

Introduction to Extra Dimensions

山口 昌弘 (東北大学)

Septemer 1, 200~~0~~1

1. 序論

Why Extra Dimensions (XD)?

- We already have 3 + 1 dim. Why not 5th?
- 超弦理論 → 10, 11 次元
- 新しい見方を提供
hierarchy problem $m_w/m_{pl} \sim 10^{-17}$
fermion mass hierarchy
対称性の破れの新しいメカニズム (DSB,)
- とりあえず面白そうだから調べてみよう



Extra Dimension の 大きさ

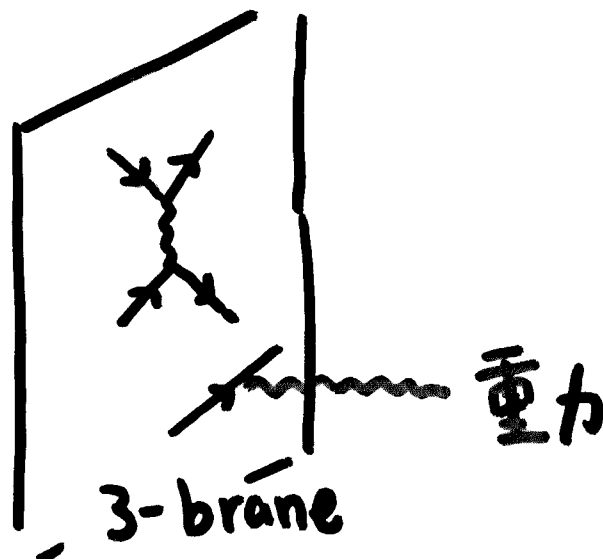
大きさ $R \sim 10^{-18} \text{GeV}^{-1} \sim 10^{-32} \text{cm}$ の XD は、
直接実験で調べることは無理。もっと大きな XD の
可能性?!

XD の 大きさ に対する 制限

probe	大きさ $R \lesssim$
SM 粒子 (collider exp.)	$10^{-17} \text{cm} \sim 1 \text{TeV}^{-1}$
重力 (Newton law)	0.1 mm

Large Extra Dimensions Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali 98

