修士論文

ILC における新しい kinematic fit の開発研究

Developing a novel kinematic fit for the ILC

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻

山下研究室 修士課程 2 年

梶原　昇吾

2020 年 1 月

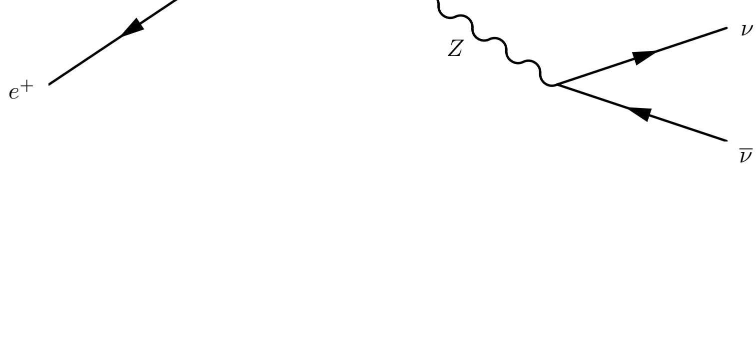
概 要

現在国際リニアコライダー（ILC）計画が進められており、まず重心系エネルギー 250GeV で稼働させ、ヒッグス粒子を大量生成し、精密測定を行うことが期待されている。ヒッグス粒子の精密測定のためにはジェットエネルギー分解能を正しく考慮して物理量の真値を求める必要がある。測定分解能および物理的制約条件を確率分布として評価し、測定値から真の値の推定値を求める手法として加速器実験で主に用いられている事象再構成手法の一つに kinematic fit がある。kinematic fit はジェットエネルギー分解能のように相対的に悪い測定分解能に対して特に有効であるが、ILC における kinematic fit は測定分解能および物理的制約条件を表す確率分布に正規分布しか仮定できないという制限がある。本研究では、任意の関数を適用できるような kinematic fit の定式化を考え、ILC における解析ツールとして実装するところまでを目指す。本研究の現状における成果は以下の 3 点である。

1. kinematic fit で測定分解能および物理的制約条件に任意の関数が導入できる定式化を考案した。

2. 任意の関数が適用できる kinematic fitter を実装した。

3. 以上のファインマン図で表されるような具体的な解析対象において信号事象と背景事象を正確に分けられるような物理模型 (測定分解能および物理的制約条件) を探索し、正しい物理模型を示唆するいくつかの結果を得た。



1 については kinematic fit の詳細を説明しないと理解できない内容であるが、我々は kinematic fit の定式化に最尤法を用いた。すなわち、以下に述べる尤度を最大化するような真値の推定値を求める。ここでは以下の多くの添字や変数、定数、関数の説明はしない。ILC における従来の kinematic fitter では、最尤法の観点から説明すると尤度は

$$L_{Newton}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |V|}} e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})} \prod_{l=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g_l\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)}{\sigma_l}\right)^2} \prod_{k=1}^{K} \delta\left(h_k\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)\right) \tag{1}$$

のように定義されている。ここで、$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |V|}} e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})}$ が測定分解能を表す確率分布、$\prod_{l=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g_l\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)}{\sigma_l}\right)^2}$ が物理的制約条件を表す確率分布であるが、どちらも正規分布である。これを任意の関数に拡張した場合の尤度は

$$L(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) = f(\overrightarrow{y}; \overrightarrow{\eta}) \prod_{l=1}^{L} s_l(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) \prod_{k=1}^{K} \delta\left(h_k\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)\right) \tag{2}$$

となる。$f(\overrightarrow{y}; \overrightarrow{\eta})$ が測定分解能を表す確率分布、$\prod_{l=1}^{L} s_l(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ が測定分解能を表す確率分布で、一般の関数とした。まず、従来の kinematic fit を最尤法の観点から捉えて、それを一般の関数に拡張することで、任意の関数が導入できる kinematic fit の定式化がなされたことになる。(第 3 章・第 4 章)

2 については 1 で行った定式化の検証をするためにスタンドアローンで動作する kinematic fitter を製作した。最適化には準ニュートン法による逐次二次計画法を用い、一般の関数を扱えるように数値微分を導入した。(第 5 章)

3 については現状として解析対象における kinematic fit を用いた事象選択の結果を出せるところまでは至っていないが、kinematic fitter の動作を確認し、測定分解能および物理的制約条件の物理模型をどのように設定すれば正しいのか探索をしている状況である。これについては特にジェットエネルギー、角度分解能評価の方法について詳しく述べ、現状と今後の課題を記述する。(第 6 章・第 7 章・第 8 章・第 9 章)

目 次

図 目 次

表 目 次

第1章　背景

素粒子物理学は微視的世界を記述する学問であり、標準理論は現在実験的に確認された理論で最も成功した理論である。標準理論は2012年、欧州原子核研究機構 (CERN) でヒッグス粒子の発見を以て完成したと言える。本章では標準理論がいかなる理論であるかの概要を示し、それがいかほどの精度で検証されているのか、標準理論の問題点を記述する。

1.1　標準理論

標準理論は以下の 17 種類の粒子を含んでいる。

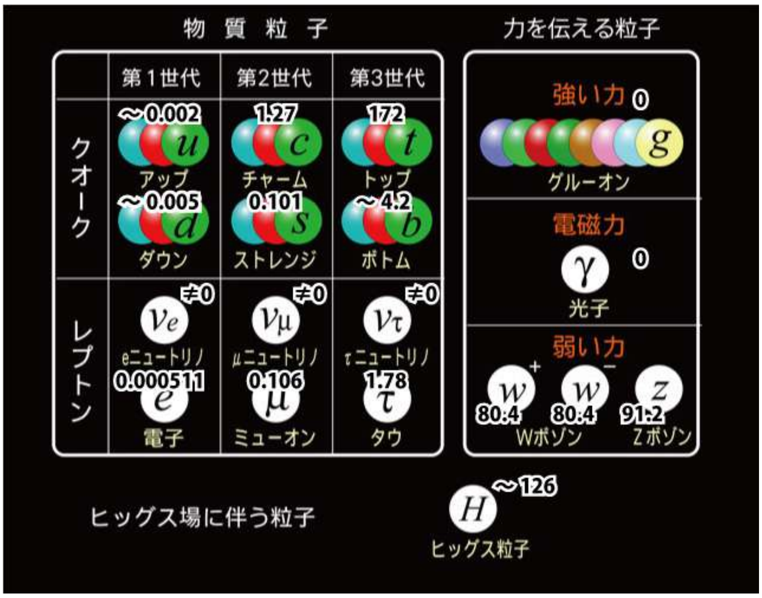


図 1.1: 標準理論に含まれる素粒子 [1]

標準理論は $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ ゲージ対称性に基づく理論である。4 つの基本相互作用である、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用、重力相互作用のうち、重力相互作用は標準理論に取り入れられておらず、重力相互作用を含めた場の量子論は現状では未完成である。標準理論では強い相互作用と電弱相互作用 (電磁相互作用と弱い相互作用を統一した相互作用) の統一はなされていない。

