E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ &= -\frac{i\omega\epsilon_0 a^2 E_{mn}}{u_{mn}^2} \begin{pmatrix} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) \\ \frac{u_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_r \\ \tilde{H}_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $\gamma = \frac{u_{mn}}{a}$ を思い出すと、(A.14) より

$$\omega_{mn} = c \sqrt{\left(\frac{u_{mn}}{a}\right)^2 + k^2} \quad (\text{A.24})$$

がわかるので (A.10)(A.11) にこれらを代入すると筒内を z 軸正方向に伝搬する TMmode が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t - ikz} \\ E_r = -\frac{ika}{u_{mn}} E_{mn} J'_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t - ikz} \\ E_\theta = \frac{ikma^2}{ru_{mn}^2} E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t - ikz} \\ H_z = 0 \\ H_r = -\frac{i\epsilon_0 m \omega_{mn} a^2}{ru_{mn}^2} E_{mn} J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t - ikz} \\ H_\theta = -\frac{i\epsilon_0 \omega_{mn} a}{u_{mn}} E_{mn} J'_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t - ikz} \end{array} \right. \quad (\text{A.25})$$

TEmode

TEmode では $\tilde{E}_z = 0$ である。さらに、境界条件 (A.2) より

$$\left. \frac{\partial \tilde{H}_z(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \Rightarrow J'_m(\gamma a) = 0$$

よって γa はベッセル関数の一階微分の根でなければならない。m 次のベッセル関数の一階微分の n 番目の根を u'_{mn} とすると $\gamma = \frac{u'_{mn}}{a}$ であるから

$$\tilde{H}_z(r, \theta) = H_{mn} J_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \quad (\text{A.26})$$

となる。

これらに注意しながら (A.22) を (A.17) に適用して

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{H}}_{\perp} &= -\frac{ika^2}{u'^2_{mn}} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix} H_{mn} J_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ &= \frac{ika^2 H_{mn}}{u'^2_{mn}} \begin{pmatrix} -\frac{u'_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ \frac{m}{r} J_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{H}_r \\ \tilde{H}_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

同様に (A.21) を (A.16) に適用して

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_{\perp} &= \frac{i\omega\epsilon_0 a^2}{u'^2_{mn}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ 0 \end{pmatrix} H_{mn} J_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ &= \frac{i\omega\epsilon_0 a^2 H_{mn}}{u'^2_{mn}} \begin{pmatrix} \frac{m}{r} J_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \sin(m\theta + \phi_0) \\ \frac{u'_{mn}}{a} J'_m\left(\frac{u'_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta + \phi_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{E}_r \\ \tilde{E}_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで $\gamma = \frac{u'_{mn}}{a}$ を思い出すと、(A.14) より

$$\omega_{mn} = c\sqrt{\left(\frac{u'_{mn}}{a}\right)^2 + k^2} \quad (\text{A.27})$$

がわかるので (A.10)(A.11) にこれらを代入すると筒内を z 軸正方向に伝搬する TEMode が得られる。

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = \frac{i\epsilon_0 m \omega_{mn} a^2}{r u_{mn}'^2} H_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}' r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t - ikz} \\ E_\theta = \frac{i\epsilon_0 \omega_{mn} a}{u_{mn}'} H_{mn} J_m' \left(\frac{u_{mn}' r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t - ikz} \\ H_z = H_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}' r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t - ikz} \\ H_r = -\frac{ika}{u_{mn}} H_{mn} J_m' \left(\frac{u_{mn}' r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t - ikz} \\ H_\theta = \frac{ikma^2}{r u_{mn}'} H_{mn} J_m \left(\frac{u_{mn}' r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t - ikz} \end{array} \right. \quad (\text{A.28})$$

ピルボックス内の電磁場

TMmode

次に、口の閉じた筒の中の TMmode を考える。この場合 z 軸の + 方向と - 方向に伝搬する電場を考える。- 方向に進行する波は (A.25) 中の k を $-k$ にすれば得られるので

$$\mathbf{E}(x, t) = \tilde{\mathbf{E}}^+(r, \theta)e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{E}}^-(r, \theta)e^{i\omega t + ikz} \quad (\text{A.29})$$

$$\mathbf{H}(x, t) = \tilde{\mathbf{H}}^+(r, \theta)e^{i\omega t - ikz} + \tilde{\mathbf{H}}^-(r, \theta)e^{i\omega t + ikz} \quad (\text{A.30})$$