重力が大きな XD を飛び回る。SM の粒子は、4 次元の壁 (3-brane) の上のみ伝播。



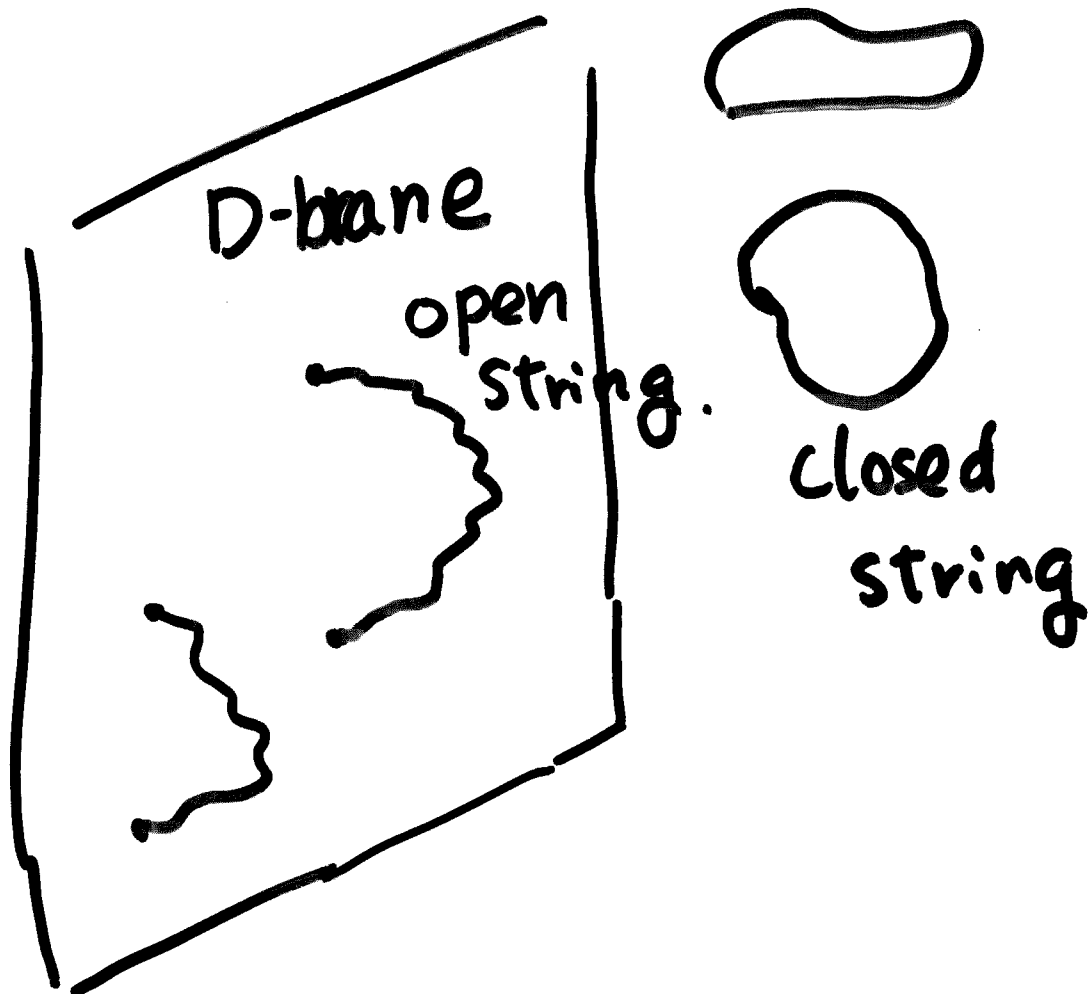
超弦理論における D-brane

closed string (graviton):

bulk を勝手に飛び回る

open string (gauge boson, quark, lepton...):

端点が D-brane 上 (固定端、Dirichlet boundary cond.)



ADDの仕事が火つけ役になって、その後、XDの研究が進められた。今日は、そのうちの代表的なものをreviewしたい。

Large Extra Dimensions (for Gravity)

TeV⁻¹-size Extra Dimensions (for SM)

Warped Extra Dimensions (Randall-Sundrum)

2. Large Extra Dimensions

Planck scale ($m_{pl} \sim 10^{19}$ GeV) と 電弱スケール ($m_w \sim 10^2$ GeV) のヒエラルキーの新しい見方

普通の見方：

$$\alpha_{gauge} \sim \text{const. (up to } \log E)$$
$$\alpha_{gravity} \sim G_N E^2$$

重力は高エネルギーで徐々に大きくなり、
 $E \sim G_N^{-1/2} = m_{pl}$ で他の力と統一される。
電弱スケールが小さいこと

← たとえば、dynamically broken SUSY で説明
(e.g. $m_{SUSY} \sim m_{pl} \exp(-8\pi/\alpha)$)

Large XD:

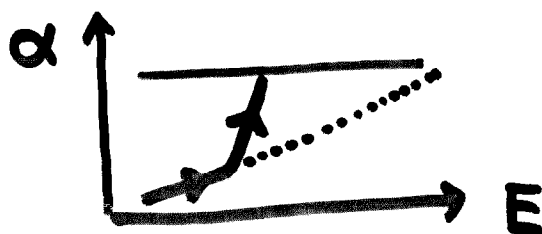
Extra Dimensionが見え出すと、

$$\alpha_{gravity} \sim G_N^{4+n} E^{2+n}$$

($n = \text{number of XD}$)で、より急激に大きくなる
ので、より低いスケールで統一される。

もし、TeVで統一 ($\sim \text{TeV}$ が基本的なスケール) →
EWスケールは説明不要

重力の弱さ → 重力が飛び回るXDが、大きなサイズ
を持っている。



重力ポテンシャルの振舞

空間 $3 + n$ 次元の場合 ($r < R$ (XDのサイズ))

