1 対称性と保存量

- 例として　$m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\frac{dV(x)}{dx}$　Newtonの方程式

$V(x)$ が位置 x だけの関数　$t \to t+\delta$ 時間の並進対称

$V(x) \to V(x(t+\delta)) = V(x) + \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt}\delta$

$x(t+\delta) = x + \frac{dx}{dt}\delta$

$V(x(t+\delta)) = V + \delta\frac{dx}{dt}\left(-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)$

($K = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ とすると（運動エネルギー）

$\frac{dK}{dt} = m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}$)

$= V - \delta\frac{dK}{dt}$

$= V - (K(x(t+\delta)) - K(x))$

$V(x) + K(x) = V(x(t+\delta)) + K(x(t+\delta))$

$E = V + K$ （エネルギー保存）$\leftrightarrow$ 時間の並進対称

- これをもっと一般化

ある場 (ϕ)　ラグラジアン密度

$S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$　（作用）

最小作用　$\delta S = \int d^4x\, \delta\mathcal{L}$　$\phi \to \phi+\delta\phi$ に対して

$= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right]$

$\left[\partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right] = \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right]\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu(\delta\phi)\right]$

$= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right]\delta\phi + \underbrace{\int d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]}_{0\ (\text{わき出し } \delta\phi = 0)}$

$\forall\delta\phi$ に対して $\delta S = 0$

$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)$　オイラー方程式

（例として　$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2$　← Lorentz 不変（スカラー）

$\hookrightarrow (\Box + m^2)\phi(x) = 0$　Klein-Gordon ）

オイラー方程式を満たす時

$0 = \int d^4x\, \partial_\mu\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right]$

$j_\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)} \longrightarrow j_\mu = \partial_\mu\phi \sim (E, \vec{p})$

$\partial_\mu j^\mu = 0 \longrightarrow$ エネルギー・運動量保存

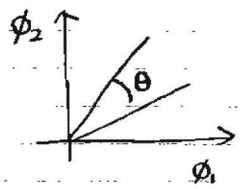
（ネーターの定理）

- 時間並進対称性 $\leftrightarrow$ エネルギー保存
- 空間 〃 $\leftrightarrow$ 運動量 〃
- 空間回転 〃 $\leftrightarrow$ 角運動量 〃

→ 実時空の性質

2. 内部対称性（粒子が持つ対称性）

実時空の対称性 ⇔ 内部軸に対する対称性



複素場 $\phi,\ \phi^*$

$$\begin{cases}\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)\\ \phi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2)\end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi$$

$$\left(\mathcal{L} = \sum_{i=1,2}\frac{1}{2}\partial_\mu\phi_i\partial^\mu\phi_i - \frac{1}{2}m^2\phi_i\phi_i\right)$$

この系は $\begin{cases}\phi \to e^{-i\alpha}\phi\\ \phi^* = e^{i\alpha}\phi^*\end{cases}$ に対して対称となっている。

αが小さいとして

$$\begin{cases}\phi = (1-i\alpha)\phi\\ \phi^* = (1+i\alpha)\phi^*\end{cases}$$

$\delta\phi = -i\alpha\phi$

$\delta\phi^* = i\alpha\phi^*$ → $\theta=\alpha$の回転にあっている

$$\delta\mathcal{L} = -i\alpha\left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)\right]$$

$$j_\mu = -i\left[(\partial_\mu\phi^*)\phi - \phi^*(\partial_\mu\phi)\right]$$ ← 粒子数で見ると確率保存流

$$\begin{cases}\phi = \int d^3k\left[a(k)e^{-ikx} + b^\dagger(k)e^{ikx}\right]\\ \phi^* = \int d^3k\left[a^\dagger(k)e^{ikx} + be^{-ikx}\right]\end{cases}$$

