

SUSY探索実験 サマリー

実験・理論合同研究会 LHCが切り拓く新しい物理

2009年4月2日@東京大学

金谷奈央子(東大・ICEPP)

アウトライン

◆イントロダクション

- LHCにおけるSUSY信号
- 事象選択

◆ATLAS検出器において期待される結果

- 予想されるバックグラウンド
- 期待される発見能力@ATLAS実験

◆発見後の解析手法

- inclusive測定
- exclusive測定

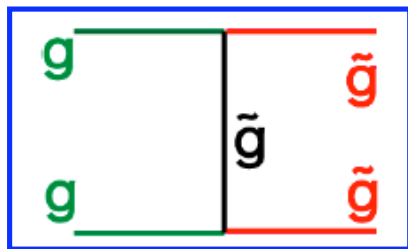
◆まとめ

イントロダクション

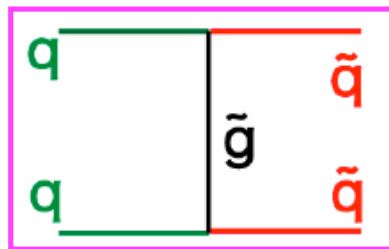
SUSY生成@LHC

LHCは陽子-陽子衝突加速器なのでクォークとグルーオンから t -チャンネルを介したカラーをもった超対称性粒子($\tilde{q}$, $\tilde{g}$)の生成が得意である。

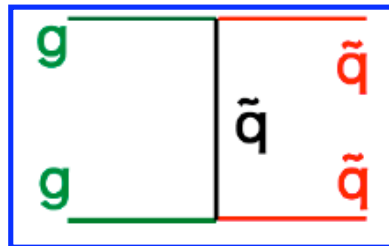
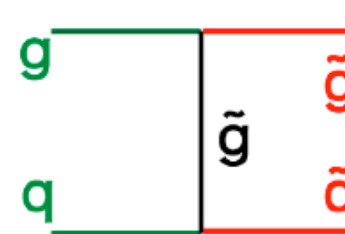
$\tilde{g}\tilde{g}$ 対生成



$\tilde{q}\tilde{q}$ 対生成



$\tilde{q}\tilde{g}$ 随伴生成



- 生成断面積はほぼカラー粒子の質量で決定される
- 主な生成過程($m_{\tilde{q}} \sim m_{\tilde{g}}$ の場合)
- $\sqrt{s'} = \sqrt{x_1 x_2} \sqrt{s}$ 14TeV

重い粒子を作る時には x のアンバランスは小さい $\rightarrow$ 中心(η 小)に分布

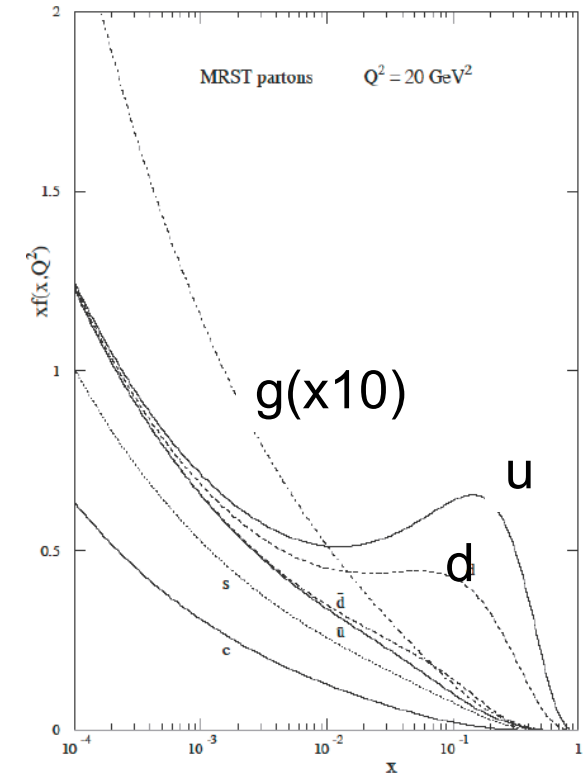


Fig. 3. MRST partons at $Q^2 = 20 \text{ GeV}^2$

質量
0.5TeV
1TeV
2TeV

生成断面積
100pb
3pb
10fb

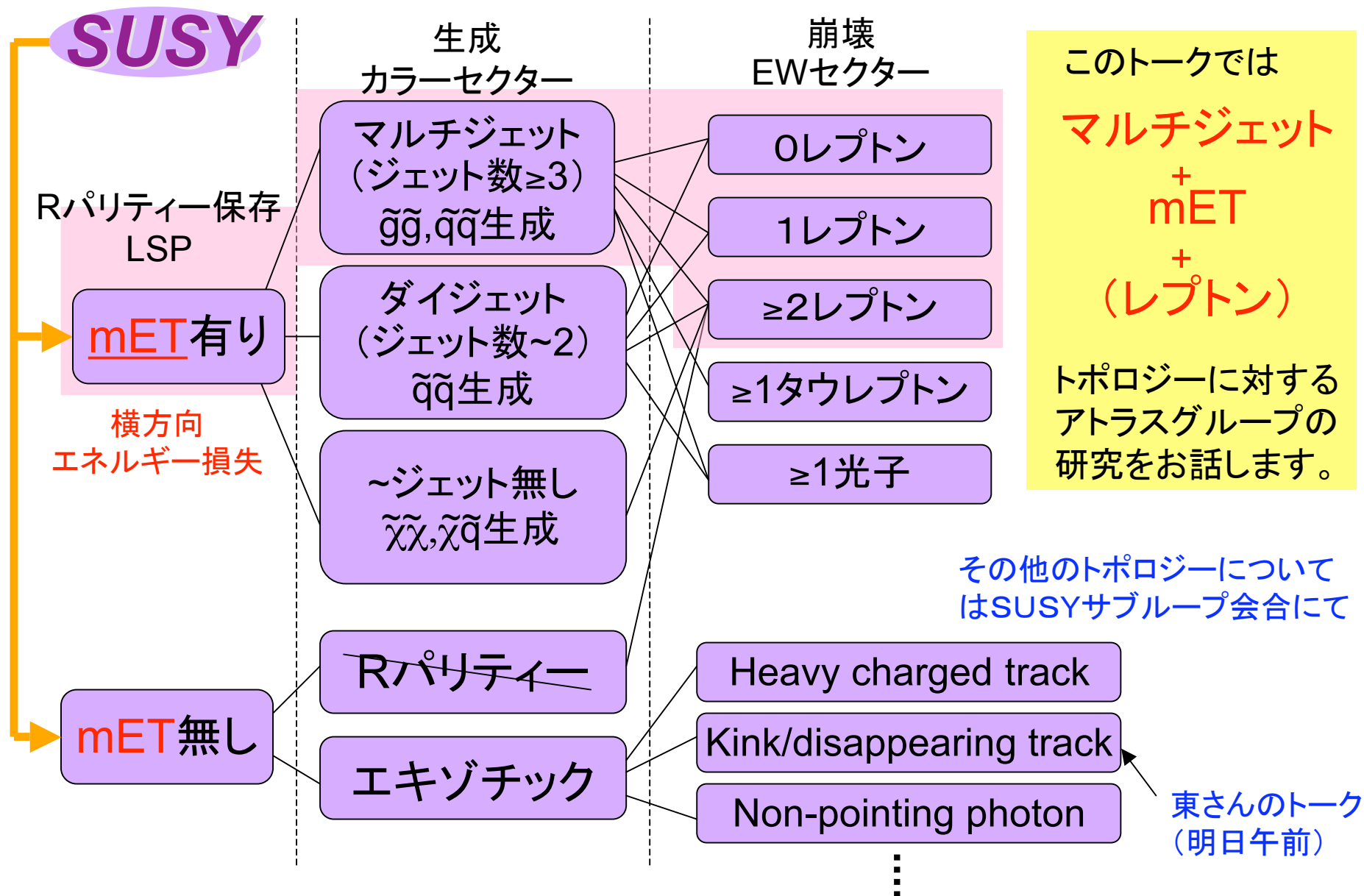
生成過程
 $\tilde{g}\tilde{g}$
 $\tilde{q}\tilde{g}, \tilde{q}\tilde{q}$
 $\tilde{q}\tilde{q}$

SUSY崩壊

- 主な崩壊過程は
- 質量スペクトラム (第三世代)
 - チャージーノ、ニュートラリーノの成分 などに強く依存する。

	$m(\tilde{g}) < m(\tilde{q})$	$m(\tilde{g}) \approx m(\tilde{q})$	$m(\tilde{g}) > m(\tilde{q})$
$\tilde{g}$	$\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{B}^0 (\approx 1)$ $\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{W}^0 (\approx 2)$ $\tilde{g} \rightarrow q\bar{q}\tilde{W}^\pm (\approx 4)$		
		$\tilde{g} \rightarrow t\bar{t}_1$ $\tilde{g} \rightarrow b\bar{b}_1$	これらの崩壊レートが レプトンの有無に寄与
$\tilde{q}_L$	$\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{g}$	$\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{W}^0 (\approx 1)$ $\tilde{q}_L \rightarrow q\tilde{W}^\pm (\approx 2)$	
$\tilde{q}_R$	$\tilde{q}_R \rightarrow q\tilde{g}$	$\tilde{q}_R \rightarrow q\tilde{B}^0$	

SUSY事象@LHC



事象選択

特に実験初期、発見を
確実にするため結果の
信頼度をあげることが重要

- シンプル(系統誤差を押さえる)
- 感度($S/\sqrt{B}$)を大きくする $\Rightarrow$ 鍵となる観測量 = mET
- ある特定なSUSYのモデルに最適化しない

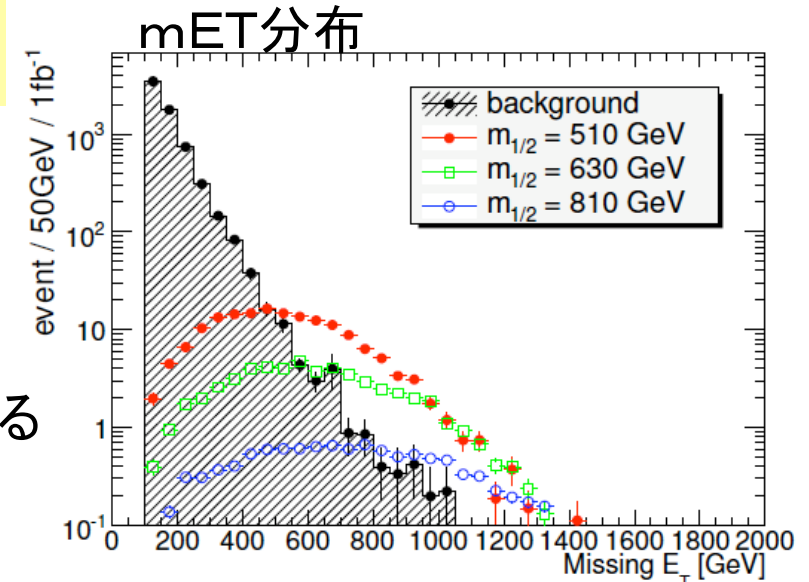
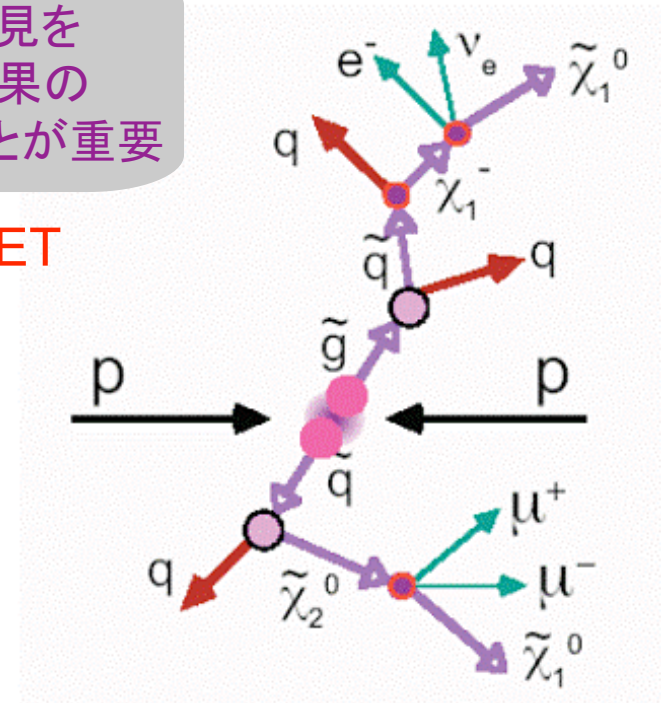
ジェット + mET + (X) に対する
ATLAS'スタンダード'の事象選択