$$V = G_N^{(4+n)} \frac{1}{r^{1+n}}$$

$r > R$ では、XDは見えないので、通常通り

$$V = G_N \frac{1}{r}$$

$r = R$ で両者が一致する。

$$G_N^{(4+n)} / R^n \cong G_N$$

$G_N^{(4+n)} = M_*^{-2-n}$ (M_* は、 $(4 + n)$ 次元理論の Planck scale \sim fundamental scale)として、

$$R \cong \left(\frac{M_{pl}^2}{M_*^{2+n}} \right)^{1/n}$$

$M_* \sim 1 \text{ TeV}$ のとき

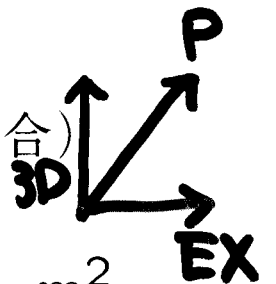
$$R \cong \begin{cases} 10^{13} \text{cm} & (n = 1) & \text{Excluded!} \\ 0.1 \text{mm} & (n = 2) & \text{marginally OK} \\ \dots & & \\ \cancel{0.1} \text{fm} & (n = 6) & \\ \mathbf{10} & & \end{cases}$$

$n \geq 2$ の場合は、重力の逆 2 乗即の検証と矛盾せず、OK。

Large XD の実験的検証

1. 万有引力の逆2乗則からのずれ
2. Kaluza-Klein modes の 検出 ← 今日の話

Kaluza-Klein (KK) modes (5次元の場合)



$$E^2 = p_1^2 + \dots + p_5^2 = \sum p_i^2 + p_5^2 = \sum p_i^2 + m^2$$

→ XD方向の運動量は、4次元的には、質量項と見える。簡単のため、5次元方向を半径 R の円にコンパクト化

→ $p_5 = m/R$ ($m=0,1,2,3,\dots$) 量子化される

KK decomposition (スカラー場の場合)

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum \phi_m(x^\mu) \exp(imy/R) / \sqrt{2\pi R}$$

とKKモードに分解される。

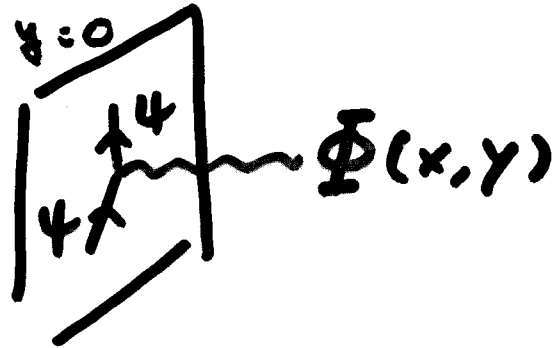
$$\text{KK関数 } f_m(y) \equiv \exp(imy/R) / \sqrt{2\pi R}$$

(→ warped XDでは、KK関数をもっと複雑)

KKモードの brane 場との相互作用

$\psi(x^\mu)$: brane 上の場

相互作用



$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= \int_0^{2\pi R} dy \psi(x) \psi(x) \Phi(x, y) \delta(y) \\ &= \psi(x) \psi(x) \Phi(x, y=0) \\ &= \psi(x) \psi(x) \sum \phi_m(x) f_m(y=0) \\ &= \psi(x) \psi(x) \sum \phi_m(x) / \sqrt{2\pi R}\end{aligned}$$

KKモードは、ゼロモードと同じ強さで相互作用する。

グラビトンのKKモード

質量 $m_m = m/R$ (m が小さい時はかなり軽い)

相互作用はゼロモード (グラビトン) と同じ → 重力
相互作用 (とても弱い)

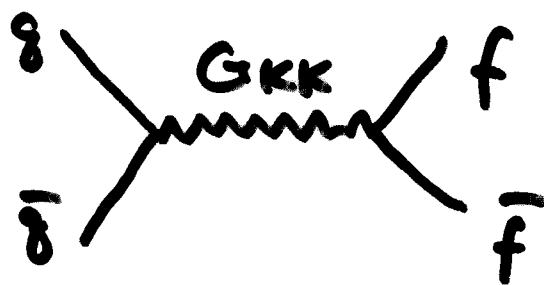
LHCでは、 $M_* \sim$ a few TeVまで probe可能!