素粒子はいくつかの特徴によって分けられている。まず、スピン角運動量が整数のボース粒子 (ボソン) と半整数のフェルミ粒子 (フェルミオン) に分かれる。ボース粒子は同じ

量子状態にいくつも占められ、相互作用を媒介する。光子は電磁相互作用を、グルーオンは強い相互作用を、$W^{\pm}$ ボソンや Z ボソンは弱い相互作用をそれぞれ媒介する。ヒッグス粒子は他の素粒子に質量を与える。これは後述する。一方、フェルミ粒子は同じ量子状態を複数の粒子が占めることを許されないため、物質を形成することができる。標準理論に含まれるフェルミ粒子は全てスピン角運動量 1/2 であり、強い相互作用をするクォークと強い相互作用をしないレプトンに分けられる。クォークは電荷が+2/3 のアップクォーク (u)、チャームクォーク (c)、トップクォーク (t) というアップ型クォークと電荷が-1/3 のダウンクォーク (d)、ストレンジクォーク (s)、ボトムクォーク (b) というダウン型クォークに分かれ、レプトンは電荷を持たない電子ニュートリノ (ν_e)、μ ニュートリノ (ν_μ)、τ ニュートリノ (ν_τ) と電荷が-1 の電子 (e)、μ 粒子 (μ)、τ 粒子 (τ) という荷電レプトンに分かれる。このうちニュートリノは標準理論の枠組では弱い相互作用しかしない。以上のようにクォーク 6 種類およびレプトン 6 種類をそれぞれ電荷ごとにアップ型クォーク、ダウン型クォーク、ニュートリノ、荷電レプトンの組 3 種類ずつに分けた。それぞれの組ごとに見ると、3 種類の粒子は質量が異なり、この質量階層を世代という。現在では世代は少なくとも 3 世代あることが分かっているが、それ以上の世代があるのか、なぜ質量階層構造を持つのかは明らかでない。強い相互作用をするクォークは色 (color) という量子数を持ち、$\mathrm{SU(3)_C}$ 三重項で記述される。SU(3) は 8 つの生成子を持ち、それが強い相互作用を媒介するグルーオン 8 種類に対応する。弱い相互作用においては空間反転対称性が破れていることが分かっており、これはゲージ場 $\mathrm{SU(2)_L}$ が素粒子の右巻き成分と左巻き成分のうち左巻き成分のみを変換し、右巻き成分を変換しないことで説明される。この空間反転変換で変化する性質をカイラリティーといい、右巻きと左巻きで区別される。本来フェルミ粒子は右巻き、左巻きのカイラリティーが異なる別々の質量を持たない粒子であったはずが、ヒッグス粒子がスピノルの右巻き成分と左巻き成分を混合させることで質量を持つことができた。$W^{\pm}$ ボソンはスピノルの左巻き成分としか結合しない。(Z ボソンは後述するように光子と混合しているので、右巻き成分とも結合しうる) これはスピノルの左巻き成分 ψ_L が $\mathrm{SU(2)_L}$ 二重項

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

としてラグランジアンに現れるのに対し、スピノルの右巻き成分 ψ_R は $\mathrm{SU(2)_L}$ 一重項

$$u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R, e_R, \mu_R, \tau_R \tag{1.2}$$

としてラグランジアンに現れることで実現される。結果として、カイラリティーにより弱い相互作用の抑制が起こる。

1.1.1 ゲージ理論

標準理論において、電磁相互作用と弱い相互作用は $\mathrm{SU(2)} \times \mathrm{U(1)}$ 局所ゲージ不変性を満たすように導入される。また、強い相互作用は SU(3) 局所ゲージ対称性を満たすように導入される。すなわち、$\mathrm{SU(3)_C}\times$ $\mathrm{SU(2)_L}\times$ $\mathrm{U(1)_Y}$ ゲージ変換でラグランジアンは不変ということである。この要求により相互作用を媒介するゲージボソン (グルーオン、光子、$W^{\pm}$ ボソンや Z ボソン) が導入される。しかし、ゲージボソンの質量項はゲージ対称性を破る

ために導入することができない。同様にフェルミ粒子の質量項も左巻き粒子は SU(2) 二重項、右巻き粒子は SU(2) 一重項として変換し、ゲージ変換性が異なるために質量項を導入することができない。これは、後で議論する。

1.1.2 標準理論におけるヒッグス機構

ヒッグス機構は局所ゲージ対称性を保ちながらスカラー場に有限の真空期待値を持たせることで、ゲージボソンやフェルミ粒子が質量を獲得する仕組みを説明できる。最も単純なヒッグス機構は複素スカラー場二重項を用いて構成される。ヒッグス機構は 3 種類のゲージボソン $W^{\pm}$ と Z に質量を持たせるために縦偏極の自由度を与えねばならない。ヒッグス場と合わせて自由度は 4 となる。また、$W^{\pm}$ の縦偏極自由度となる荷電場 $\phi^{+} = \phi^{-*}$ と Z の縦偏極自由度とヒッグス場となる中性場 ϕ^{0} を成分に持つ。

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^{+} \\ \phi^{0} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

ここで、複素スカラー場のラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \left(\partial_{\mu}\phi\right)^{\dagger} \left(\partial^{\mu}\phi\right) - V\left(\phi\right) \tag{1.4}$$

ただし、ポテンシャル項 $V\left(\phi\right)$ は以下のように書ける。

$$V\left(\phi\right) = \mu^2 \phi^{\dagger}\phi + \lambda \left(\phi^{\dagger}\phi\right)^2 \tag{1.5}$$

ここで、ポテンシャルが最小値を持つことから $\lambda > 0$ である。また、素粒子が質量を持っていなかった時代の宇宙では $\mu^2 > 0$ であり、真空は $\phi^{\dagger}\phi = 0$ であった (図 1.2(a)) と考えられているが、宇宙が冷えるにつれて、$\mu^2 < 0$ に変化し、素粒子が後述するように質量を獲得するに至った。真空は

$$\phi^{\dagger}\phi = \frac{1}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2) = \frac{v^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda} \tag{1.6}$$

となり (図 1.2(b))、無限に縮退した最小値を持つようになった。ここで、v は真空期待値という。ただし図 1.2 は ϕ が実スカラー場一重項であるとして、1 次元で単純化して描いている。