- $N_{JET} \geq 3$
- $p_{T}^{1st JET} > 100 \text{ GeV}$, $p_{T}^{3rd JET} > 50 \text{ GeV}$, $|\eta| < 2.5$
- $mET > 100 \text{ GeV}$
- $mET > 0.2 \times M_{eff}$ ($M_{eff} = \sum |p_{T}| + mET$)
- $s_T > 0.2$ ($s \rightarrow 1$ ほど丸い事象)

横方向エネルギー損失: mET (右図)

$$mET(x, y) = -\sum E(x, y)_{cell} - \sum p(x, y)_{muon}$$

レプトンの有無でバックグラウンドの成分が異なる
 $\rightarrow$ 解析をレプトン数で分類し、それぞれに適した
カットを導入(次ページ)。

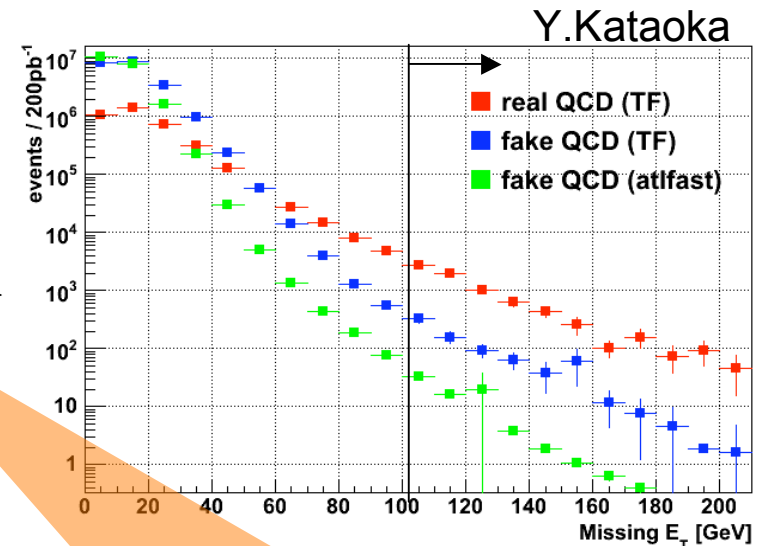


LHCで期待される結果

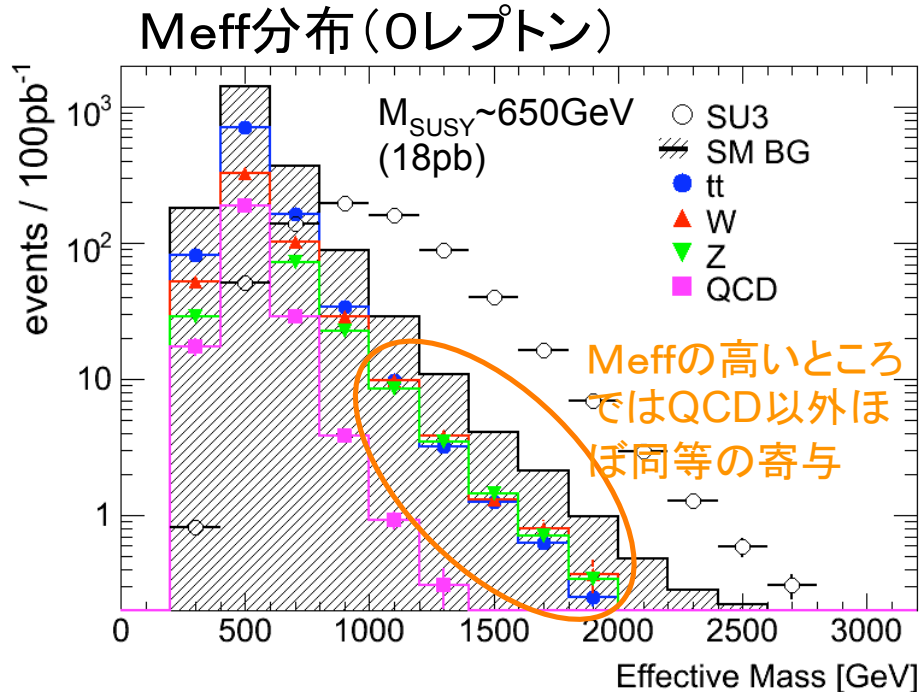
バックグラウンド 0-lepton mode

“0レプトンモード”事象選択

- $N_{\text{JET}} \geq 3$
- $p_{\text{T}}^{\text{1st JET}} > 100 \text{ GeV}$, $p_{\text{T}}^{\text{3rd JET}} > 50 \text{ GeV}$
- $m\text{ET} > 100 \text{ GeV}$
- $m\text{ET} > 0.2 M_{\text{eff}}$ ($M_{\text{eff}} = \sum |p_{\text{T}}| + m\text{ET}$)
- $\Delta\phi(m\text{ET-jet}) > 0.2$ for leading three jets
- $s_{\text{T}} > 0.2$



フェイクmETを伴った不定性の大きいQCDバックグラウンドを落とすのに有効



MCシミュレーションにより予想されるSMバックグラウンドのMeff分布(左)と内訳(下)

tt
W+njet
Z+njet
QCD

49%
24%
16%
11%

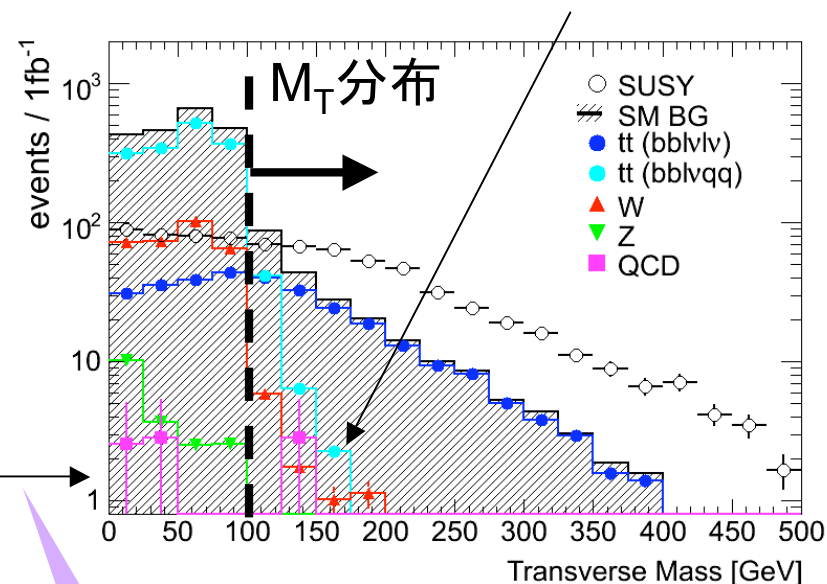
詳細は次の片岡さんのトーク

バックグラウンド 1-lepton mode

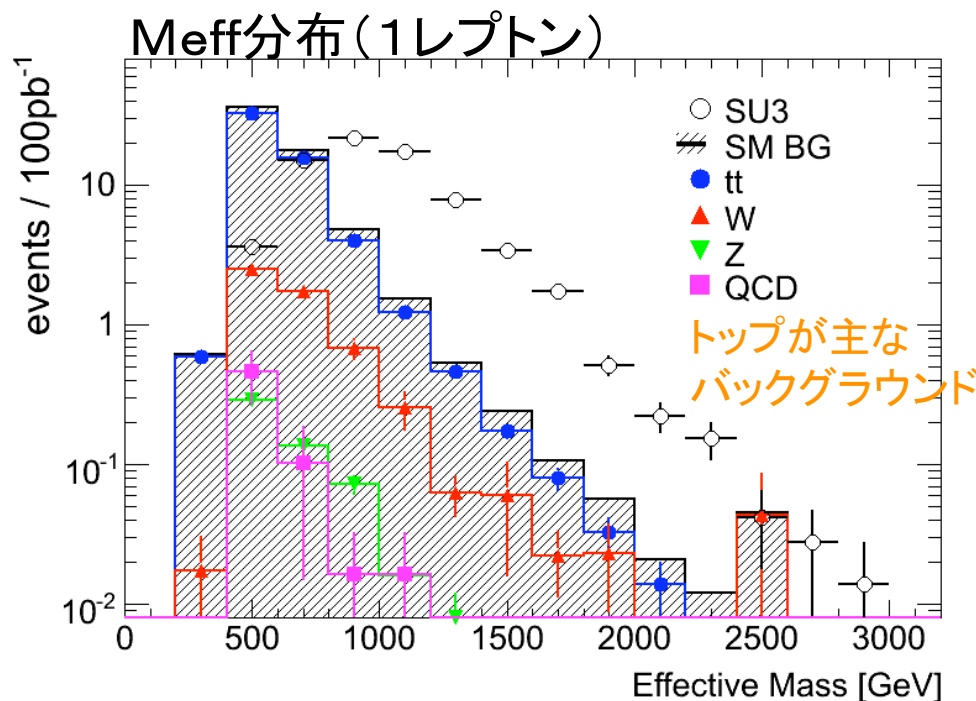
“1レプトンモード”事象選択

- $N_{\text{JET}} \geq 3$
- $p_{\text{T}}^{\text{1st JET}} > 100 \text{ GeV}$, $p_{\text{T}}^{\text{3rd JET}} > 50 \text{ GeV}$
- $m\text{ET} > 100 \text{ GeV}$
- $m\text{ET} > 0.2 M_{\text{eff}}$ ($M_{\text{eff}} = \sum |p_{\text{T}}| + m\text{ET}$)
- $s_{\text{T}} > 0.2$
- $N_{\text{e,mu}} = 1$ ($p_{\text{T}} > 20 \text{ GeV}$, isolated)
- $m_{\text{T}}(m\text{ET}, \text{lepton}) > 100 \text{ GeV}$

bジェット
フェイクmET



W(lv)、tt(lvqq) 事象を抑制するのに有効。
主に残るのはtt(lvlv)。



MCシミュレーションにより予想されるSM
バックグラウンドのMeff分布(左)と内訳(下)

tt
W+njet

89%
10%

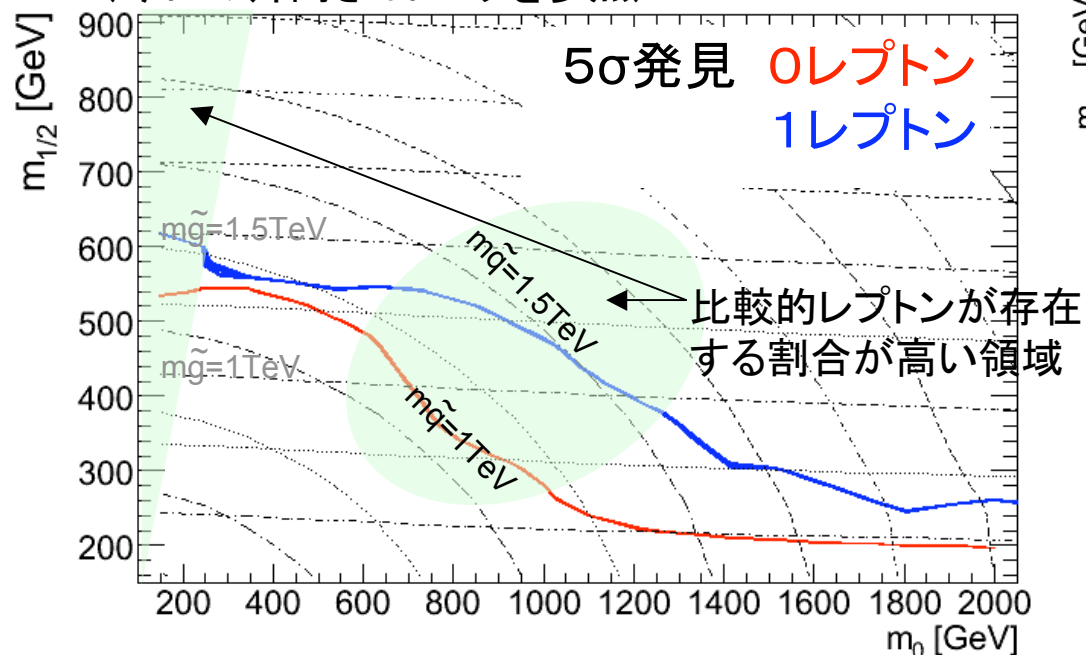
期待される発見能力(1)

1 fb⁻¹@14TeV
(2011年-?)