とする。線形性に注意すれば $\tilde{\mathbf{E}}^+$, $\tilde{\mathbf{E}}^-$, $\tilde{\mathbf{H}}^+$, $\tilde{\mathbf{H}}^-$ それぞれについて (A.25) が成り立つ。

新たに $z=0, z=d$ での境界条件を課すと

$$E_r \Big|_{z=0} = E_r \Big|_{z=d} = 0 \quad , \quad E_\theta \Big|_{z=0} = E_\theta \Big|_{z=d} = 0$$

となる。式 (A.25) より

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t} (E_{mn}^+ e^{-ikz} + E_{mn}^- e^{ikz}) \\ E_r = -\frac{ika}{u_{mn}} J'_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t} (E_{mn}^+ e^{-ikz} - E_{mn}^- e^{ikz}) \\ E_\theta = \frac{ikma^2}{ru_{mn}^2} J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t} (E_{mn}^+ e^{-ikz} - E_{mn}^- e^{ikz}) \\ H_z = 0 \\ H_r = -\frac{i\epsilon_0 m \omega_{mn} a^2}{ru_{mn}^2} J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t} (E_{mn}^+ e^{-ikz} + E_{mn}^- e^{ikz}) \\ H_\theta = -\frac{i\epsilon_0 \omega_{mn} a}{u_{mn}} J'_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn}t} (E_{mn}^+ e^{-ikz} + E_{mn}^- e^{ikz}) \end{array} \right.$$

となるので $z=0$ での条件より

$$E_{mn}^+ - E_{mn}^- = 0 \Rightarrow E_{mn}^+ = E_{mn}^-$$

よって

$$E_{mn} = 2E_{mn}^+ = 2E_{mn}^-$$

と置き直すと、 $z=d$ の条件より

$$E_{mn}^+ e^{-ikd} - E_{mn}^- e^{ikd} = 0 \Rightarrow -iE_{mn} \sin(kd) = 0 \Rightarrow k = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

以上より閉じた筒内での TMmode の式は

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{i\omega_{mnp}t} \\ E_r = -\frac{p\pi}{d} \frac{a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{i\omega_{mnp}t} \\ E_\theta = \frac{p\pi}{d} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{i\omega_{mnp}t} \\ H_z = 0 \\ H_r = -i\epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} E_{mnp} J_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{i\omega_{mnp}t} \\ H_\theta = -i\epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m \left(\frac{u_{mn}r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d}z\right) e^{i\omega_{mnp}t} \end{array} \right. \quad (\text{A.31})$$

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{u_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (\text{A.32})$$

TEmode

同様にして口の閉じた筒の中の TEmode を考える。

$z=0, z=d$ での境界条件は

$$H_z \Big|_{z=0} = H_z \Big|_{z=d} = 0$$

となる。式 (A.28) より

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = \frac{i\epsilon_0 m \omega_{mn} a^2}{r u_{mn}^2} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t} (H_{mn}^+ e^{-ikz} + H_{mn}^- e^{ikz}) \\ E_\theta = \frac{i\epsilon_0 \omega_{mn} a}{u'_{mn}} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t} (H_{mn}^+ e^{-ikz} + H_{mn}^- e^{ikz}) \\ H_z = J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t} (H_{mn}^+ e^{-ikz} + H_{mn}^- e^{ikz}) \\ H_r = -\frac{ika}{u'_{mn}} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t} (H_{mn}^+ e^{-ikz} - H_{mn}^- e^{ikz}) \\ H_\theta = \frac{ikma^2}{r u_{mn}^2} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) e^{i\omega_{mn} t} (H_{mn}^+ e^{-ikz} - H_{mn}^- e^{ikz}) \end{array} \right.$$