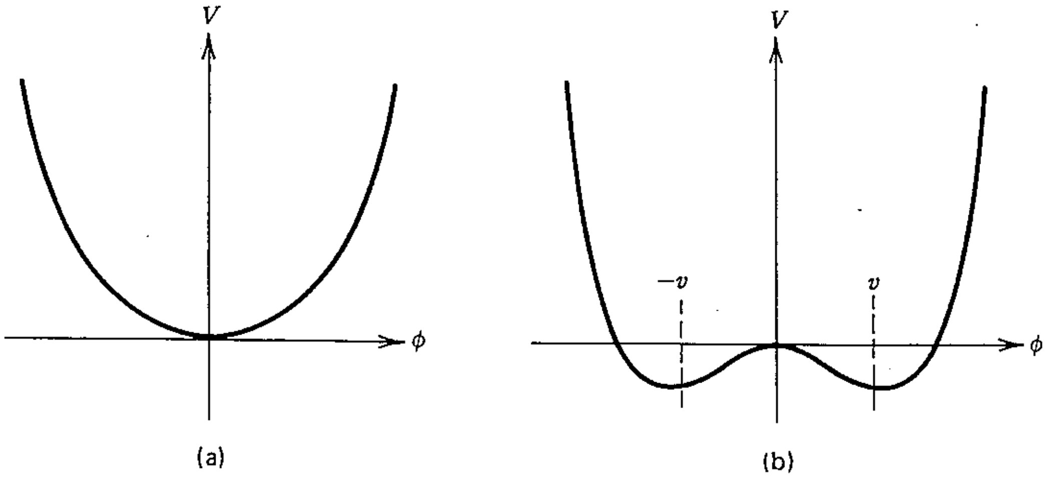


図 1.2: 複素スカラー場のポテンシャル項 [12]

式 (1.6) を満たすある一点が選ばれれば、これが自発的対称性の破れである。自発的対称性の破れの後も光子を質量 0 に保つためには、光子に縦偏極の自由度を与えてはならないから、ϕ^0 が有限の真空期待値 v を持たねばならない。

$$\langle 0\,|\,\phi\,|\,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

と選択すると、

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ v + \eta(x) + i\phi_4(x) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

とおける。ここで、$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$、$\phi_4(x)$ は $W^{\pm}$ ボソンと Z ボソンの縦偏極の自由度とでき、今後理論に現れることはないため取り除くと、$\eta(x)$ だけがスカラー粒子として実在であり、これを $h(x)$ とおく。後に分かるように、この粒子は他の素粒子に質量を与える。$h(x)$ はヒッグス場と呼ばれる。ヒッグス二重項は

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h(x) \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

と書ける。$\mathrm{SU(2)_L} \times \mathrm{U(1)_Y}$ 局所ゲージ対称性を理論に課すと、微分は共変微分に置き換えられる。

$$\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ig_W \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{W}_\mu + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \tag{1.10}$$

ここで、$\boldsymbol{T} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$($\boldsymbol{\sigma}$:Pauli 行列) は SU(2) の 3 生成子であり、Y は弱超電荷である。g_W は $\mathrm{SU(2)_L}$ 結合定数、g' は $\mathrm{U(1)_Y}$ 結合定数である。弱アイソスピンの第 3 成分 $I_W^{(3)}$ と電荷 Q を用いると、弱超電荷 Y は

$$Y = 2(Q - I_W^{(3)}) \tag{1.11}$$

と表せる。ヒッグス二重項は式 (1.11) より、$Y = 1$ であるから、

$$D_\mu\phi = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\partial_\mu + ig_W W_\mu^{(3)} + ig'B_\mu & ig_W\left[W_\mu^{(1)} - iW_\mu^{(2)}\right] \\ ig_W\left[W_\mu^{(1)} + iW_\mu^{(2)}\right] & 2\partial_\mu - ig_W W_\mu^{(3)} + ig'B_\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
&\left(D_\mu\phi\right)^\dagger\left(D^\mu\phi\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h\right)\left(\partial^\mu h\right)\\
&+\frac{1}{16}g_W^2\left(v+h\right)^2\left(W_\mu^{(1)}-iW_\mu^{(2)}\right)^\dagger\left(W^{(1)\mu}-iW^{(2)\mu}\right)\\
&+\frac{1}{16}g_W^2\left(v+h\right)^2\left(W_\mu^{(1)}+iW_\mu^{(2)}\right)^\dagger\left(W^{(1)\mu}+iW^{(2)\mu}\right)\\
&+\frac{1}{8}\left(v+h\right)^2\left(g_W W_\mu^{(3)}-g'B_\mu\right)^\dagger\left(g_W W^{(3)\mu}-g'B^\mu\right)
\end{aligned}\tag{1.13}$$

ここで、第一項が h の運動項であり、第二項、第三項は $W_\mu^\pm=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(W_\mu^{(1)}\mp iW_\mu^{(2)}\right)$ の質量項を含む。また、第四項は $Z_\mu=\frac{g_W W_\mu^{(3)}-g'B_\mu}{\sqrt{g_W^2+g'^2}}$ および、$A_\mu=\frac{g'W_\mu^{(3)}+g_W B_\mu}{\sqrt{g_W^2+g'^2}}$ の質量項を含む。

$$\begin{aligned}
&\left(D_\mu\phi\right)^\dagger\left(D_\mu\phi\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\partial_\mu h\right)\left(\partial^\mu h\right)\\
&+\frac{1}{8}g_W^2\left(v+h\right)^2 W_\mu^{+\dagger}W^{+\mu}+\frac{1}{8}g_W^2\left(v+h\right)^2 W_\mu^{+\dagger}W^{+\mu}\\
&+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} Z_\mu & A_\mu\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{(v+h)^2\left(g_W^2+g'^2\right)}{4} & O\\ O & O\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu\\ A^\mu\end{pmatrix}
\end{aligned}\tag{1.14}$$

したがって、

$$m_W=\frac{1}{2}vg_W\tag{1.15}$$

$$m_Z=\frac{1}{2}v\sqrt{g_W^2+g'^2}\tag{1.16}$$

$$m_\gamma=0\tag{1.17}$$

となり、局所ゲージ対称性を破ることなく光子に質量を与えずに $W^\pm$ ボソン、Z ボソンに質量を与えることができる。ここで、Weinberg 角 θ_W を

$$\frac{m_W}{m_Z}=\cos\theta_W\tag{1.18}$$

とおけば、標準理論は

$$\frac{g'}{g_W}=\tan\theta_W\tag{1.19}$$

を予想する。式 (1.15) を用いれば、m_W および、g_W を測定することで、真空期待値

$$v=246\,[\mathrm{GeV}]\tag{1.20}$$

を得る。

同様にフェルミ粒子に質量を持たせることができる。フェルミ粒子の質量項はヒッグス場を考慮しなければ左巻きスピノル ψ_L と右巻きスピノル ψ_R を用いて

$$-m\overline{\psi}\psi=-m\left(\overline{\psi}_R\psi_L+\overline{\psi}_L\psi_R\right)\tag{1.21}$$

と表せそうであるが、ψ_L は $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 二重項、ψ_R は $\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 一重項であるから、ゲージ変換性が異なり、質量項をこのように構成することはできない。電子質量の生成は、$\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}\times\mathrm{U}(1)_\mathrm{Y}$ 不変な以下の項

$$\mathcal{L}_e = -G_e\left[\begin{pmatrix} \overline{\nu}_e & \overline{e} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} e_R + \overline{e}_R \begin{pmatrix} \phi^- & \phi^{0*} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L\right] \tag{1.22}$$

をラグランジアンに加えることで実現できる。自発的に対称性が破れると、

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

と真空を選び直せるから、

$$\mathcal{L}_e = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_e v\left(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}G_e\left(\overline{e}_L e_R + \overline{e}_R e_L\right)h \tag{1.24}$$