ϕ：粒子 消す／反粒子を作る　　ϕ^*：粒子を作る／反粒子を作る

$$Q = \int d^3x\, j^0 = i\int d^3x\,(\phi^*\dot{\phi} - \dot{\phi}^*\phi)$$

$$= \int d^3x\left[a^\dagger(k)a(k) - b^\dagger(k)b(k)\right]$$

（数の演算：消して、作る）

$$= N_a - N_b$$ ← 粒子数（charge）

内部軸に対する回転対称性

$U(\theta) = e^{iQ\theta}$ に対する対称性

⇩

保存量 Q（charge：粒子数）

に対応している。

連続対称性 ⇔ 保存量

ネーターの定理

3. 大局対称性と局所対称性

$U(\theta) = e^{iQ\theta}$

波動関数 ψ の位相を$Q\theta$回す対称性

⇩

位相は観測出来ない量

どう取っても良い

⇩

この自由度が Q保存

大局的に（全宇宙同時に）回すのは ??（→ Lorentz ??）

この自由度を局所的（local）にする

⇩

"Gauge（ゲージ）原理"

$U(\theta) = e^{-iQ\theta(x)}$

↑

xによる様にする

$j_\mu = \partial_\mu \phi$

$j_\mu = \partial_\mu \phi = e^{-iQ\theta} [\partial_\mu \phi - i[Q\partial_\mu\theta]\phi]$

おつり

$(\partial_\mu \phi)$ の別項式であるよりは、不変になるほう

ここで 共変微分 $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$

$Q = e$

A_μ ベクトル場 を考える

$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi$ ← $e^{-ie\theta}$ の回転

$\longrightarrow e^{-ie\theta}(\partial_\mu \phi - i(e\partial_\mu\theta)\phi - ieA_\mu\phi)$

$= e^{-ie\theta} D_\mu \phi$

$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta$

$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta$

$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu = P_\mu - eA_\mu \quad (P_\mu = -i\partial_\mu)$

$\mathcal{L} = (D_\mu\phi)^*(D_\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$ は局所ゲージ変換に対して不変

$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial_\mu\phi - m^2\phi^*\phi + ieA^\mu(\phi^*\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi)^*\phi] + e^2 A_\mu A^\mu \phi^*\phi$

$j_\mu = i(\phi^*\partial_\mu\phi - (\partial_\mu\phi)^*\phi)\, e$ ~ A_μ

"局所性"を要求すると相互作用の形が決定する

A_μ は 電磁場のベクトル・ポテンシャル

$A_\mu = (\phi\ \vec{A})$

Maxwell の方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$

$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ← $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta$ に対して不変

$E_i = F_{0i}$

$B = -(F_{23}, F_{31}, F_{12})$

古典電磁気では A_μ ゲージ自由度

ただの自由度で θの自由度 (1つ余分な自由度がある)

ゲージ原理 空間の各点で θ を回転

↕

$A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta$

θ → θ′

パラメータ θ の回転

↪ 位相を接続するための"接続係数"