KKmode production

$$\sigma \sim \sum_m G_N \sim G_N (RE)^n \sim E^n / M_*^{(2+n)}$$



KKmode exchange \rightarrow contact interaction



Severe constraints (especially for $n = 2$)

- Astrophysics: SN cooling
- Cosmology: KKmodes of graviton decay
→ photon emission

⇒ $n=2$ のとき $M_* \sim 100 \text{ TeV}$, $n=3$ のときは $M_* \sim 0(1)$

Challenging Issues

TeV
or
GK.

- How to stabilize the extra dimensions?
- How to get a realistic cosmological scenario (inflation/baryogenesis)
- afraid of too fast Proton decay

(後述)

- $f c N_c$

2. TeV^{-1} -size Extra Dimensions

今度は、SM (あるいはその拡張) の粒子 (の一部、あるいは全部) が、XDにすんでいる場合を考える。ただし、 $R^{-1} > 1 \text{ TeV}$

Motivation:

- Gauge Coupling Unification at lower Scale
← Power law running
- fermion mass hierarchy
- suppression of Proton decay
- Dynamical Symmetry Breaking (棚橋氏のトーク)

設定: $R_g \gg R_{SM}$

		$r < R_g$	$r < R_{SM}$
SM 粒子	4	4	$4 + n_{SM}$
グラビトン	4	$4 + n_g$	$4 + n + n_{SM}$

5次元(あるいはより高次)の
ゲージ理論.

⇒ くりこみ不可能.

高エネルギーでのふるまいがわるい

⇒ コンパクト化スケール (R_{SM}) より上で,
早晩. カットオフ^Λが必要.
(その上ではより基本的な理論).

$\Lambda \sim M_*$ とし.

$$R_{SM} M_* \lesssim 100 \quad (\text{NDA}).$$

$$\text{or.} \quad M_* \lesssim \frac{100}{R_{SM}}.$$

⇒ 重力は Large χD で説明.

様々な可能性

- ・ 全てのゲージ群がXDにすんでいる場合/3-2-1の一部がすんでいる場合
- ・ quark/leptonがXDにすんでいる場合/4Dのみにすんでいる場合
- ・ 全ての世代が同じXDにすんでいる場合/世代毎に違う場合
- ・ Higgsが.....
- ・ New Particlesが.....

⇒ A big ballpark for model building!

このトークでは2、3の例をあげる

- Gauge Bosons in XD
- fermion mass hierarchy using XD
- proton decayを抑える

Gauge Bosons in XD

SM ゲージボソン： 4+1次元を飛んでいる

クォーク、レプトン： 4次元の壁に confine

← gauge coupling unification

相互作用：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{int} &= g_5 \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) A^\mu(x, y=0) \\ &= g \bar{q}(x) \gamma_\mu q(x) \sum_m A_m^\mu(x)\end{aligned}$$

KKモードが quark (lepton) current に couple (どのような相互作用があるかは、設定の詳細に依るので注意)

Bound on R_{SM}

KKmode exchange → EW measurement に影響。(Nath, MY)

例。 ミューオン崩壊



global fit → $R_{SM}^{-1} > 3 - 4$ TeV (Rizzo, Wells)

Collider Signature

KK-mode resonance (Nath, Yamada, MY)

Drell-Yan process: $pp \rightarrow \gamma_{KK}^*, Z_{KK}^* \rightarrow l^+l^-$
など