ここで、電子質量を m_e と置けば、

$$G_e = \sqrt{2}\frac{m_e}{v} \tag{1.25}$$

であるから、

$$\mathcal{L}_e = -m_e\overline{e}e - \frac{m_e}{v}\overline{e}eh \tag{1.26}$$

式 (1.32) の第一項が求めていた電子の質量であり、第二項は電子とヒッグス粒子の湯川結合を表す。フェルミ粒子の質量はヒッグス粒子との湯川結合定数に比例することが分かる。ただし、湯川結合定数は任意にとれるから、式 (1.25) から電子の質量を予言することはできない。

有限の真空期待値はヒッグス二重項の中性場 ϕ^0 にのみ現れるから、$\mathrm{SU}(2)_\mathrm{L}$ 二重項の下成分に現れるフェルミ粒子 (荷電レプトン、ダウン型クォーク) には質量を持たせられるが、上成分に現れるフェルミ粒子 (ニュートリノ、アップ型クォーク) には質量を与えられない。ニュートリノの質量起源は未解明であるため、ここでは議論しない[1]。SU(2) の下で、

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \tag{1.27}$$

と厳密に等しく変換する共役場

$$\phi_c = -i\sigma_2\phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 - i\phi_2 \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

を用いると、アップクォーク質量の生成は

$$\mathcal{L}_u = G_u\left[\begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{d} \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ \phi^- \end{pmatrix} u_R + \overline{u}_R \begin{pmatrix} \phi^0 & \phi^+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L\right] \tag{1.29}$$

[1] 中性フェルミ粒子であるニュートリノはディラック型質量を持つかマヨラナ型質量を持つか決着がついていない。荷電フェルミ粒子はディラック型質量を持つ。

をラグランジアンに加えることで実現し、同様に

$$\phi_c = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

として、対称性を破ることで、

$$\mathcal{L}_u = -\frac{1}{\sqrt{2}}G_u v\left(\overline{u}_L u_R + \overline{u}_R u_L\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}G_u\left(\overline{u}_L u_R + \overline{u}_R u_L\right)h \tag{1.31}$$

ここで、アップクォーク質量を m_u と置けば、

$$\mathcal{L}_u = -m_u\overline{u}u - \frac{m_u}{v}\overline{u}uh \tag{1.32}$$

と電子と全く同様にアップクォークの質量項と湯川結合項となる。

このようにヒッグス場が本来別の粒子である左巻きフェルミ粒子と右巻きフェルミ粒子を混合させることで、質量を生む。

1.2 実験による標準理論の検証

大型ハドロン衝突型加速器 (LHC) では 2012 年にヒッグス粒子が観測され、現在標準理論と無矛盾な結果が得られている。LHC ではヒッグス粒子の観測が続けられており、2019 年現在、$H \to b\bar{b}$ の信号強度は 95% 信頼水準で標準理論の 0.95 ± 0.22 倍である。LHC では現在 Run2 から Run3 への移行を行っており、Run3 では重心系エネルギー 13-14TeV で稼働し、さらにルミノシティーを向上させて稼働させる HL-LHC も計画されている。以下に ATLAS 実験におけるヒッグス質量の測定精度および信号強度の現在の結果を以下に示す。

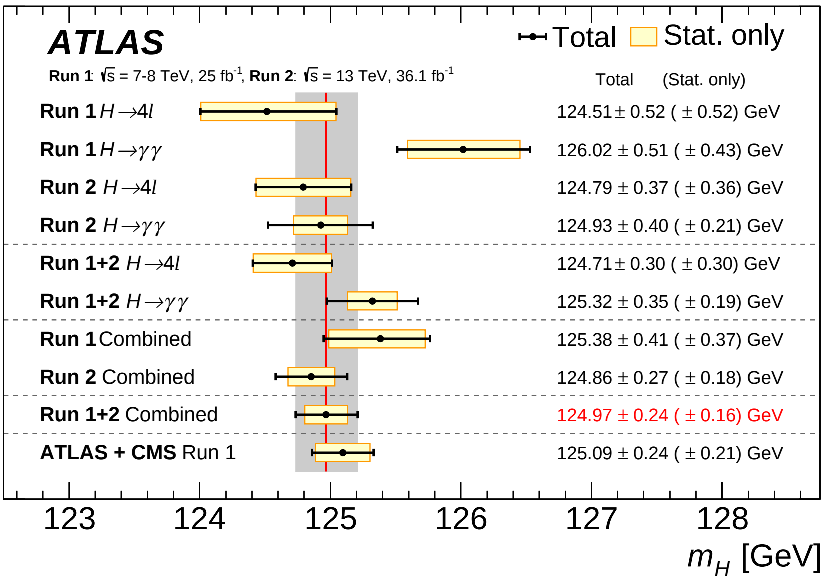


図 1.3: ATLAS 実験におけるヒッグス質量の測定精度 [8]

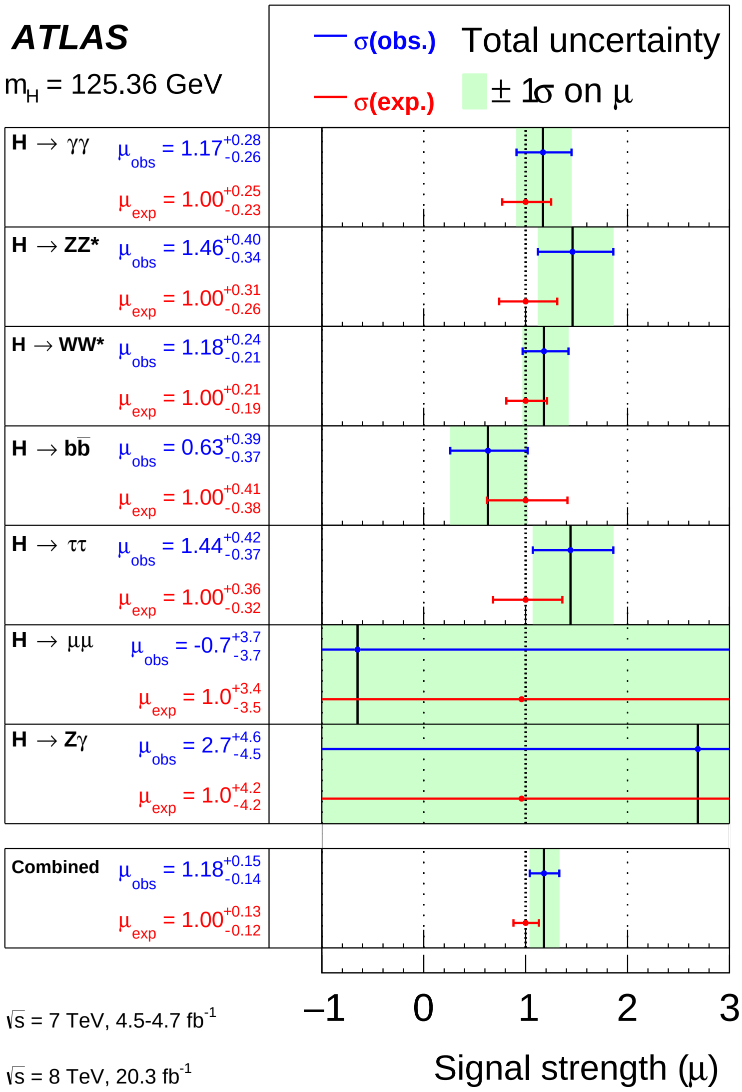


図 1.4: ATLAS 実験における崩壊形式別の信号強度の測定精度 [8]