となるので $z=0$ での条件より

$$H_{mn}^+ + H_{mn}^- = 0 \Rightarrow H_{mn}^+ = -H_{mn}^-$$

よって

$$H_{mn} = -2iH_{mn}^+ = 2iH_{mn}^-$$

と置き直すと、 $z=d$ の条件より

$$H_{mn}^+ e^{-ikd} + H_{mn}^- e^{ikd} = 0 \Rightarrow H_{mn} \sin(kd) = 0 \Rightarrow k = \frac{p\pi}{d} \quad (p = 1, 2, 3, \dots)$$

が得られる。このとき $p = 0$ は $H_z = 0$ となってしまう電磁場が存在しなくなってしまうため不適であることに注意する。

以上より閉じた筒内での TEmode の式は

$$\left\{ \begin{array}{l} E_z = 0 \\ E_r = \epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ E_\theta = \epsilon_0 \omega_{mnp} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_z = H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_r = \frac{p\pi}{d} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp} J'_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_\theta = -\frac{p\pi}{d} \frac{a^2}{u_{mn}^2} \frac{m}{r} H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta + \phi_0) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \end{array} \right. \quad (\text{A.33})$$

$$\omega_{mnp} = c \sqrt{\left(\frac{u'_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{d}\right)^2} \quad (\text{A.34})$$

ピルボックスの Q 値

Q 値の定義

Q 値の定義は

$$Q = \frac{\omega_{mnp}U}{P} = \omega_{mnp} \frac{\frac{\epsilon}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV}{\frac{R_s}{2} \int_S |\mathbf{H}|^2 dS} \quad (\text{A.35})$$

となっている。ここで R_s は表面抵抗で

$$R_s = \frac{1}{\sigma\delta} \quad (\text{A.36})$$

と書ける。 δ は skin depth であるり以下のように定義される。

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega_{mnp}\mu\sigma}} \quad (\text{A.37})$$

TMmode

ϕ_0 を 0 に取る。

$$z = 0 \text{ のとき } \begin{cases} H_r|_{z=0} = -\frac{i\epsilon_0 m \omega_{mnp} a^2}{r u_{mn}^2} E_{mnp} J_m\left(\frac{u_{mn} r}{a}\right) \sin(m\theta) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_\theta|_{z=0} = -\frac{i\epsilon_0 \omega_{mnp} a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m\left(\frac{u_{mn} r}{a}\right) \cos(m\theta) e^{i\omega_{mnp} t} \end{cases} \quad (\text{A.38})$$

$$z = d \text{ のとき } \begin{cases} H_r|_{z=d} = \pm H_r|_{z=0} & (p: \text{odd} \rightarrow -, \text{even} \rightarrow +) \\ H_\theta|_{z=d} = \pm H_\theta|_{z=0} & (p: \text{odd} \rightarrow -, \text{even} \rightarrow +) \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

$$r = a \text{ のとき } \begin{cases} H_\theta|_{r=a} = -\frac{i\epsilon_0 \omega_{mnp} a}{u_{mn}} E_{mnp} J'_m(u_{mn}) \cos(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

ここで簡単のため

$$H_0 = \frac{i\epsilon_0 \omega_{mnp} a}{u_{mn}} E_{mnp}$$

と置く事にする。

$z = 0, z = d$ での壁面での損失を P_1 、 $r = a$ での壁面での損失を P_2 とする。

P_1 の計算

$$P_1 = \frac{R_s}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left| H_r|_{z=0} \right|^2 + \left| H_\theta|_{z=0} \right|^2 r d\theta dr$$

である。まず θ の積分は

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \pi$$

であることに注意するとただちに計算することができて

$$P_1 = \frac{R_s}{2} H_0^2 \pi \int_0^a \left\{ \left(\frac{m}{\frac{u_{mn} r}{a}} \right)^2 J_m^2\left(\frac{u_{mn} r}{a}\right) + J_m'^2\left(\frac{u_{mn} r}{a}\right) \right\} r dr$$

となる。ここで一般にベッセル関数では (A.52) より

$$\begin{cases} J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_{\nu}(z) \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_{\nu}(z) \end{cases}$$