B. Direct Searches.

③ LHC

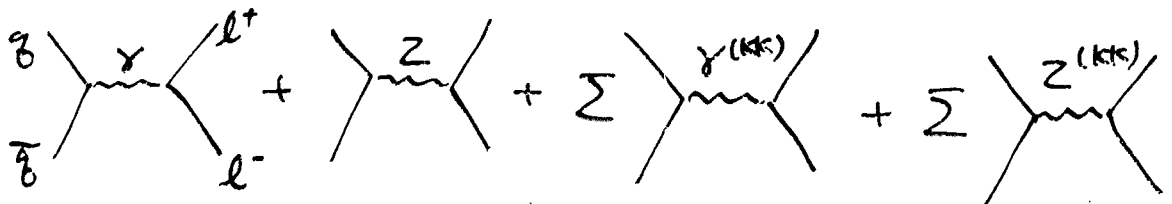
... production of KK modes

• Antoniadis, 1999
Benakli & Quiros

• Nath, Yamada & MY 1999

• Rizzo & Wells. 1999

e.g.) Drell-Yan process.



1) Excess of total cross section

→ Discovery reach $m_R \sim 6 \text{ TeV}$ (@ $L = 700 \text{ fb}^{-1}$)
($d=1$ case)

2) Invariant mass distribution $\frac{d\sigma}{dm_{l^+l^-}}$

• Peaks at the masses of KK modes

• Dips due to negative interference.

→ characterizes the KK excitations.

Invariant Mass ($M_{\ell\ell}$) Distribution in Drell - Yan Process

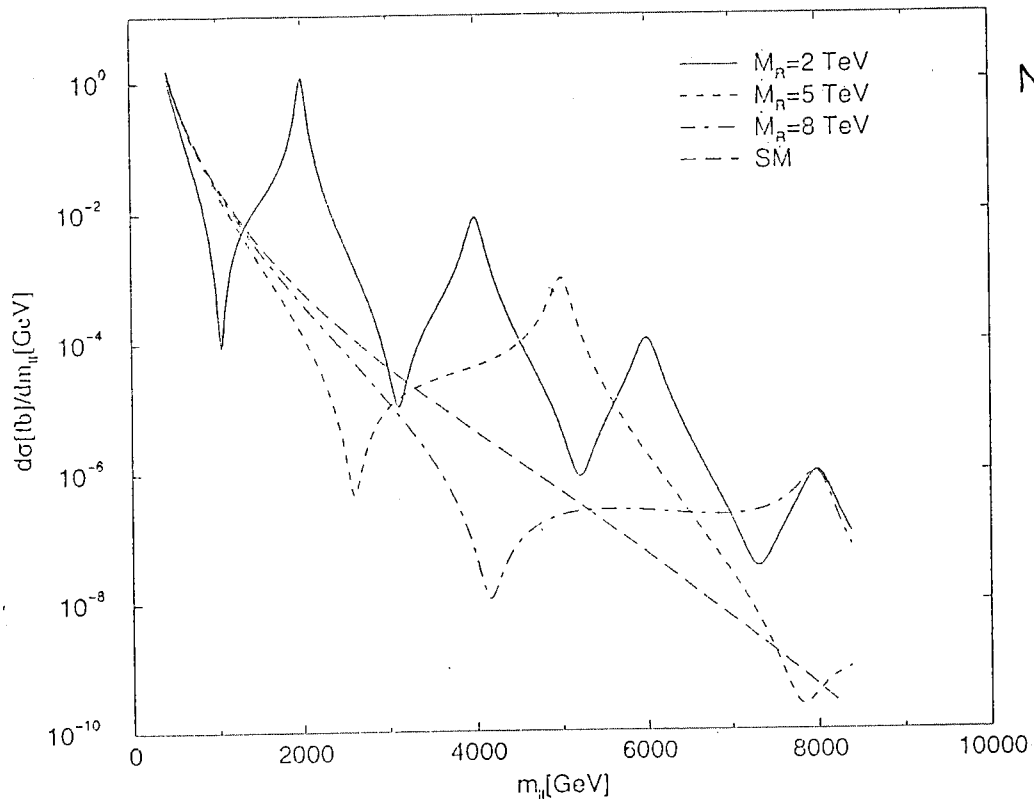
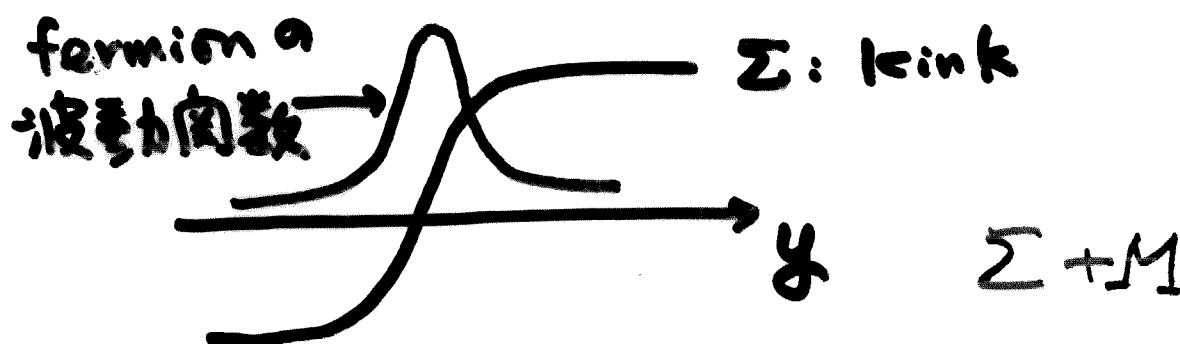