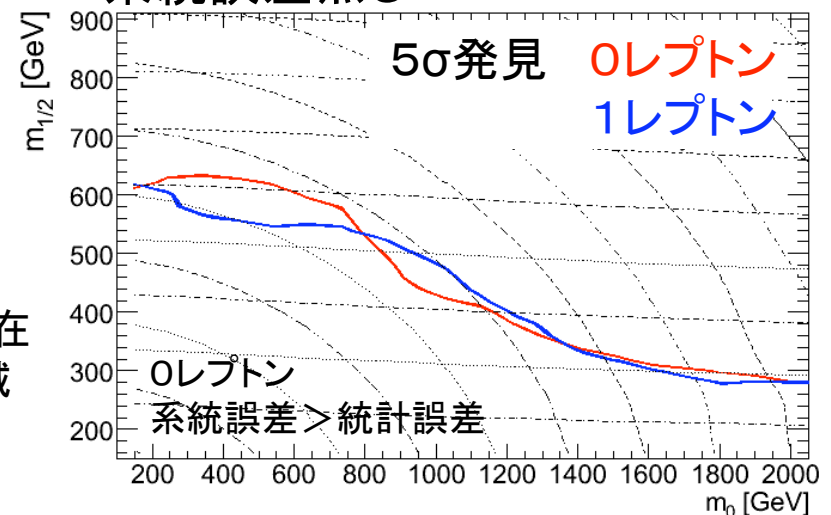
mSUGRAを仮定した場合、期待される発見能力

- ISAJET7.74 + Herwig, $\tan\beta=10$, $A_0=0$, $\mu>0$ and $M_t=175\text{GeV}$
- 簡易検出器シミュレーション+パラメタリゼーション
- 有意度: cousins&Highland treatment : $p\text{-value}<2.9\text{E-}^7$ ($=5\sigma$)
- mET scan={200,300,400,500GeV} (no correction for multiple testing)

バックグラウンド推定の系統誤差 $\sim 30\%$
(今日の片岡さんトークを参照)



系統誤差無し

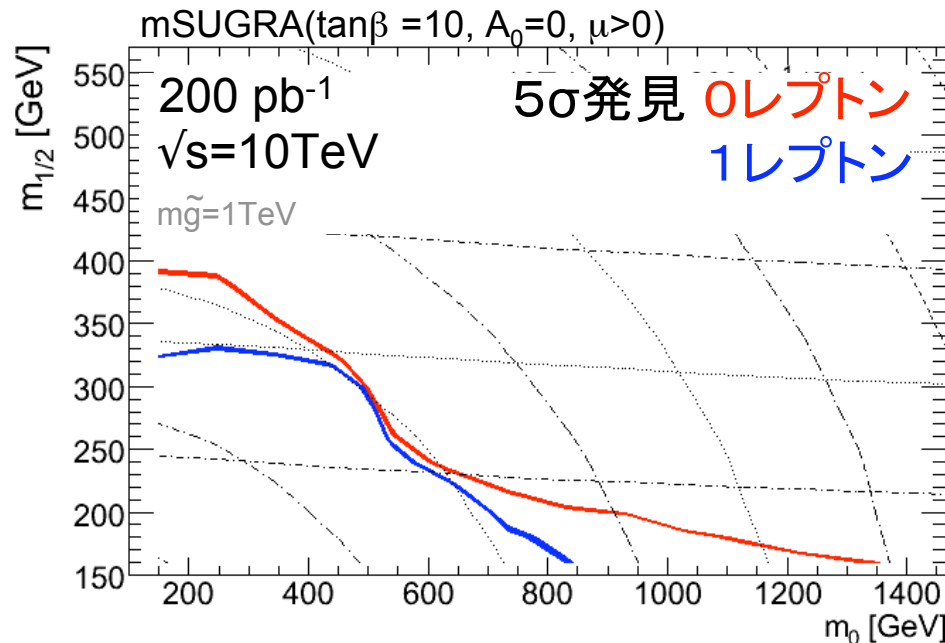


1レプトン発見能力(1fb-1@14TeV)

- $m\tilde{g}\sim 1.3\text{TeV}$ ($m\tilde{q}\sim m\tilde{g}$ の場合)
- $m\tilde{g}\sim 0.8\text{TeV}$ ($m\tilde{q}\sim 2m\tilde{g}$ の場合)

期待される発見能力(2)

200 pb⁻¹@10TeV
(2009年-2010年)



5 σ 発見能力(0レプトン、200pb⁻¹)

発見能力 with 200pb⁻¹@10TeV

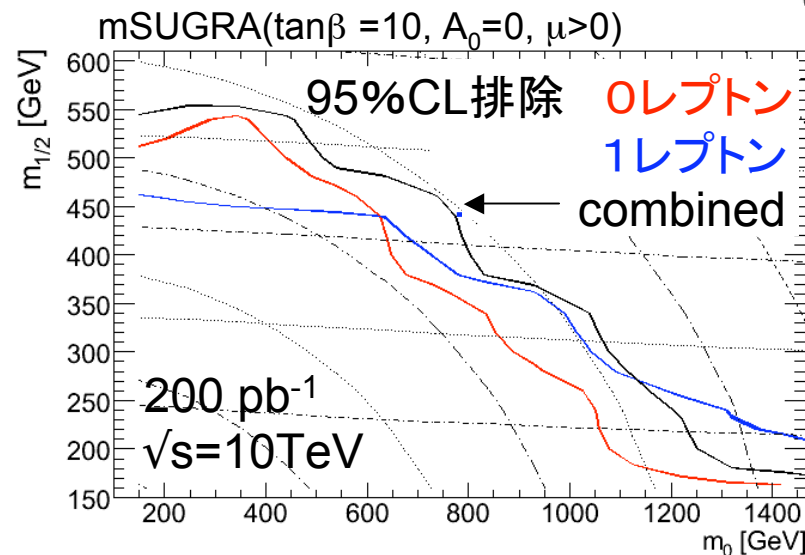
- $m_{\tilde{q}} \sim 850\text{GeV}$ ($m_{\tilde{q}} \sim m_{\tilde{g}}$ の場合)
- $m_{\tilde{g}} \sim 500\text{GeV}$ ($m_{\tilde{q}} \sim 2m_{\tilde{g}}$ の場合)

95%信頼度で棄却(combined, 100pb⁻¹)

Binned LLR ($CL_s = CL_{s+b}/CL_s$)

棄却能力 with 100pb⁻¹@10TeV

- $m_{\tilde{q}} \sim 1.2\text{TeV}$ ($m_{\tilde{q}} \sim m_{\tilde{g}}$ の場合)
- $m_{\tilde{g}} \sim 600\text{GeV}$ ($m_{\tilde{q}} \sim 2m_{\tilde{g}}$ の場合)



DO実験(PLB660,449(2008)2.1pb⁻¹)

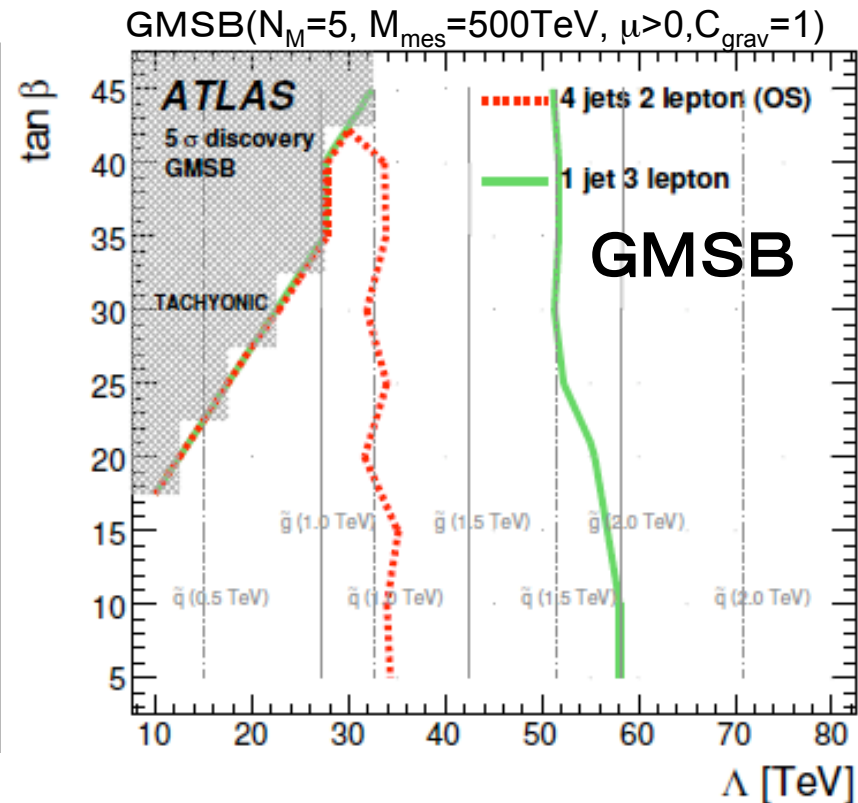
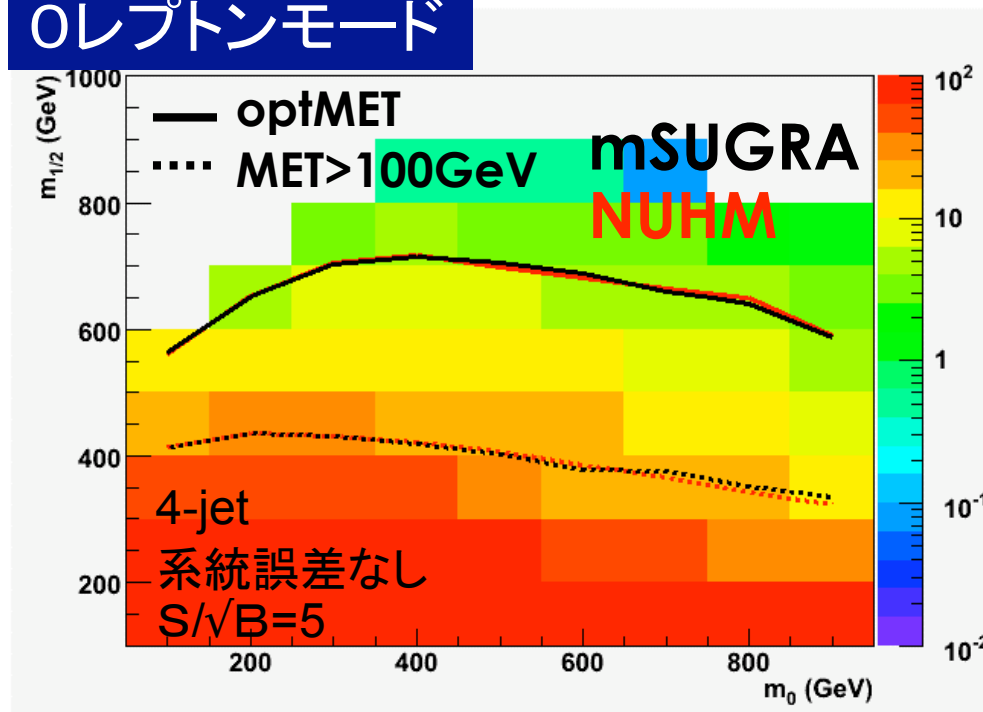
- $m_{\tilde{g}} \sim 392\text{GeV}$ ($m_{\tilde{q}} \sim m_{\tilde{g}}$ の場合)
- $m_{\tilde{g}} \sim 327\text{GeV}$ ($m_{\tilde{q}} > 2m_{\tilde{g}}$ の場合)