が成り立つのでこれを用いて変形すると

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{R_s}{2} H_0^2 \pi \int_0^a \frac{1}{4} \left\{ J_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + J_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\}^2 + \frac{1}{4} \left\{ J_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) - J_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\}^2 r dr \\ &= \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \int_0^a \left\{ r J_{m-1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + r J_{m+1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} dr \end{aligned}$$

と書ける。さらにロンメルの積分公式 (A.56) より積分を実行する。

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \left[\frac{r^2}{2} \left\{ J_{m-1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + \left(1 - \frac{(m-1)^2}{\frac{u_{mn}^2}{a^2} r^2}\right) J_{m-1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{2} \left\{ J_{m+1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + \left(1 - \frac{(m+1)^2}{\frac{u_{mn}^2}{a^2} r^2}\right) J_{m+1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right]_0^a \\ &= \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \left[\frac{r^2}{2} \left\{ \left(J'_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) - \frac{m-1}{\frac{u_{mn}}{a} r} J_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \left(J'_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + \frac{m-1}{\frac{u_{mn}}{a} r} J_{m-1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_{m-1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{2} \left\{ \left(J'_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) - \frac{m+1}{\frac{u_{mn}}{a} r} J_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \left(J'_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + \frac{m+1}{\frac{u_{mn}}{a} r} J_{m+1}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_{m+1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right]_0^a \end{aligned}$$

ここでベッセル関数の漸化式 (A.53) を用いると

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \left[\frac{r^2}{2} \left\{ -\left(J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \left(J_{m-2}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) + J_{m-1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2}{2} \left\{ -\left(J_{m+2}\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) \left(J_m\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right) + J_{m+1}^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} \right]_0^a \\ &= \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \frac{a^2}{2} \left\{ J_{m-1}^2(u_{mn}) + J_{m+1}^2(u_{mn}) \right\} \end{aligned}$$

が得られる。ただし $J_m(u_{mn}) = 0$ に注意する。再び (A.52) より $z = u_{mn}$ とすると

$$\begin{aligned} J_{m-1}(u_{mn}) &= -J_{m+1}(u_{mn}) \\ J_{m-1}(u_{mn}) &= J'_m(u_{mn}) \end{aligned}$$

が得られるので、これを用いて

$$P_1 = \frac{R_s H_0^2 \pi a^2}{4} J_m'^2(u_{mn}) \quad (\text{A.41})$$

となる。

P_2 の計算

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{R_s}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^d |H_\theta|_{r=a}|^2 a d\theta dz \\
&= \frac{R_s}{2} H_0^2 \pi J'^2(u_{mn}) a \int_0^d \cos^2\left(\frac{p\pi z}{d}\right) dz \\
&= \begin{cases} \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{4} J_m'^2(u_{mn}) & (p \neq 0) \\ \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{2} J_m'^2(u_{mn}) & (p = 0) \end{cases} \quad (\text{A.42})
\end{aligned}$$

U の計算

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V |\mathbf{E}|^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V |\mathbf{H}|^2 dV$$

であるから磁場を使って表すと

$$U = \frac{\mu_0}{2} \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^R |H_r|^2 + |H_\theta|^2 r dr d\theta dz = U_r + U_\theta$$

となる。ここでそれぞれの磁場は (A.31) より得られるのでそれぞれ計算すると、 θ と z の積分は容易に行えるので

$$\begin{aligned}
U_r &= \begin{cases} \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a \left(\frac{m}{\frac{u_{mn}r}{a}}\right)^2 J_m^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) r dr & (p \neq 0) \\ \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{2} \int_0^a \left(\frac{m}{\frac{u_{mn}r}{a}}\right)^2 J_m^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) r dr & (p = 0) \end{cases} \\
U_\theta &= \begin{cases} \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a J_m'^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) r dr & (p \neq 0) \\ \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{2} \int_0^a J_m'^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) r dr & (p = 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