Fig. 2. Differential cross section $d\sigma/dm_{\ell\ell}$ as a function of the invariant mass $m_{\ell\ell}$ of the charged lepton pair for three different values of the compactified dimension M_R . For comparison the analysis for the SM case is also shown.

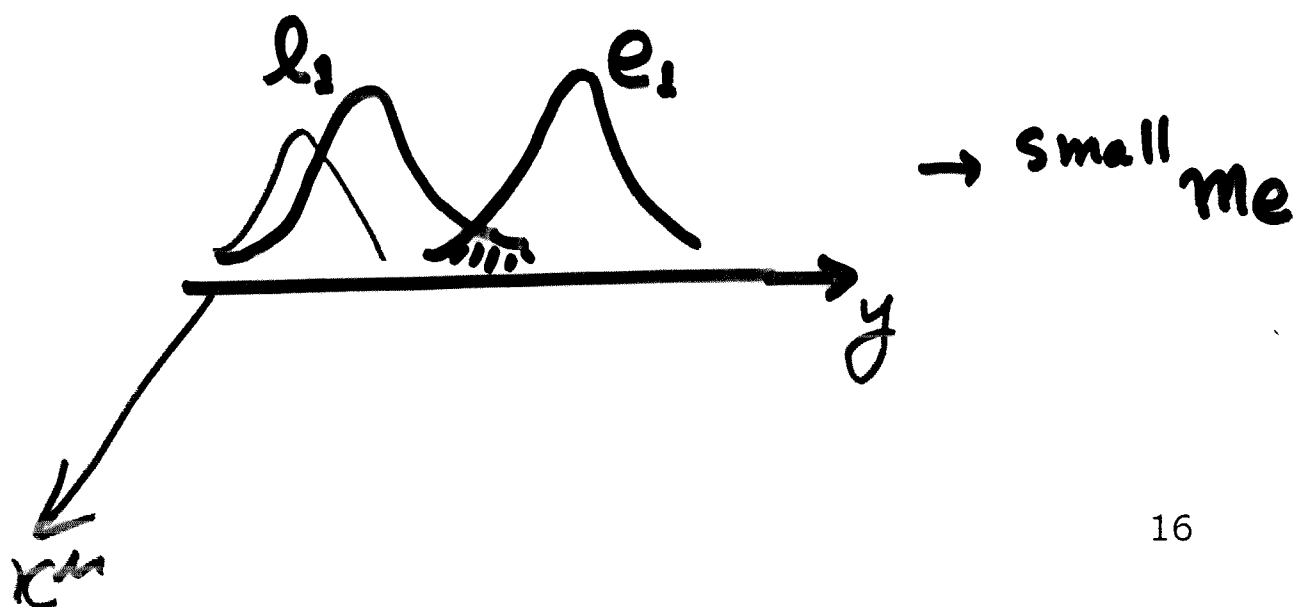
Fermion localization Arkani-Hamed, Schmaltz