1.3　標準理論の問題点

1.1 で述べた標準理論は現在最も成功した理論ではあるが、完成した理論とは考えられていない。以下のような問題点があり、超対称性理論や余剰次元などを用いて説明しようという試みもある。

- ニュートリノ振動

ニュートリノはフレーバーが変化し (ニュートリノ振動)、質量を持つことが知られるようになった。しかし、右巻きニュートリノを含まない標準理論ではニュートリノの質量を説明することもニュートリノ振動を説明することもできない。またニュートリノはフレーバー固有状態と質量固有状態が強く混合しており (ポンテコルボ・牧・中川・坂田行列)、

これはクォークの質量固有状態とフレーバー固有状態の弱い混合 (カビボ・小林・益川行列) とは対照的である。

- 重力相互作用が含まれていない

標準理論では、基本相互作用のうち、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用を含むが、重力相互作用は取り入れられていない。理由は重力相互作用が他の相互作用より極めて小さいということだが、プランクエネルギー ($\simeq 10^{19}$[GeV]) ほどのエネルギー領域で他の相互作用と同等の大きさになると考えられている。したがって、統一に期待がもたれるわけであるが、重力相互作用は繰り込みができないという問題がある。これを解決するために超弦理論が期待されているが、低エネルギー領域でどのような理論を実現するかを予言できていない。

- 電化の量子化が説明できない

素粒子の電荷は量子化されているが、標準理論では、弱超電荷 Y の固有値は任意であり、式 (1.11) から電荷の量子化を説明できない。

- 階層性問題

標準模型は典型的なエネルギースケールが $M_W \simeq 80\,[\mathrm{GeV}]$ ほどであるが、ずっと高エネルギーのスケールで何らかの標準理論を超える新しい物理にとって変わられると考えられる。こうした階層性を自然に維持しようとして例えば超対称性理論などが考えられている。

- パラメータを予言できない

標準理論にはヒッグス粒子の質量や真空期待値、クォークや荷電レプトン質量、ゲージ結合定数、カビボ・小林・益川行列 (ニュートリノ質量、ポンテコルボ・牧・中川・坂田行列) の予言できないパラメータがある。ゆえに、もっと大きい対称性の破れとして標準理論が現れていると考えられている。

- 暗黒物質・暗黒エネルギー

宇宙のエネルギー全体に占める通常の物質 (標準理論の素粒子から構成される物質) はわずかに 4%ほどであるという。残りは 23%は暗黒物質によるエネルギー (質量) であり、73%が暗黒エネルギーで占められるという。こうした暗黒物質の候補が余剰次元理論などで提供されている。

第2章　国際リニアコライダー計画

素粒子実験は現状の物理模型の検証および新たな物理模型の発見という目的は同じくして、加速器実験、非加速器実験や加速器実験でも円形加速器、線形加速器といった様々なアプローチがある。国際リニアコライダー (International Linear Collider) 実験は電子・陽電子衝突型の次世代線形加速器であり、日本の岩手県・宮城県にまたがる北上山地に建設が計画されている。まず、重心系衝突エネルギー 250 GeV で稼働し、500GeV、1TeV あるいはそれ以上のエネルギーへの拡張も期待されている。まず、250GeV でヒッグス粒子の精密測定を行い、さらなる高エネルギーでトップクォークや暗黒物質の探索を行うことが計画されている。

2.1　ILC と LHC

現在スイスジュネーブ近郊で稼働する全長 27km の円形加速器に大型ハドロン衝突型加速器 (Large Hadron Collider) がある。これは陽子と陽子を重心系エネルギー 13 TeV で衝突させて、世界最高エネルギーでの観測を実現している。陽子は電子より約 1840 倍重いため、高い重心系エネルギーを実現できる。しかし、陽子の内部構造が複雑で、強い相互作用に伴うハドロン化の影響により、事象選択が難しい。一方、電子、陽電子は陽子と異なり、内部構造を持たないと現状考えられており、比較的クリーンな衝突を実現できるが、シンクロトロン放射[1]によって、荷電粒子は運動量の大きさの 4 乗に比例し質量の 4 乗に反比例するエネルギーを失う [24] ため、質量の小さい荷電粒子を円形加速器で加速すると、莫大なエネルギー損失が生じ経済的に困難が生じる。そこで、質量の小さい電子や陽電子を加速するのにはシンクロトロン放射が発生しない線形加速器が適している。ILC は線形の電子陽電子衝突型加速器であるから、シンクロトロン放射を発生させず、クリーンな環境で精密な測定ができると期待されている。また、始状態の運動学的条件が使用可能である点、エネルギーの拡張が全長を伸ばすことで可能である点、後述するようにビームのスピン偏極度を変えられる点をが ILC の利点である。

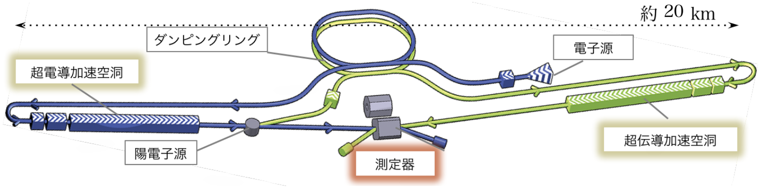


図 2.1: ILC の外観 [3]

[1]シンクロトロン放射は磁場により荷電粒子が軌道を曲げられることで電磁波を放射すること。

2.2 スピン偏極

ILC は前述したように、電子ビームおよび陽電子ビームの偏極率を変えられる。偏極率の定義は以下の通りである。

$$P = \frac{N_R - N_L}{N_R + N_L} \tag{2.1}$$

ただし、N_R はヘリシティーが右巻き (右偏極粒子) の数、N_L はヘリシティーが左巻き (左偏極粒子) の数である。ここで、ヘリシティーは粒子のスピンの運動量方向への射影と運動量の向きが同じときに右巻き、逆のときに左巻きと定義され、粒子の質量が 0 であるときはカイラリティーに一致する。ILC では電子と陽電子の偏極率をそれぞれ変えられる。それぞれの偏極率をまとめて、

$$(P_-, P_+) \tag{2.2}$$

と記す。スピン偏極率を変えられることで以下の利点がある。

- 反応断面積を調節できる。
- 弱い相互作用によって起こる事象を促進、抑制できる。

2.3 ルミノシティー

ルミノシティー $L\left[\mathrm{barn}^{-1}\mathrm{s}^{-1}\right]$ はビームの強度 (エネルギーではない) を表す指標であり、断面積 $\sigma_i\,[\mathrm{barn}]$ と単位時間あたりの事象数 $N_i\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$ を用いて、

$$N_i\left[\mathrm{s}^{-1}\right] = \sigma_i\,[\mathrm{barn}]\,L\left[\mathrm{barn}^{-1}\mathrm{s}^{-1}\right] \tag{2.3}$$