が得られる。よって

$$U = \begin{cases} \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a \left\{ \left(\frac{m}{\frac{u_{mn}r}{a}}\right)^2 J_m^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + J_m'^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} r dr & (p \neq 0) \\ \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{2} \int_0^a \left\{ \left(\frac{m}{\frac{u_{mn}r}{a}}\right)^2 J_m^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) + J_m'^2\left(\frac{u_{mn}r}{a}\right) \right\} r dr & (p = 0) \end{cases}$$

となるが、積分の計算は P_1 の場合と同様であることに注意すれば

$$U = \begin{cases} \frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{8} J_m'^2(u_{mn}) & (p \neq 0) \\ \frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{4} J_m'^2(u_{mn}) & (p = 0) \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

が得られる。

Q 値の計算

(A.35) より

$$Q = \omega_{mnp} \frac{U}{2P_1 + P_2}$$

なので、これらに (A.41)(A.42)(A.43) を代入して

(i) $p \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} Q &= \omega_{mnp} \frac{\frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{8} J_m'^2(u_{mn})}{2 \times \frac{R_s H_0^2 \pi a^2}{4} J_m'^2(u_{mn}) + \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{4} J_m'^2(u_{mn})} \\ &= \omega_{mnp} \frac{\mu a}{4R_s \frac{a}{d} + 2R_s} \end{aligned}$$

となる。ここで (A.36)(A.37) より

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_{mnp}}{2\sigma}} = \frac{\mu_0 \omega_{mnp} \delta}{2}$$

であるから、これを代入して整理すると

$$Q = \frac{a}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{2a}{d}}$$

となる。

(ii) $p=0$ のとき同様にして

$$\begin{aligned} Q &= \omega_{mnp} \frac{\frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{4} J_m'^2(u_{mn})}{2 \times \frac{R_s H_0^2 \pi a^2}{4} J_m'^2(u_{mn}) + \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{2} J_m'^2(u_{mn})} \\ &= \omega_{mnp} \frac{\mu a}{2R_s \frac{a}{d} + 2R_s} \\ &= \frac{a}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{a}{d}} \end{aligned}$$

以上 (i)(ii) をまとめると、TMmode の Q 値が得られる。

$$Q = \begin{cases} \frac{a}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{2a}{d}} & (p \neq 0) \\ \frac{a}{\delta} \frac{1}{1 + \frac{a}{d}} & (p = 0) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

TEmode

TEmode も TMmode と同様に計算する。

$$z = 0 \text{ のとき } \begin{cases} H_r|_{z=0} = \frac{p\pi}{d} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp} J_m' \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \cos(m\theta) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_\theta|_{z=0} = -\frac{p\pi}{d} \frac{m a^2}{r u_{mn}'^2} H_{mnp} J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \sin(m\theta) e^{i\omega_{mnp} t} \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

$$z = d \text{ のとき } \begin{cases} H_r|_{z=d} = \pm H_r|_{z=0} & (p: \text{odd} \rightarrow -, \text{even} \rightarrow +) \\ H_\theta|_{z=d} = \pm H_\theta|_{z=0} & (p: \text{odd} \rightarrow -, \text{even} \rightarrow +) \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

$$r = a \text{ のとき } \begin{cases} H_\theta|_{r=a} = -\frac{p\pi}{d} \frac{m a^2}{r u_{mn}'^2} H_{mnp} J_m(u'_{mn}) \sin(m\theta) \cos\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \\ H_z|_{r=a} = H_{mnp} J_m(u'_{mn}) \cos(m\theta) \sin\left(\frac{p\pi}{d} z\right) e^{i\omega_{mnp} t} \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

なので

$$H_0 = \frac{p\pi}{d} \frac{a}{u'_{mn}} H_{mnp}$$

と置く。

TMmode と同じく $z = 0, z = d$ での壁面での損失を P_1 、 $r = a$ での壁面での損失を P_2 とする。

P_1 の計算

$$P_1 = \frac{R_s}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \left| H_r|_{z=0} \right|^2 + \left| H_\theta|_{z=0} \right|^2 r d\theta dr$$

である。まず θ の積分は

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(m\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(m\theta) d\theta = \pi$$