(但し $\mu < 0, \tan\beta = 3$)

期待される発見能力(3)

他のSUSYモデルでの解釈

0レプトンモード



- ◆EWゲージノセクターの違いはさほど発見能力に影響がない
- ◆レプトンを含む崩壊比の違いにより発見能力に差が生じる。
- ◆ $M_1:M_2:M_3$ 比の違い(AMSB, KKLT等)は発見能力に大きく影響する。

発見後の解析・測定

SUSYの測定

質量スペクトラム、スピン測定などの結果(十分なルミノシティが必要)が得られるまで観測された事象がSUSY起源なのか不明。

発見後の測定 (inclusive & exclusive)

ある特定の崩壊パターンを
エンハンスするようなカットをかける

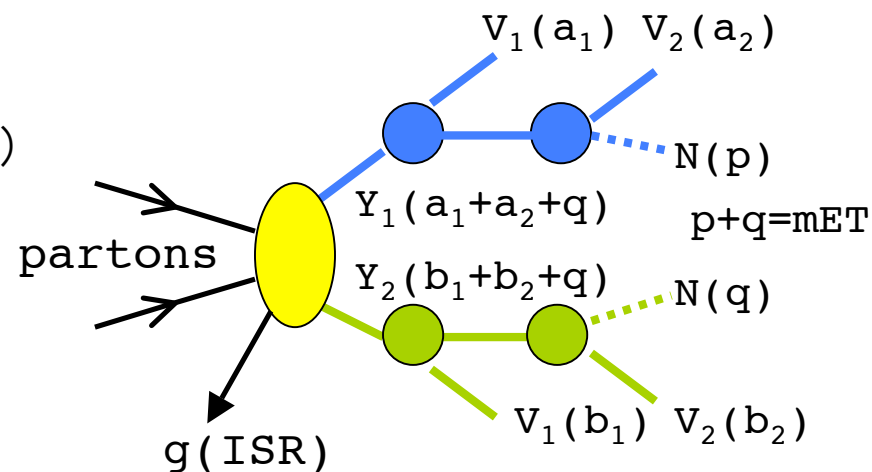
質量測定

SUSYの質量測定は以下の点で難しい

- エネルギー損失(横方向のみ、分解能が悪い)
- 2ニュートラリーノ
- 崩壊粒子の割り当て ($V_i \rightarrow Y_{1,2}$) 問題、ISR

様々な測定方法が提案されている。

- inclusive(ad-hoc) measurement
- transverse mass end-point ($m_T \leq m$)
- invariant mass technique



生成断面積測定

質量測定とのクロスチェック

その他?

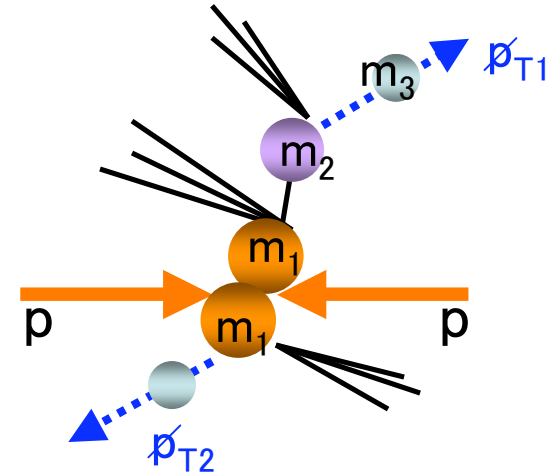
Effective Mass (M_{eff})

定義

$$M_{\text{eff}} = \sum_{k=0}^{N_{\text{jet}}} |p_{T(k)}| + mET$$

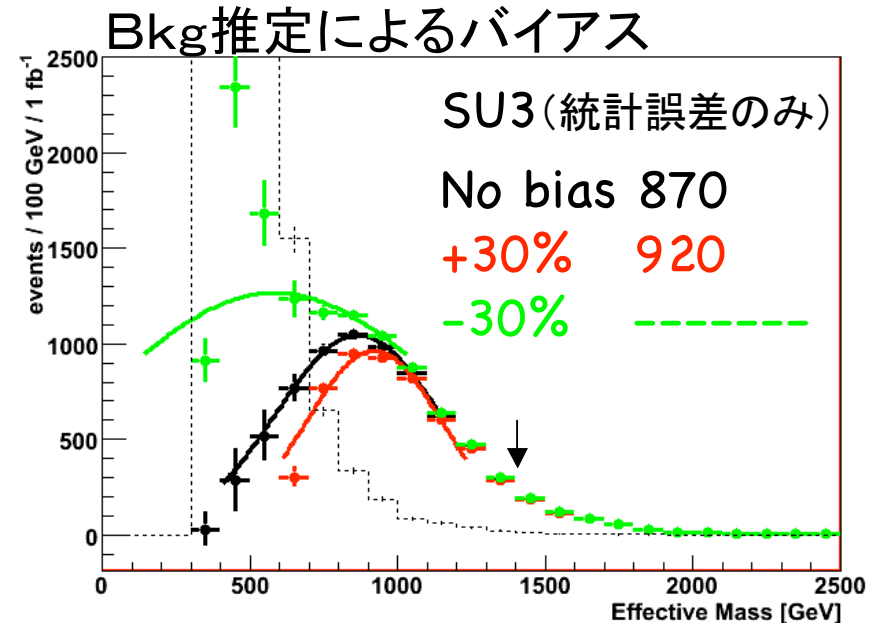
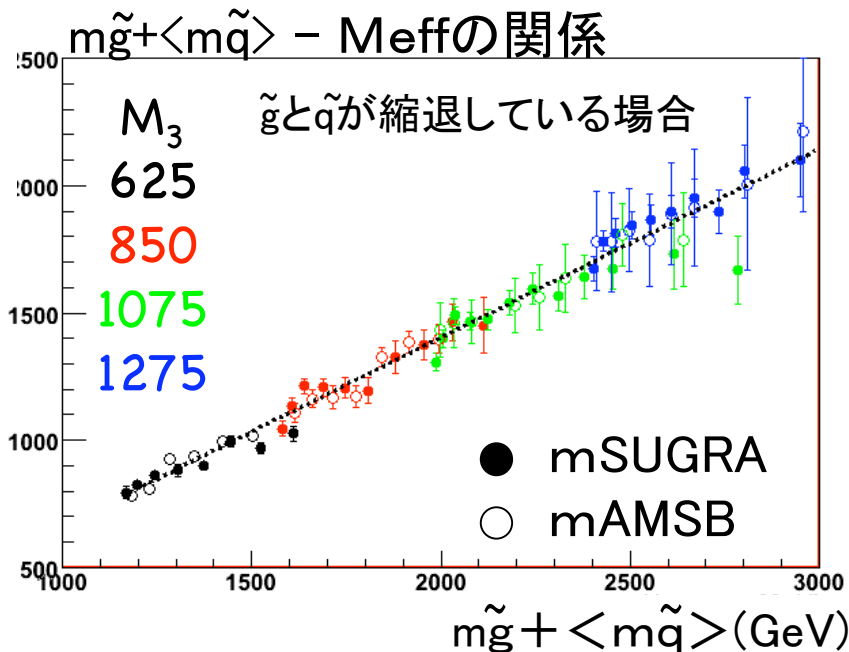
$$p_T < p \sim \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1}$$

$$mET \approx p_{T1} + p_{T2}$$



M_{eff} は最初に対生成された粒子の質量に対して相関を持っている。

- 質量への焼き直しが直接的でない(ブースト不変でない)
- ピークがあるが、かなり広い分布
- M_{eff} が小さいとバックグラウンド推定の不定性(絶対値・スロープ)の影響大。

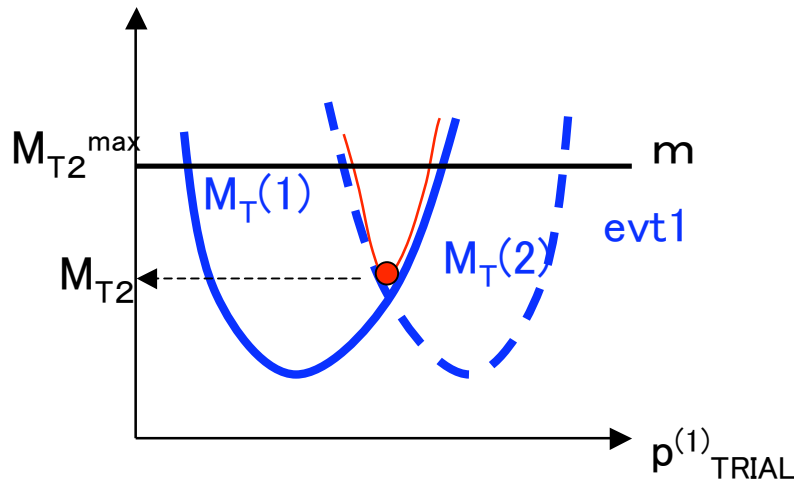


M_{T2} - stransverse mass -

より解析的(解釈が直接的)な測定量。
個々のLSPの運動量($p_T^{\chi(1)\text{or}(2)}$)は分からないが
その和は $\sim m_{ET}$ (=測定可能)

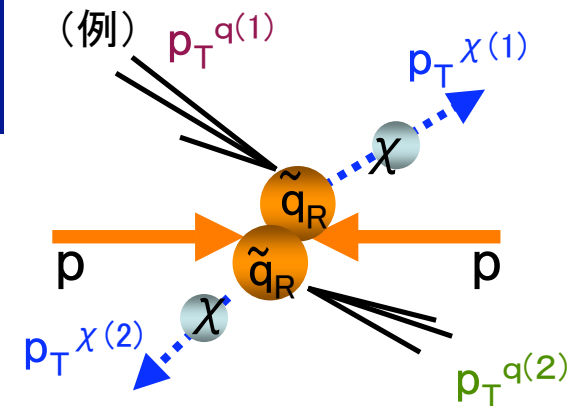
定義 テスト χ 質量

$$mT2(m_\chi) \equiv \min_{p_T^{\chi(1)} + p_T^{\chi(2)} = m_{ET}} \left[\max \left\{ m_T^2(p_T^{q(1)}, p_T^{\chi(1)}; m_\chi), m_T^2(p_T^{q(2)}, p_T^{\chi(2)}; m_\chi) \right\} \right]$$