と表される。(i は事象を表す)$\mathrm{barn} = 10^{-28}\mathrm{m}^2$ である。ここで、ルミノシティーは以下のようにも書ける [7]。

$$L = f_{rep}\frac{n_b N^2}{4\pi\sigma_x\sigma_y}H_D \tag{2.4}$$

ここで、f_{rep} は 1 秒あたりの輸送回数、n_b は 1 輸送あたりのバンチ数、N は 1 バンチあたりの粒子数、σ_x や σ_y は衝突点における垂直方向および水平方向のビームサイズである。H_D はビームビーム効果などの影響を補正する係数である。ビームサイズを限りなく小さくすれば、ルミノシティーを増やすことができるように思えるかもしれない。しかし、ビームビーム効果という、ビーム同士の電磁相互作用による光子放出に伴う、ビームエネルギーの減少、背景事象の発生があり、ビームビーム効果でビームの 1 粒子あたりが放出する光子のエネルギーは $\frac{1}{\sigma_x+\sigma_y}$ に比例する [7] から、ビームサイズを限りなく小さくすればビームビーム効果の影響が大きくなってしまう。そこで、$\frac{1}{\sigma_x+\sigma_y}$ を保ったまま、ルミノシティーを大きくするには、$\sigma_x \gg \sigma_y$ とすればよく[2]、ビームを偏平にしている。ILC での重心系衝突エネルギー 250GeV におけるビームサイズは $\sigma_x = 729\,[\mathrm{nm}]$、$\sigma_y = 7.7\,[\mathrm{nm}]$ である [5]。また、積分ルミノシティー $L_{int}\left[\mathrm{barn}^{-1}\right]$

$$L_{int} = \int L(t)dt \tag{2.5}$$

が定義されており、必要な統計量の尺度として用いられる。

[2] 後述するようにダンピングリングでビームを偏平にする際に、ダンピングリングが地表平面上にあるため、σ_x が σ_y より大きくなる。

2.4 加速器

ILC の加速器は図 2.1 にもあるように、主に次の 4 つの部分からなる。

- 電子源
- 陽電子源
- ダンピングリング
- 主線形加速器

電子源

ILC では偏極率の高い電子ビームを生成できる。レーザー源からの偏極したレーザーは DC 銃において歪 GaAs/GaAsP 超格子光電陰極に照射されると、通常量子効率最大 1% 程度で、少なくとも 85%の偏極率の電子を生成する。この後偏極率や電荷が測られ、常伝導加速空洞でバンチ長が半値全幅 1ns から 20ps 程度まで圧縮されて 76MeV まで加速される。その後エネルギーを揃えて超伝導加速空洞で 5GeV まで加速され、スピンおよびエネルギーを制御された上で、ダンピングリングに入射する。こうして、1 バンチあたり 2.0×10^{10} 個の電子を含んだ 1312 バンチが 5Hz でダンピングリングへと入射していく。陽電子源からの入射も同様である。電子源の詳細を図 2.2 に示す。

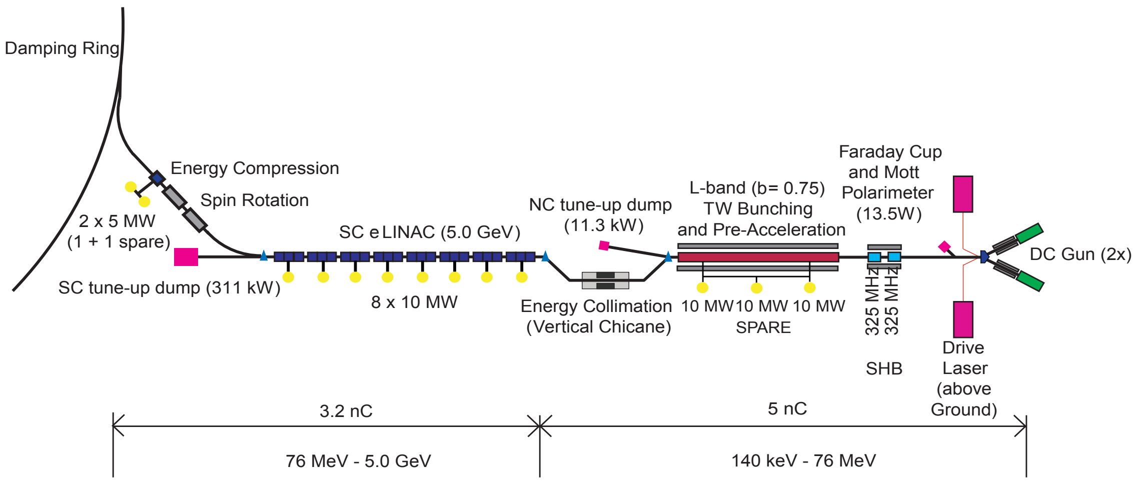


図 2.2: 電子源の詳細 [4]

陽電子源

陽電子は図 2.3 の示すように主線形加速器から陽電子源に入射した 150GeV 250GeV の電子から生成される。基本となるアンジュレーター方式では陽電子源に入射した電子は螺旋型アンジュレーター内でシンクロトロン放射を起こし、円偏光の光子を生成する。光子は回転する厚さ 1.4cm のチタン合金の標的に当たり、電子と陽電子を電磁シャワーとして

放出する。陽電子の捕集効率を上げるためにパルスとして成形され、捕集 L バンド RF 空洞によって 125MeV まで加速される。双極磁石で陽電子と電子が分離されてシケインで陽電子、電子、光子は異なる経路に分離される。陽電子のみが常伝導加速空洞で 400MeV まで加速され、その後、超伝導増幅線形加速器で 5GeV まで加速される。スピンおよびエネルギーを制御された上で、ダンピングリングに入射する。しかしこうして得られる陽電子ビームの偏極率は 30%ほどであり、アンジュレーターを 147m から 231m に伸ばすことで偏極率を 60%程まで増やせる (アンジュレーターの後にコリメーターで誤った偏極の光子を吸収した場合)。陽電子源の詳細を図 2.4 に示す。