であることに注意するとただちに計算することができて

$$P_1 = \frac{R_s}{2} H_0^2 \pi \int_0^a \left\{ \left(\frac{m}{u'_{mn} r} \right)^2 J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) + J_m'^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right\} r dr$$

となる。(A.52) から TMmode と同様の变形をすると

$$P_1 = \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \int_0^a \left\{ r J_{m-1}^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) + r J_{m+1}^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right\} dr$$

となり、さらに TMmode と同様の計算をすると

$$P_1 = \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi \left[\frac{r^2}{2} \left\{ - \left(J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right) \left(J_{m-2} \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right) + J_{m-1}^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{r^2}{2} \left\{ - \left(J_{m+2} \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right) \left(J_m \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right) + J_{m+1}^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right\} \right]_0^a$$

が得られる。ここで (A.53) より $J'_m(u'_{mn}) = 0$ に注意すると

$$J_{m-1}(u'_{mn}) = J_{m+1}(u'_{mn}) = \frac{m}{u'_{mn}} J_m(u'_{mn}) \\ J'_{m-1}(u'_{mn}) = \frac{m-1}{u'_{mn}} J_{m-1}(u'_{mn}) - J_m(u'_{mn}) = \frac{m(m-1)}{u_{mn}^2} J_m(u'_{mn}) - J_m(u'_{mn}) \\ J'_{m+1}(u'_{mn}) = -\frac{m+1}{u'_{mn}} J_{m-1}(u'_{mn}) + J_m(u'_{mn}) = -\frac{m(m+1)}{u_{mn}^2} J_m(u'_{mn}) + J_m(u'_{mn}) \\ J_{m-2}(u'_{mn}) = J'_{m-1}(u'_{mn}) + \frac{m-1}{u'_{mn}} J_{m-1}(u'_{mn}) = \frac{2m(m-1)}{u_{mn}^2} J_m(u'_{mn}) - J_m(u'_{mn}) \\ J_{m+2}(u'_{mn}) = -J'_{m+1}(u'_{mn}) + \frac{m+1}{u'_{mn}} J_{m+1}(u'_{mn}) = \frac{2m(m+1)}{u_{mn}^2} J_m(u'_{mn}) - J_m(u'_{mn})$$

であるから

$$P_1 = \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi a^2 \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}^2} \right) J_m^2(u'_{mn}) \right\} \quad (\text{A.48})$$

 P_2 の計算

$$P_2 = \frac{R_s}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^d \left| H_\theta|_{r=a} \right|^2 + \left| H_z|_{r=a} \right|^2 a d\theta dz \\ = \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{4} J^2(u'_{mn}) \left\{ \left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 + \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{a}} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.49})$$

U の計算

$$U = \frac{\mu_0}{2} \int_0^d \int_0^{2\pi} \int_0^R |H_r|^2 + |H_\theta|^2 + |H_z|^2 r dr d\theta dz = U_r + U_\theta + U_z$$

となる。ここでそれぞれの磁場は (A.31) より得られるのでそれぞれ計算すると、 θ と z の積分は容易に行えるので

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a J_m'^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) r dr \\ U_\theta &= \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a \left(\frac{m}{\frac{u'_{mn} r}{a}} \right)^2 J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) r dr \\ U_z &= \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d} a} \right)^2 \int_0^a J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) r dr \end{aligned}$$

が得られる。よって

$$U = \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \int_0^a \left\{ \left(\frac{m}{\frac{u'_{mn} r}{a}} \right)^2 J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) + J_m'^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) \right\} r dr + \frac{\mu_0 H_0^2 \pi d}{4} \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d} a} \right)^2 \int_0^a J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) r dr$$

となる。第一項の積分の計算は P_1 の場合と同様である。第二項の積分はロンメル積分公式 (A.56) よりただちに

$$\int_0^a J_m^2 \left(\frac{u'_{mn} r}{a} \right) r dr = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) J_m^2(u'_{mn})$$

となることがわかる。以上より

$$U = \frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{8} \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) J_m^2(u'_{mn}) \left\{ 1 - \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d}} \right)^2 \right\} \quad (\text{A.50})$$