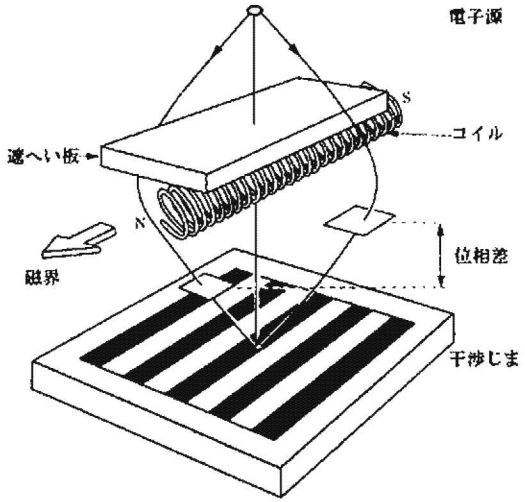
⇩

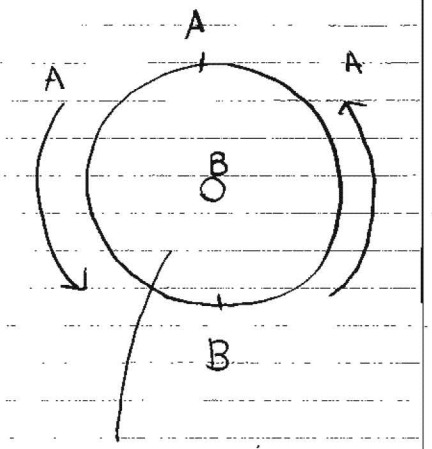
別の見方をすると 自由に内部軸を取ってよい(局所性) ゲージ粒子 "帳尻合わせ粒子"

この θ は意味があるものか？

A は実体か？

Aが実体か？　　$P_\mu \to P_\mu - eA_\mu$　　"A"は運動量対応している
↳"光子"





アハラノフ・ボーム効果（AB）

電子が通る所にはBはいない

$$\psi(x) = e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})}\psi(0)$$

$(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{\hbar}(E, \vec{p})$ だから

$$= e^{-i\frac{1}{\hbar}p_\mu x^\mu}\psi(0)$$

$$= e^{i\frac{e}{\hbar}A_\mu x^\mu}\psi(x) \quad \leftarrow P_\mu \to P_\mu - eA_\mu$$

$(\frac{e}{\hbar}A_\mu x^\mu)$ の位相が加わる

$$\Delta\phi = \left[\frac{e}{\hbar}\oint A\, dS\right] \quad \leftarrow \text{"A"は位相をうごかしている。}$$

$$\Rightarrow A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta$$

その差　　古典的自由度は位相の自由度

$\Delta\phi$ は測定出来る（干渉，ジョセフソン効果）

外村さん

AB効果の実証実験

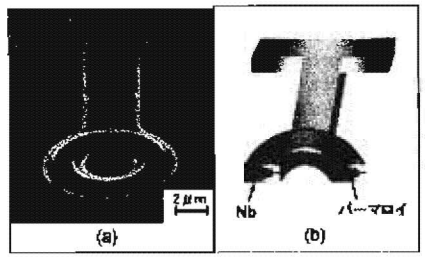
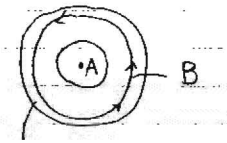


図6．AB効果の検証に用いたドーナツ状磁性体サンプル
(a) 走査型電子顕微鏡像
(b) 模式図



外側 Nb（ニオブ）→ マイスナー効果でBが外に出ない

中にだけAが存在する

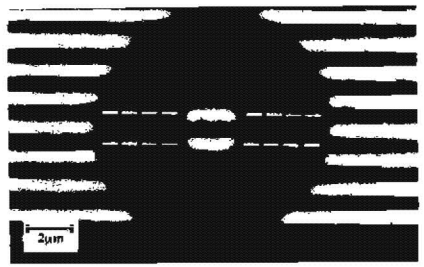


図7．AB効果の検証写真

"ゲージ場"は質量0

- 位相軸と取り方を保証 ↔ ∞まで到達しないといけない。
- 質量項 $m^2A^\mu A_\mu$ は $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\theta$ に対して不変でない

↓

禁止される

⇨ ゲージ粒子（γ, Z, W, g, G）はmassがない
（Z, W）は別の理由でmassをもつ

このゲージ原理は 電磁気だけでなく 全の他の力にも

弱い相互作用　weak charge 保存量　$Z, W^{\pm}$

強い　〃　カラー荷　〃　g(8個)

重力　エネルギー運動量 〃

↓

これ自体がベクトル量

$p^{\mu} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho} dx^{\nu} dx^{\rho}$

（クリストッフェル係数（接続係数））

$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_{\nu} g_{\rho\sigma} + \partial_{\rho} g_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma} g_{\nu\rho})$