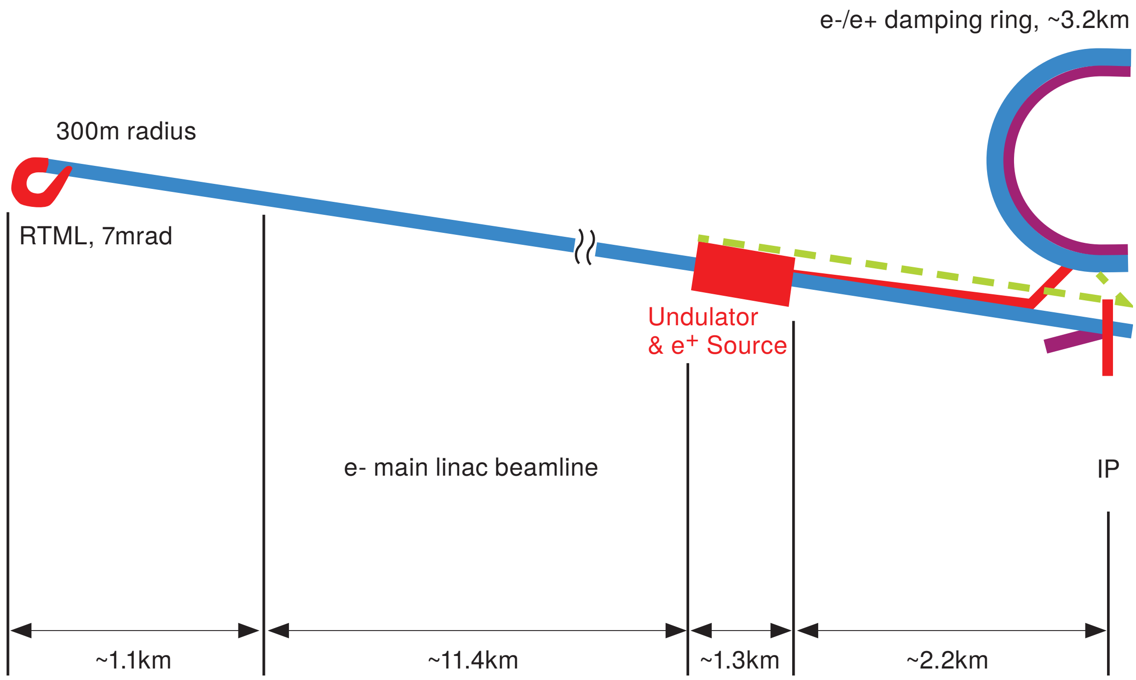


図 2.3: 陽電子源の位置 [4]

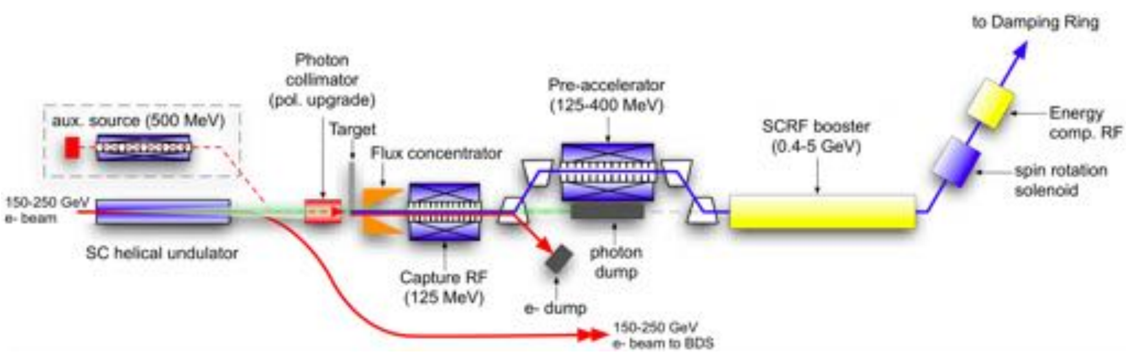


図 2.4: 陽電子源の詳細 [4]

ダンピングリング

ルミノシティーを高めつつビームビーム効果を抑制するには偏平なビームを作る必要がある。ダンピングリングは電子用と陽電子用の 2 本のリングが重なっている。電子源・陽電子源から供給された 5GeV のビームはダンピングリングの曲線部でシンクロトロン放射によりビームの進行方向に平行な縦運動量 P_L と垂直な横運動量 P_T がシンクロトロン放射によって運動量を失うが、直線部で補われる運動量は縦運動量 P_L のみであるためにビームサイズ σ_x や σ_y が小さくなる。ただし、水平方向に関しては量子効果としてエネルギーによる軌道のずれがあり、これがビームサイズを増加させる要因となる。垂直方向に関してはこの効果はこの効果はほとんど影響せず、σ_x は σ_y より大きくなる。ダンピングリングでは 200ms ビームが蓄積され、その後主線形加速器に送られる。

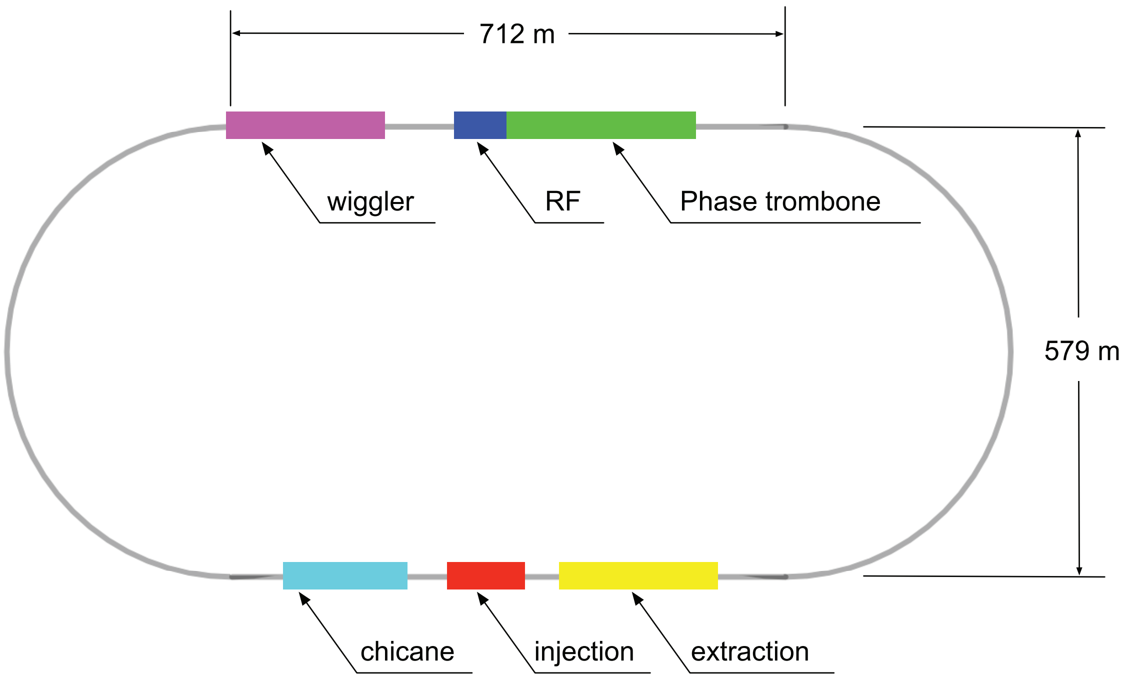


図 2.5: ダンピングリングの配置 [4]

主線形加速器

主線形加速器では 15GeV で入射した電子ビームおよび陽電子ビームを 125GeV までそれぞれ加速して衝突させる。ここでは 2K の液体ヘリウムを用いた定常波型のニオブ製超伝導加速空洞を連結して 12m のクライオモジュールを作る。空洞には高周波高強度の電場をかけることが要求され、1.3GHz で平均 31.5MV/m の電場をかけることになっている。このクライオモジュールを多数連結させることで、主線形加速器が構成される。