が得られる。

Q 値の計算

(A.48)(A.49)(A.50) より

$$\begin{aligned} Q &= \omega_{mnp} \frac{\frac{\mu_0 H_0^2 \pi a^2 d}{8} \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) J_m^2(u'_{mn}) \left\{ 1 - \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d}} \right)^2 \right\}}{2 \times \frac{R_s}{4} H_0^2 \pi a^2 \left\{ \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) J_m^2(u'_{mn}) \right\} + \frac{R_s H_0^2 \pi a d}{4} J_m^2(u'_{mn}) \left\{ \left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 + \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d} a} \right)^2 \right\}} \\ &= \omega_{mnp} \frac{\mu a \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d}} \right)^2 \right\}}{4 R_s \frac{a}{d} \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) + 2 R_s \left\{ \left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 + \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d} a} \right)^2 \right\}} \end{aligned}$$

となるので、(A.36)(A.37) より δ を用いて表せば TE mode の Q 値が得られる。

$$Q = \frac{a}{\delta} \frac{\left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right) \left\{ 1 - \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d}} \right)^2 \right\}}{\left(\frac{m}{u'_{mn}} \right)^2 + \left(\frac{u'_{mn}}{\frac{p\pi}{d} a} \right)^2 + \frac{2a}{d} \left(1 - \frac{m^2}{u_{mn}'^2} \right)} \quad (\text{A.51})$$

ベッセル方程式の解

一般にベッセル方程式

$$\frac{d^2 R(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dR(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) R(z) = 0$$

の解は以下のように表す事ができる。

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

これより以下の漸化式が成り立つ

$$\begin{cases} J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) \\ J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z) \end{cases} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{cases} zJ'_\nu(z) + \nu J_\nu(z) = zJ_{\nu-1}(z) \\ zJ'_\nu(z) - \nu J_\nu(z) = -zJ_{\nu+1}(z) \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

また

$$J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z) \quad (\text{A.54})$$

が成り立つ。

下図は $\nu = 0, 1$ の解である。 $z=0$ で 0 でない値を持つのは $\nu = 0$ のみである。これらの根は表のようになる。

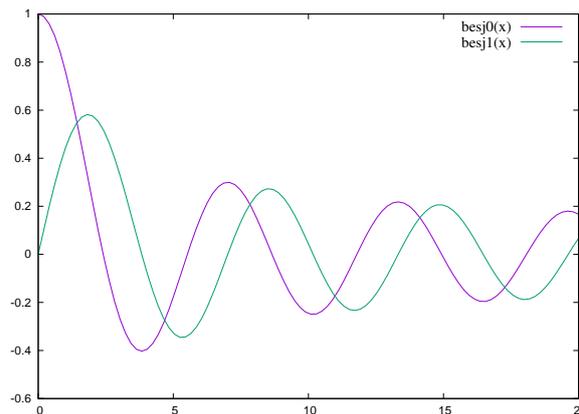


図 A.4 ベッセル関数 J_0, J_1

さらにロンメルの積分公式というものが存在する。

$$\int_0^z z' J_\nu(\alpha z') J_\nu(\beta z') dz' = \frac{z}{\alpha^2 - \beta^2} \left[J_\nu(\alpha z) \left(\frac{d}{dz} J_\nu(\beta z) \right) - J_\nu(\beta z) \left(\frac{d}{dz} J_\nu(\alpha z) \right) \right] \quad (\text{A.55})$$

$$\int_0^z z' \left[J_\nu(\alpha z') \right]^2 dz' = \frac{z^2}{2} \left[\frac{1}{\alpha^2} \left\{ \frac{d}{dz} J_\nu(\alpha z) \right\}^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 z^2} \right) \left\{ J_\nu(\alpha z) \right\}^2 \right] \quad (\text{A.56})$$

ν/n	1	2	3
0	2.405	5.520	8.654
1	3.832	7.016	10.173
2	5.136	8.417	11.620

表 A.1 $J_\nu(z)$ の n 番目の根

ν/n	1	2	3
0	3.832	7.016	10.173
1	1.841	5.331	8.536
2	3.054	6.706	9.969

表 A.2 $J'_\nu(z)$ の n 番目の根