(Kakizaki, M.Y)

chiral fermion localization under solitonic background (Jackiw, Rebbi) \rightarrow XD 方向に kink background のもとで fermion が局在化



fermion mass hierarchy \rightarrow small overlap of fermion wave functions



Proton Decay

$$\frac{1}{M_*^2} qqql$$

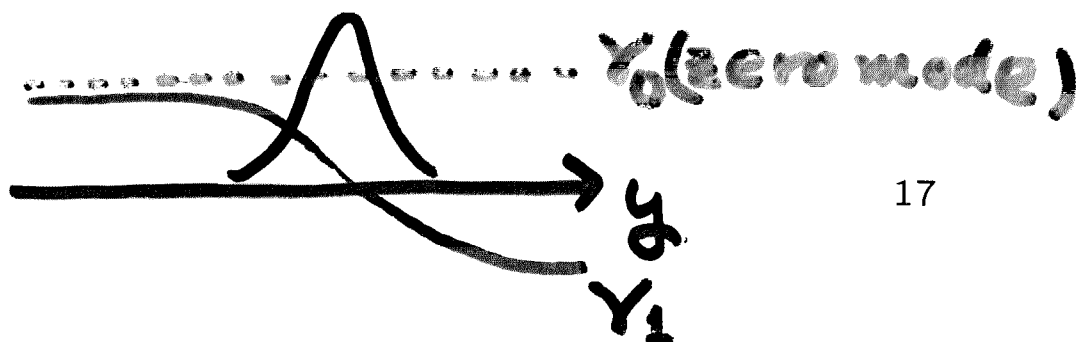
とても速い陽子崩壊を引き起こす
 $\tau_P \sim 10^{-2} \text{ sec } (M_*/100\text{TeV})^4$

こうしたoperatorは、たとえば、virtual black hole exchangeで生成される。このoperatorを禁止するにはどうするか？

quarkとleptonをそれぞれ離れたところに localize させる ($B - L$ 相互作用を使って実現可能)



フェルミオンの分布は、 γ_{KK} との結合を見ることで、probeできる!



3. Warped Extra Dimension

3. Small Extra Dimension (Randall & Sundrum)

— Another approach to gauge hierarchy problems using extra dim.

• Arkani-Hamed et al. a LED

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + g_{ij} dx^i dx^j$$

"factorizable"

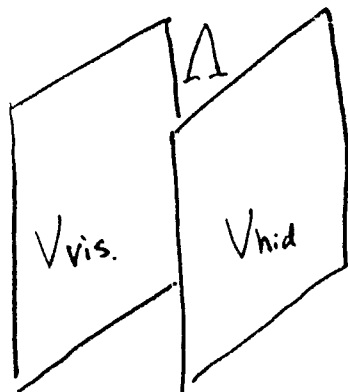
• Randall & Sundrum

hep-ph/9905221
9906064

$$ds^2 = e^{-2\sigma(\phi)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2$$

(n=1)

"non-factorizable!"