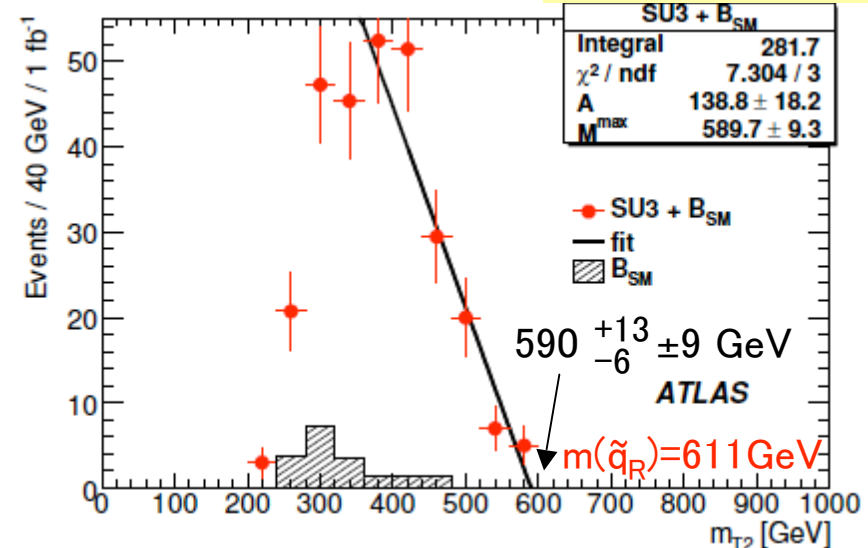


$$m_{T2}(\chi)^{\max} = m(q_{\tilde{R}})$$

多くの場合、LSP質量は事前には不明
→ $m_{T2}(\chi_{\text{test}})^{\max}$ は $(m_{q_{\tilde{R}}}, m_{\tilde{\chi}})$ の関数。
 $\tilde{m}_{qR} - m_\chi$



$m_{T2}(\chi^{\text{true}})$ 分布

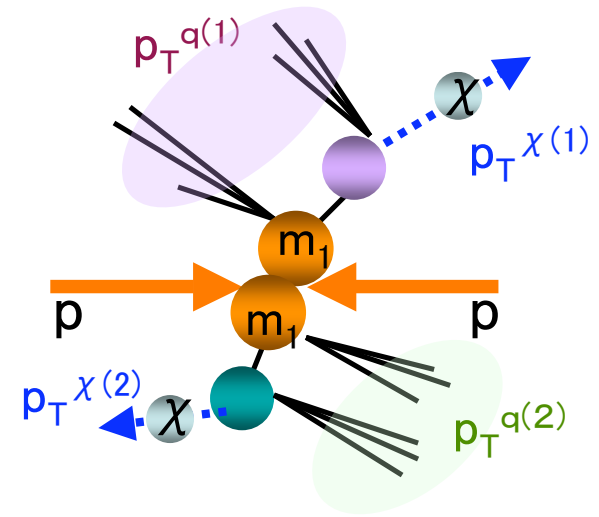


- 短い対称崩壊チェーンの同定(上図)
- 統計(両側同じ崩壊チェーン)が必要
- テスト質量≠LSP質量でない場合は横方向ブースト(ISR)に対して不変ではない。

Inclusive M_{T2} , $M_{T\text{Gen}}$

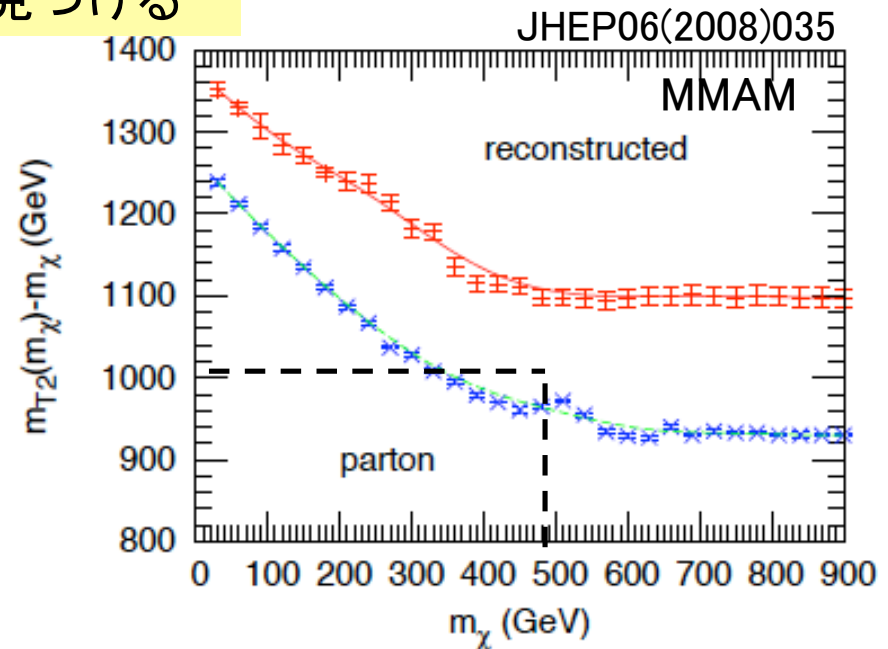
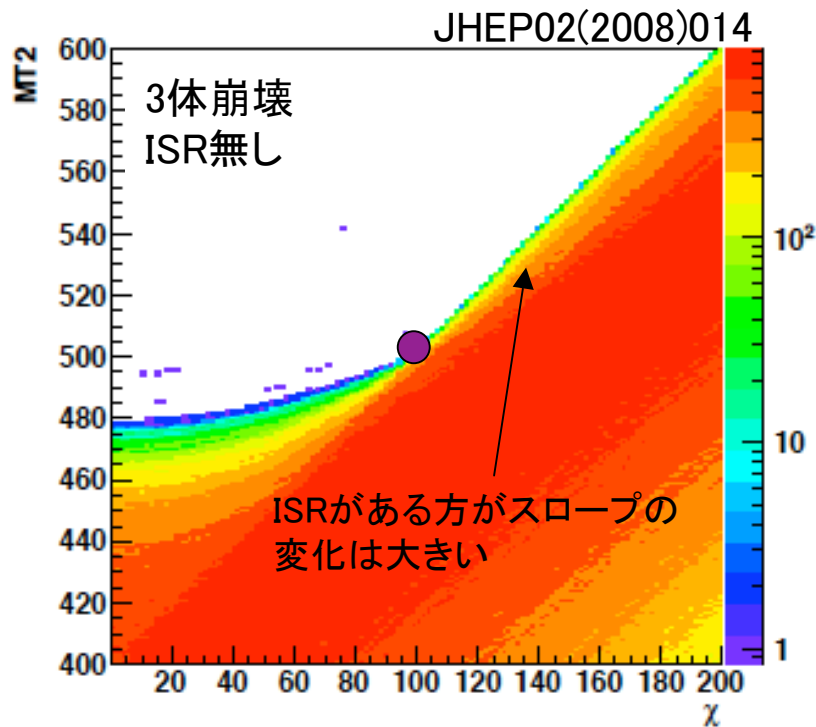
Inclusiveに m_{T2} を計算。統計に関して有利。

- ハードプロセスから生じた粒子を2グループに分ける際に生じる間違い。
- 最初に生成される粒子群の質量差(スミアリング、テール)。
- ISRを含んでしまう、崩壊から生じた粒子を見逃す。



M_{2T} のテスト χ 質量の依存性

→テスト χ 質量をスキャンして $\chi(\text{true})$ を見つける



精密測定でなくとも初期にLSPの質量に制限がつけられないか？

M_{CT} - contraverse mass -

JHEP0804(2008)034

$\tilde{q}_R$ の静止系において $p_T(q_1)$ が $\tilde{q}_R$ と χ_0 の質量の
情報をもっている

$$p_T \leq p_T^{\max} = \frac{m^2(q_R) - m^2(\chi)}{2m(q_R)} \quad (\text{Jetの質量}=0)$$

p_T のブースト不変でない、また q_R の静止系
も不明。

contra-linear boost: 2つのシステムを
同じ大きさに逆方向へブーストさせる

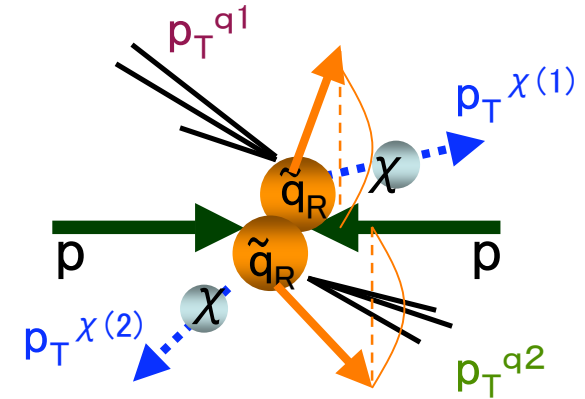
定義

$$M_{CT}^2 \equiv [E_T(q_1) + E_T(q_2)]^2 - [\vec{P}_T(q_1) - \vec{P}_T(q_2)]^2$$

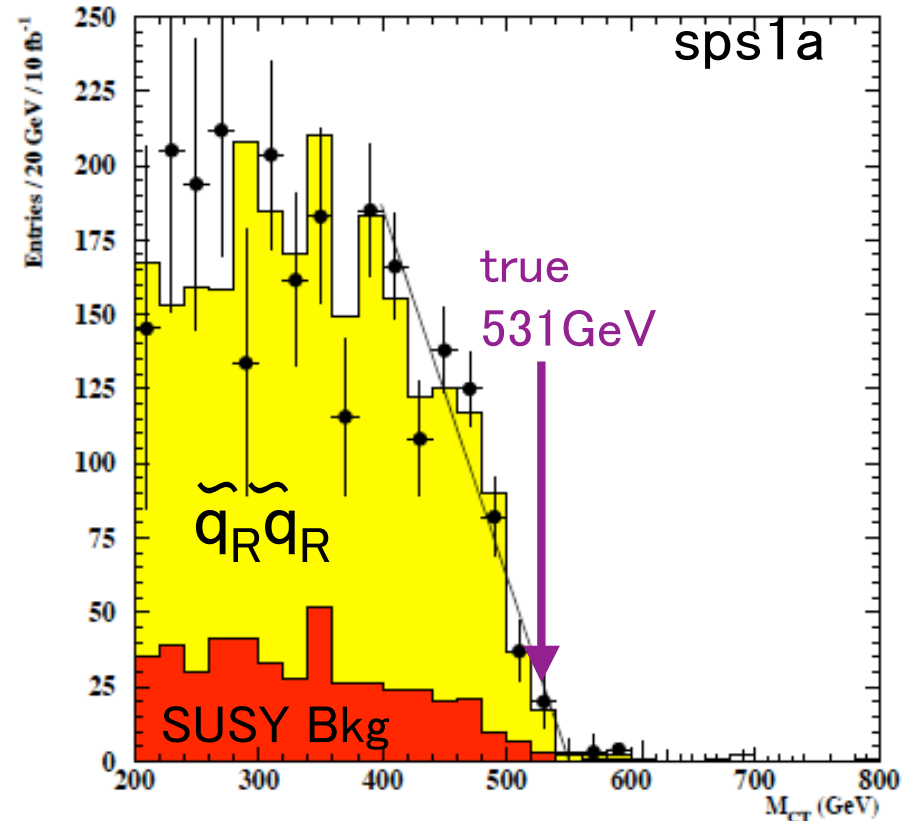
M_{CT} はcontra-linear boost不変。

$$M_{CT}^{\max} = 2p_T^{\max} = \frac{m^2(q_R) - m^2(\chi)}{m(q_R)}$$

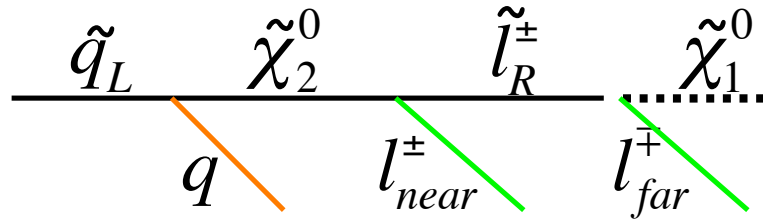
ISRがある場合は不変でない。



バックグラウンドを差し引いた後



Invariant mass technique (1)

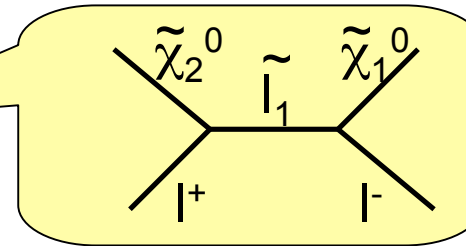


SUSYゴールドデンチャンネル

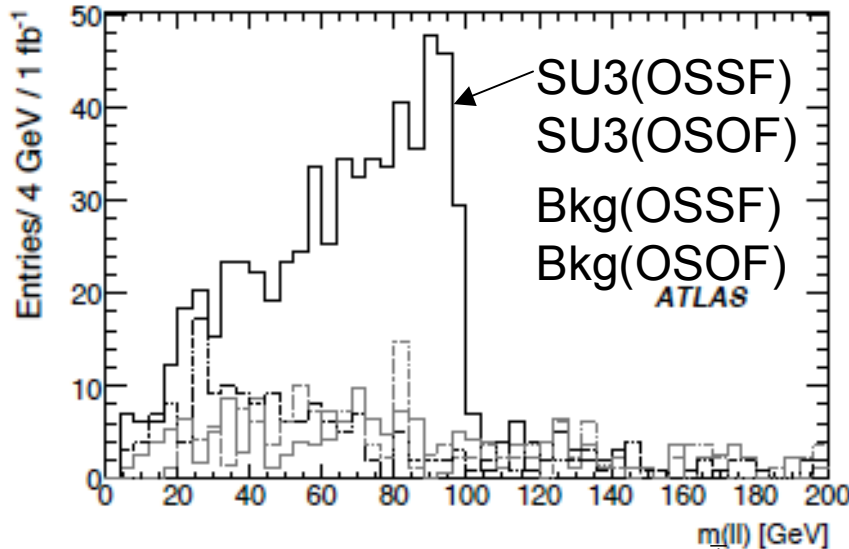
- 3段続きの2体崩壊
- 同定可能な粒子の存在 (レプトン)
- 4 unknown mass + ≥ 4 equations

→ 質量の決定

$$m_{\ell\ell}^{\text{edge}} = m_{\tilde{\chi}_2^0} \sqrt{1 - \left(\frac{m_\ell}{m_{\tilde{\chi}_2^0}}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m_{\tilde{\chi}_1^0}}{m_\ell}\right)^2}.$$

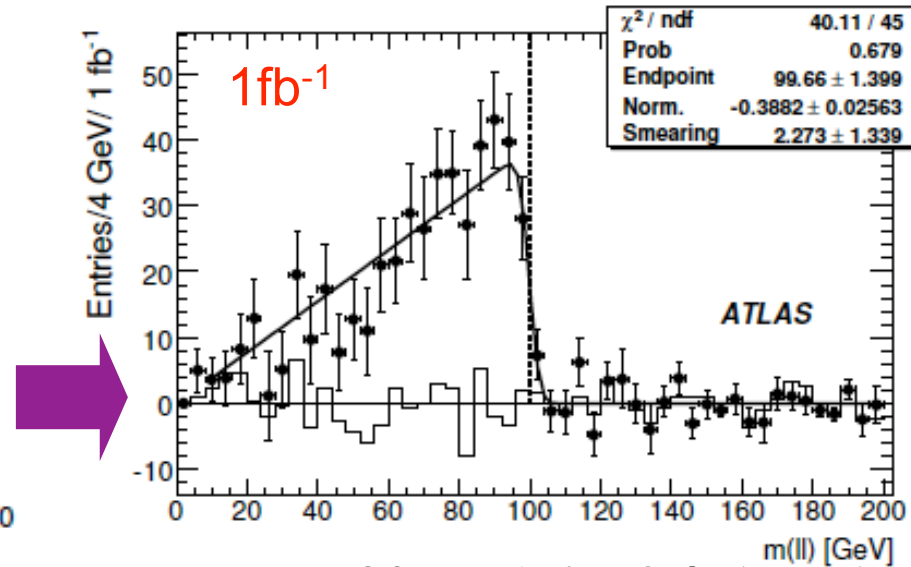


OSSF-OSOF technique



$$N(e^+e^-)/\beta + \beta N(\mu^+\mu^-) - N(e^\pm\mu^\mp)$$

$\beta=0.86$ (10%)



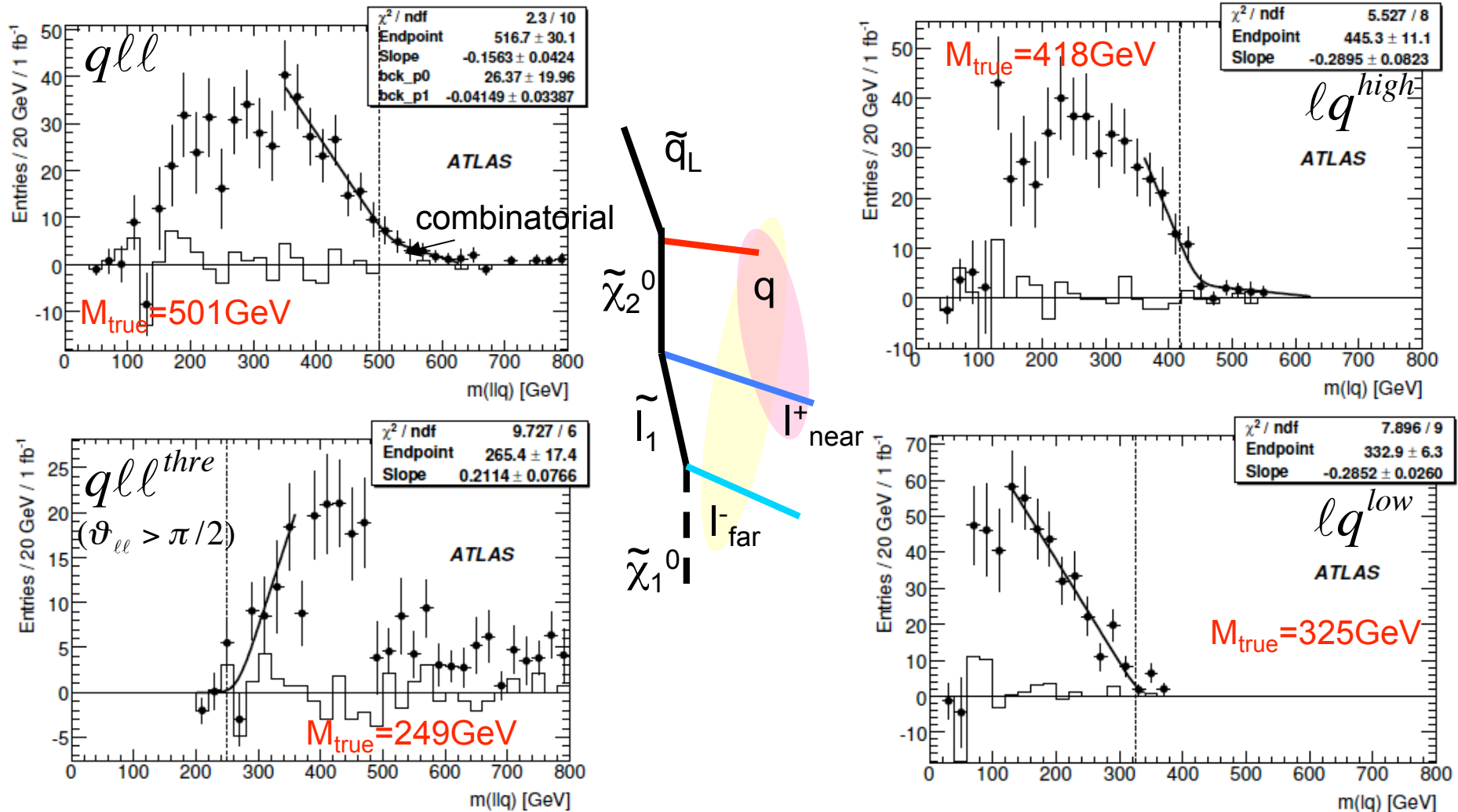
$$m_{\ell\ell} = 99.7 \pm 1.4 \pm 0.3 \text{ (GeV)}$$

100.2 GeV (true)

χ^2 / ndf	40.11 / 45
Prob	0.679
Endpoint	99.66 ± 1.399
Norm.	-0.3882 ± 0.02563
Smearing	2.273 ± 1.339

Invariant mass technique (2)

JHEP09(2000)004



- モデル依存なし、両サイド同じ崩壊でなくてもよい
- 基本的に質量ではなく質量差に感度のある測定
- 統計が必要、コンビネーションにおける不定性 ($l_{\text{near}}, l_{\text{far}}$)

Invariant mass technique (3)

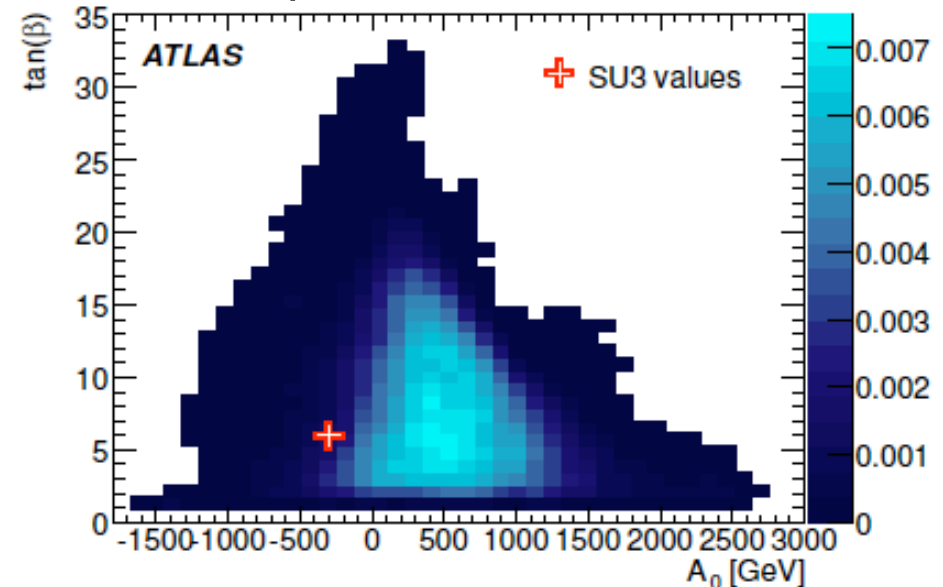
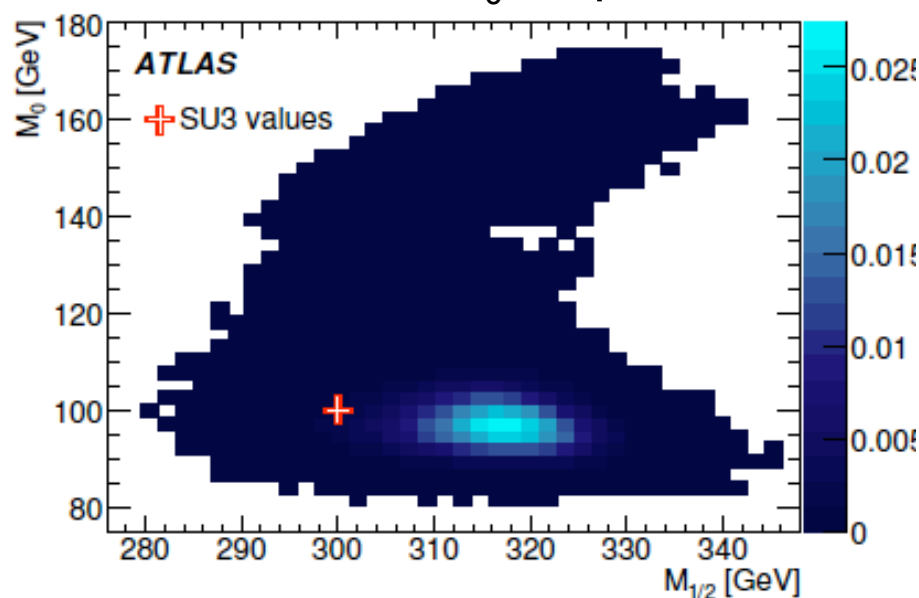
エンドポイント、閾値の測定自体は非常に精密に測定できるが、パラメータ(質量)間に強い相関があり個々の質量の決定は劣る。