Λ : cosmological const.
in bulk

V_{vis}, V_{hid} : cosmological
const. on boundary
(vacuum energy)

flat universe as a whole:

$$V_{hid} = -V_{vis} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2 < 0$$

(AdS₅)

Einstein eq.

$$\frac{6\sigma'^2}{r_c^2} = -\frac{\Lambda}{4M^3} \quad , \quad 3\sigma'' = \frac{V_{hid}}{4M^3} \delta(y_3) + \frac{V_{vis}}{4M^3} \delta(y-y_3)$$

$$\rightarrow \sigma = r_c |\phi| \sqrt{\frac{-\Lambda}{24M^3}} = r_c k |\phi|$$

$$ds^2 = e^{-2kr_c|\phi|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + r_c^2 d\phi^2$$

Physical implications.

$$\bullet M_{PL}^2 = M^3 r_c \int_{-\pi}^{\pi} d\phi e^{-2kr_c|\phi|} = \frac{M^3}{k} [1 - e^{-2kr_c\pi}]$$
$$\sim \frac{M^3}{k}$$

(M is $\sim M_{PL}$.)



- matter in visible sector.

$$g_{hid} = \bar{g}_{\mu\nu} \quad (\phi=0)$$

$$g_{\mu\nu}^{vis} = e^{-2kr_c} \bar{g}_{\mu\nu} \quad (\phi=\pi)$$



Proper normalization of fields

$$\Rightarrow m_R = e^{-kr_c\pi} m_0, \quad H_R = e^{+kr_c\pi} H_0$$

$$\text{If } m_0 \sim 10^{18} \text{ GeV, } e^{+kr_c\pi} \sim 10^{15},$$

$$\Rightarrow m_R \sim 1 \text{ TeV.}$$

$$\pi kr_c \sim 50 \rightarrow \text{exponential hierarchy} \\ e^{-kr_c\pi} \sim 10^{-15}!$$

• XDA 座標 \leftrightarrow エネルギースケール.

• visible sector の位置

\rightarrow EW scale を決定

KK modes

ADD

$$G_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \frac{2}{M_{\text{Pl}}^2} h_{\mu\nu}$$

$$h_{\mu\nu}(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^{(m)}(x) \chi^{(m)}(y)$$

Eg. of Motion for χ .

$$-\frac{d^2}{dy^2} \chi^{(m)} = m_m^2 \chi^{(m)}$$

Soln.

$$\chi^{(m)} = e^{i m y / R}$$

固有値 (mass)

$$m_m \sim \frac{m}{R}$$

visible brane coupling

$$T^{\mu\nu} \left(\frac{1}{M_{\text{Pl}}} h_{\mu\nu}^{(0)} + \sum_{m, \text{KK}} \frac{1}{M_{\text{Pl}}} h_{\mu\nu}^{(m)} \right)$$

~~ADD~~ RS

$$G_{\mu\nu} = e^{-2\sigma} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{2}{M_{\text{Pl}}^2} h_{\mu\nu} \right)$$

$$h_{\mu\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} h_{\mu\nu}^{(m)} \chi^{(m)}(y)$$

$$-\frac{d}{dy} \left(e^{-4\sigma} \frac{d\chi^{(m)}}{dy} \right) = m_m^2 e^{-2\sigma} \chi^{(m)}$$

$$\chi^{(0)} = \text{const.}$$

$$\chi^{(m)} = \frac{e^{2\sigma}}{\Lambda_c} \left[J_2 \left(\frac{m_m}{k} e^{\sigma} \right) + a_n Y_2 \left(\frac{m_m}{k} e^{\sigma} \right) \right]$$

$$m_m \sim 0 \left(k e^{-k\pi r_c} \right) \sim \Lambda_c$$

$$T^{\mu\nu} \left(\frac{1}{M_{\text{Pl}}} h_{\mu\nu}^{(0)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{\Lambda_c} h_{\mu\nu}^{(m)} \right)$$

$$C_m \sim O(1)$$

ADDと、RSでは、KK modeの性質が全く異なる。

異なる。

RS model での Graviton KK modes

mass: $\sim \Lambda_c (\sim \text{TeV})$

$T_{\mu\nu}$ との coupling: $\sim \frac{1}{\Lambda_c}$.

\Rightarrow RS: $\sqrt{2n}$ KK mode 1-5 resonance.
の可能性.

(ADD: 多くの KK mode が交わり SM から
のすべが見える.)