Observable	SU3 Δm_{meas} [GeV]	SU3 Δm_{MC} [GeV]
$m_{\tilde{\chi}_2^0} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$100.6 \pm 1.9 \mp 0.0$	100.7
$m_{\tilde{q}} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$526 \pm 34 \pm 13$	516.0
$m_{\tilde{\ell}} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$34.2 \pm 3.8 \mp 0.1$	37.6

Observable	SU3 m_{meas} [GeV]	SU3 m_{MC} [GeV]
$m_{\tilde{\chi}_1^0}$	$88 \pm 60 \mp 2$	118
$m_{\tilde{\chi}_2^0}$	$189 \pm 60 \mp 2$	219
$m_{\tilde{q}}$	$614 \pm 91 \pm 11$	634
$m_{\tilde{\ell}}$	$122 \pm 61 \mp 2$	155

mSUGRAモデル上での解釈

パラメータ測定: $A_0, \tan\beta$ にはほとんど感度がない(μ の符号にもなし)。



Invariant mass technique (4)

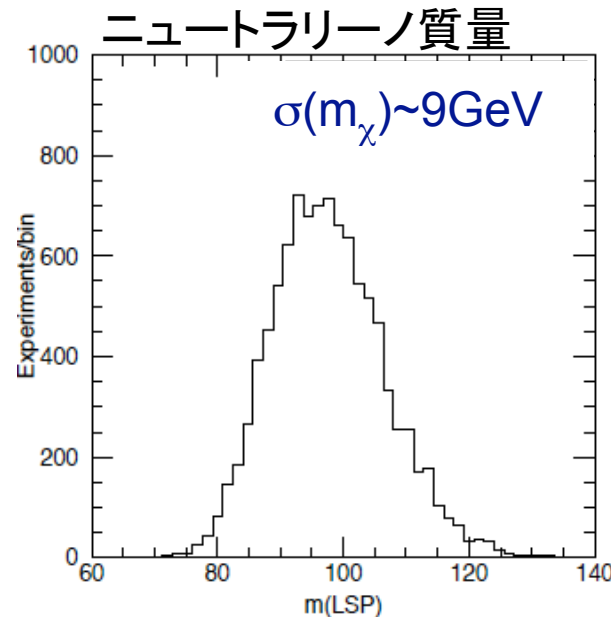
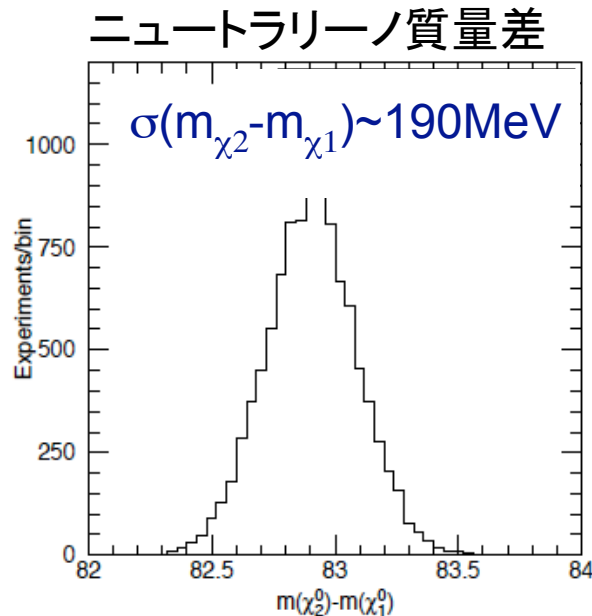
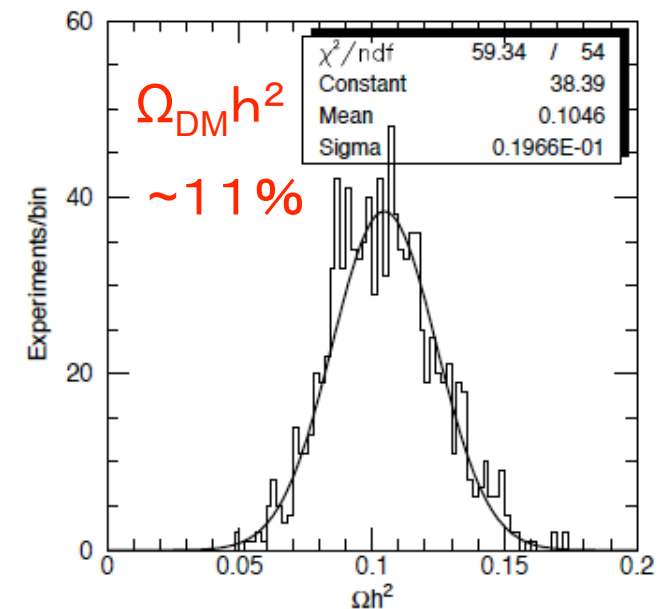
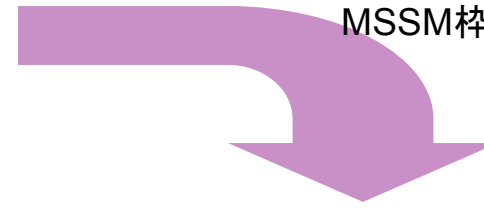
hep-ph/0512204

300fb⁻¹の統計でどこ精度まで測定可能か。

SPA ($m_0=70\text{GeV}, m_{1/2}=250\text{GeV}, A_0=-300\text{GeV}, \tan\beta=10, \mu>0$)

Variable	Value (GeV)	Errors		
		Stat+Sys (GeV)	Scale (GeV)	Total
$m_{\ell\ell}^{max}$	81.2	0.03	0.08	0.09
$m_{\ell q}^{max}$	425.3	1.4	2.1	2.5
$m_{\ell q}^{low}$	266.9	0.9	1.3	1.6
$m_{\ell q}^{high}$	365.9	1.0	1.8	2.1
$m_{\ell q}^{min}$	207.0	1.6	1.0	1.9
$m(\ell_L) - m(\tilde{\chi}_1^0)$	92.3	1.6	0.1	1.6
$m_{\ell\ell}^{max}(\tilde{\chi}_4^0)$	315.8	2.3	0.3	2.3
$m_{\tau\tau}^{max}$	62.2	5.0	0.3	5.0

制限に必要な測定量が十分な精度で得られれば、一般的なMSSM枠組み内で解釈可能。



手法固有の限界。
→別の独立した質量測定、もしくは制限があれば精度の向上可能。

生成断面積測定 (1)

- ◆質量と同様に基本的な観測量
- ◆SUSYの質量測定とは独立した質量測定 $\sigma \sim \sigma(M_{\text{SUSY}})$

(例) 0レプトンモードの生成断面積

$$\sigma_{\text{prod}} \cdot (1 - BR_{\text{isolep}}) = \frac{N_{\text{data}} - N_{\text{bkg}}^{\text{est}}}{\epsilon_{0\text{-lepton}} \times \int L}$$

$p_T > 20 \text{ GeV}$ のisolated
レプトンをもつ割合

0レプトンモードのセクション効率

様々な系統誤差を考慮しなければならない

◆バックグラウンド推定 (特にSUSYのコンタミネーションの存在がある場合)

◆ルミノシティ

◆ BR_{Lepton} (レプトンisolation)

◆セクション効率($\epsilon_{0\text{-lepton}}$)

- isolatedレプトンID効率
- ジェットのエネルギースケール

• トリガー効率

• MC(SUSY)の系統誤差、仮定

$$\epsilon_{ID}(\eta, \phi) = \frac{N_{\text{isolep}}^{\text{reco}}}{N_{\text{isolep}}^{\text{MC}}} \quad \text{プロセス依存性は無視できる。}$$

まだスタディがやられていない項目

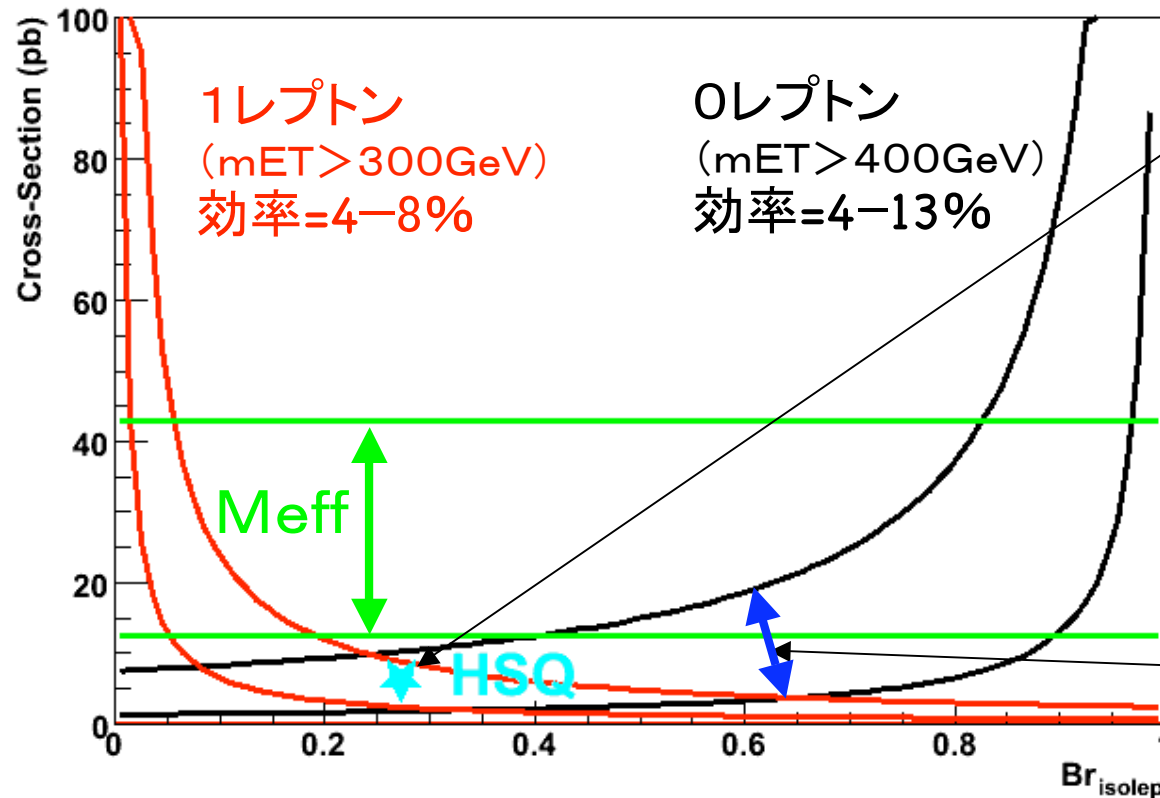
生成断面積測定 (2)

観測量 (1) 観測された事象数 ($N_{\text{data}} = \sigma \cdot L \cdot \epsilon_{\text{eff}}$)
 (2) Meffのピーク値 ($M_{\text{eff}} \propto M_{\text{SUSY}} \propto \sigma_{\text{PROD}}$)

仮定 ◆ mSUGRA-like ($M_1:M_2:M_3=1:2:6$)
 ◆ $m_{\tilde{g}} \sim m_{\tilde{q}}$

(1)(2)の独立した2つの
 観測量から生成断面積への
 焼き直しにおける不定性を
 押さえることが課題

生成断面積-崩壊比(レプトン有)



スクォークが重い場合
 (つまり仮定に反する)
 で実験結果を解釈した場合
 (1)と(2)の結果の矛盾

系統誤差
 積算ルミノシティ(20%)
 ジェットエネルギースケール(5%)

まとめ

● 発見において

- バックグラウンド推定は重要である→片岡さんのトーク
- トリガーバイアス、効率に対する系統誤差
- 実験結果の解釈方法、理論屋さんへのインプット

● 発見後の測定・解釈

- 発見後の系統的な研究 (inclusive測定からのヒント)
- 測定のための解析の最適化
- 質量測定に対するバックグラウンド推定 (質量が小さい時など)
- ヘミスフェア、ジェットアルゴリズムの改良・最適化

予備スライド

- CMS実験
- ATLAS検出器のパフォーマンス
- フェイクmETの起源
- 物理プロセス起源でないバックグラウンド
- その他の排他的測定の結果
- エキゾティックなトポロジー(mET)
- エキゾティックなトポロジー(no mET)

バックグラウンド その他

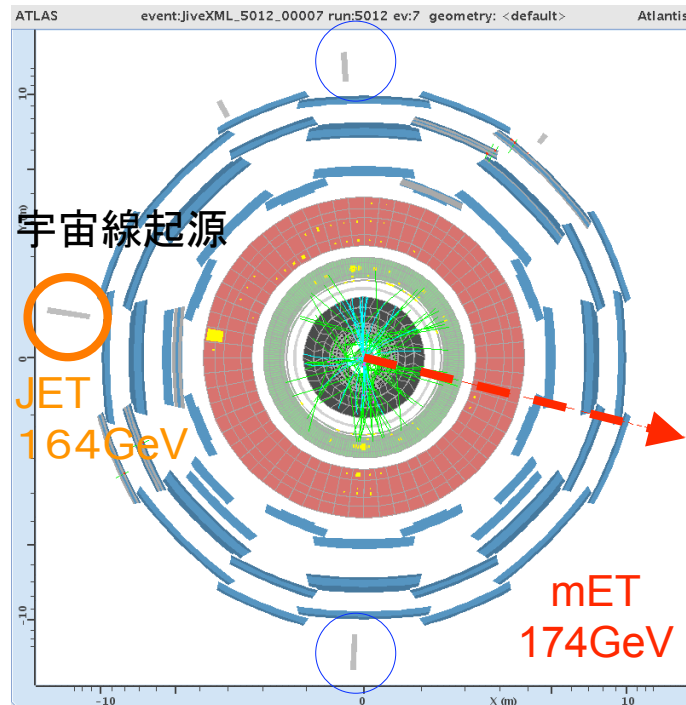
大きなmETをもつ可能性のあるその他のバックグラウンド

- フェイクミューオントラック
- 測定ミスされたジェット
- 同定されなかったミューオントラック

フルモンテカルロシミュレーションにより
検出器測定ミスの寄与の理解、並びに
除去する手法はある程度確立されている。

- ホットセル、デッドセル
- ビームガス、ビームハロー(+QCD)
- 宇宙線+ハードな制動輻射(+QCD)

液体アルゴン(約17万チャンネル)
0.017%(感度なし), 0.003%(ノイズ大)



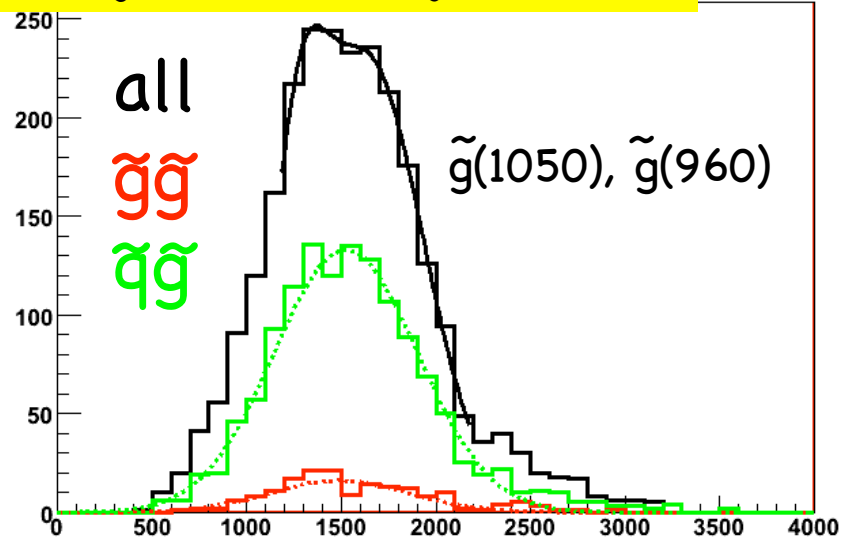
コンサーバティブ(タイミングを無視)に見積もっても
 $2-20\text{fb}^{-1}$ (0レプトンカット後)

0.2-2事象 / 100pb^{-1}
→ SMバックグラウンドの0.1-0.01%

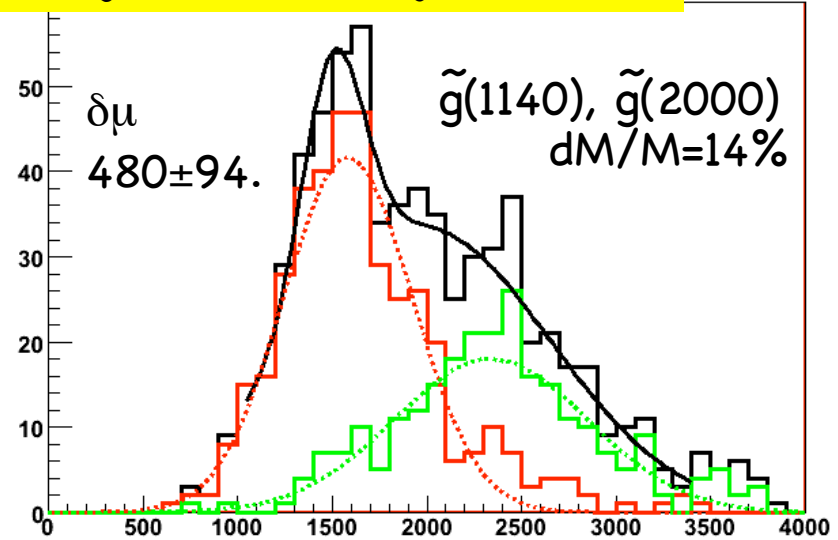
実験データがでた際に積極的にフェイクmET事象
をタグし、除去するカットを導入。
大きいmETをもった事象の詳細をチェック
(波形分布、シャワーの漏れ)。

Effective Mass

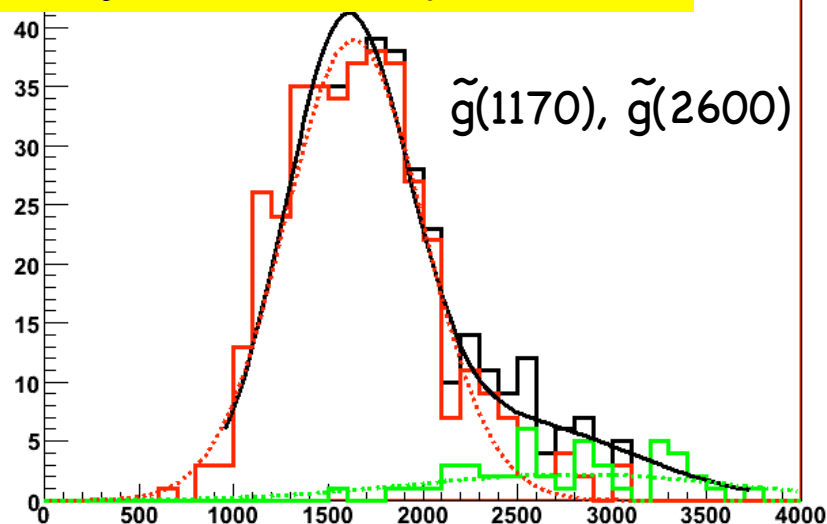
(A) $m_0=300\text{GeV}, M_3=1025\text{GeV}$



(B) $m_0=1800\text{GeV}, M_3=1025\text{GeV}$



(C) $m_0=2500\text{GeV}, M_3=1025\text{GeV}$



Might be useful to 'MODERATE' case
i.e. $\sigma(\tilde{g}\tilde{q}) \sim \sigma(\tilde{g}\tilde{g})$

It is essential to predict background
shape at high tail.

Invariant mass technique

JHEP09(2000)004

$\tilde{\chi} = m_{\tilde{\chi}_1^0}^2, \tilde{l} = m_{\tilde{l}_R}^2, \tilde{\xi} = m_{\tilde{\chi}_2^0}^2, \tilde{q} = m_{\tilde{q}}^2$ and X is m_h^2 or m_Z^2

Related edge	Kinematic endpoint
l^+l^- edge	$(m_{ll}^{\max})^2 = (\tilde{\xi} - \tilde{l})(\tilde{l} - \tilde{\chi})/\tilde{l}$
l^+l^-q edge	$(m_{llq}^{\max})^2 = \begin{cases} \max \left[\frac{(\tilde{q}-\tilde{\xi})(\tilde{\xi}-\tilde{\chi})}{\tilde{\xi}}, \frac{(\tilde{q}-\tilde{l})(\tilde{l}-\tilde{\chi})}{\tilde{l}}, \frac{(\tilde{q}\tilde{l}-\tilde{\xi}\tilde{\chi})(\tilde{\xi}-\tilde{l})}{\tilde{\xi}\tilde{l}} \right] \\ \text{except for the special case in which } \tilde{l}^2 < \tilde{q}\tilde{\chi} < \tilde{\xi}^2 \\ \text{and } \tilde{\xi}^2\tilde{\chi} < \tilde{q}\tilde{l}^2 \text{ where one must use } (m_{\tilde{q}} - m_{\tilde{\chi}_1^0})^2. \end{cases}$
Xq edge	$(m_{Xq}^{\max})^2 = X + (\tilde{q} - \tilde{\xi}) \left[\tilde{\xi} + X - \tilde{\chi} + \sqrt{(\tilde{\xi} - X - \tilde{\chi})^2 - 4X\tilde{\chi}} \right] / (2\tilde{\xi})$
l^+l^-q threshold	$(m_{llq}^{\min})^2 = \begin{cases} [2\tilde{l}(\tilde{q} - \tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \tilde{\chi}) + (\tilde{q} + \tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \tilde{l})(\tilde{l} - \tilde{\chi}) \\ - (\tilde{q} - \tilde{\xi})\sqrt{(\tilde{\xi} + \tilde{l})^2(\tilde{l} + \tilde{\chi})^2 - 16\tilde{\xi}\tilde{l}^2\tilde{\chi}}] / (4\tilde{l}\tilde{\xi}) \end{cases}$
$l_{\text{near}}^{\pm} q$ edge	$(m_{l_{\text{near}} q}^{\max})^2 = (\tilde{q} - \tilde{\xi})(\tilde{\xi} - \tilde{l})/\tilde{\xi}$
$l_{\text{far}}^{\pm} q$ edge	$(m_{l_{\text{far}} q}^{\max})^2 = (\tilde{q} - \tilde{\xi})(\tilde{l} - \tilde{\chi})/\tilde{l}$
$l^{\pm}q$ high-edge	$(m_{lq(\text{high})}^{\max})^2 = \max \left[(m_{l_{\text{near}} q}^{\max})^2, (m_{l_{\text{far}} q}^{\max})^2 \right]$
$l^{\pm}q$ low-edge	$(m_{lq(\text{low})}^{\max})^2 = \min \left[(m_{l_{\text{near}} q}^{\max})^2, (\tilde{q} - \tilde{\xi})(\tilde{l} - \tilde{\chi})/(2\tilde{l} - \tilde{\chi}) \right]$
M_{T2} edge	$\Delta M = m_{\tilde{l}} - m_{\tilde{\chi}_1^0}$