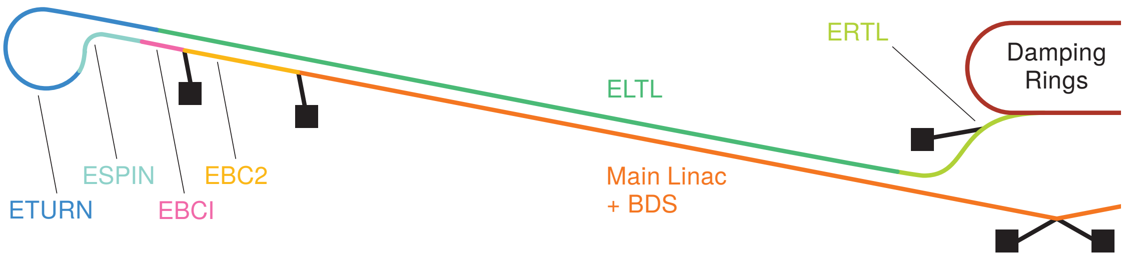


図 2.6: 主線形加速器の配置 [4]

2.5 ILD 測定器

ILC では、ILD(International Large Detector) 測定器と SiD(Silicon Detector) の 2 つの測定器を用いて測定することが想定されている。図 2.7 に ILD 測定器と SiD 測定器の外観を示す。

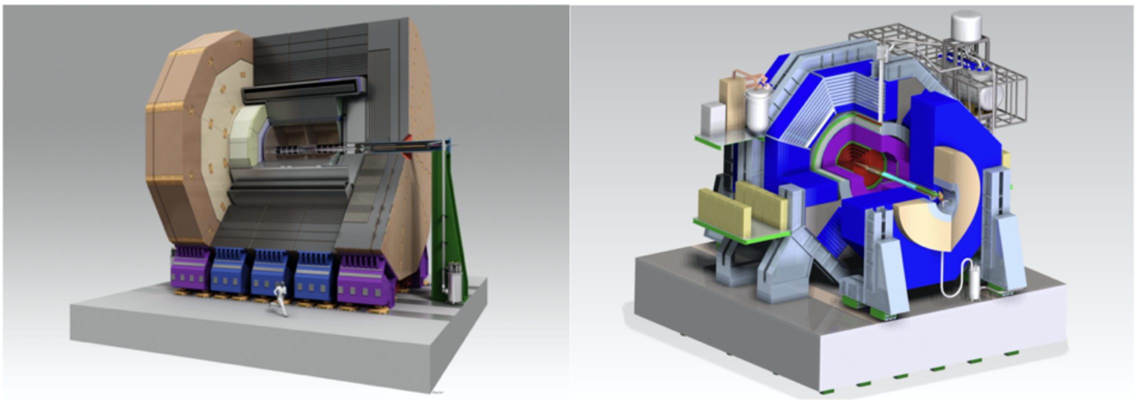


図 2.7: ILD(左) と SiD(右)[5]

ILD と SiD の違いを以下の表に示す。本研究では測定器に ILD を測定して作られたサンプルおよび再構成ツールを用いている。

表 2.1: ILD と SiD の違い

	ILD	SiD
磁束密度	3.5T	5T
飛跡検出器 (tracker)	TPC と Si 検出器の組み合わせ	Si 検出器のみ
電磁カロリーメータ (ECAL)	SiW or ScW	SiW のみ
ハドロンカロリーメータ (HCAL)	analog or semi digital	digital

ILD 測定器は内側から崩壊点検出器・飛跡検出器・電磁カロリーメーター・ハドロンカロリーメーターの順に並んでおり、Particle Flow Algorithm に特化されている。各検出

器の低物質量、高精度・高精細なセンサーを使用し、ソレノイドの中にハドロンカロリーメーターまでが収まっている。ここでは本研究に重要な検出器について以下に述べる。

崩壊点検出器

シリコンピクセル検出器を両面に貼った厚さ 2mm の層を半径方向に 3 重に連ねる設計となっている。$R = 16 - 60$mm に位置している。使用する技術は CMOS、FPCCD、DEPFET などが検討されている。要求される位置分解能は以下の式の通りである。[5]

$$\sigma_{r\phi} = 5[\mu\mathrm{m}] \bigoplus \frac{10}{p[\mathrm{GeV}]\sin^{\frac{3}{2}}\theta}[\mu\mathrm{m}] \tag{2.6}$$

二次崩壊点を測定することで b ジェット等の同定を正確に行えるようにする。特にヒッグス粒子は b クォークへの崩壊分岐比が高く (表 6.1)、重要である。

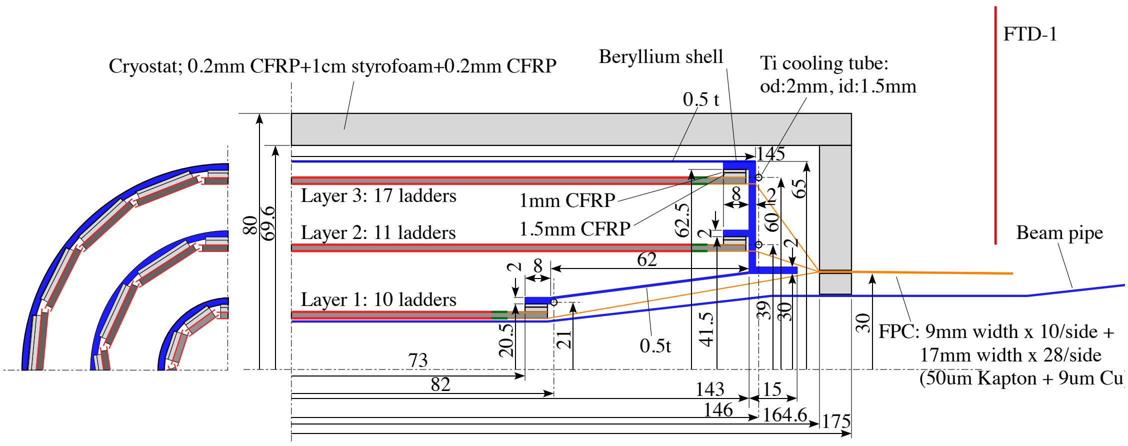


図 2.8: ILD 崩壊点検出器の内部構造 [5]

飛跡検出器 (TPC)

飛跡検出器は荷電粒子の運動量を測定する検出器であり、Time Project Chamber (TPC) を採用している。TPC はガス検出器であり、荷電粒子のヒットが多く得られることで高い運動量分解能を実現できると期待できる。要求される運動量分解能は以下の通りである。[5]

$$\sigma_{1/p_T} = 2 \times 10^{-5} \bigoplus 1 \times \frac{10^{-3}}{p_T \sin\theta} \tag{2.7}$$

エネルギー損失量 $\frac{dE}{dx}$ を測定することで Bethe-Bloch の式から、粒子識別も可能となる。TPC の運動量分解能が高いことで、PFA での高いエネルギー分解能につながる。

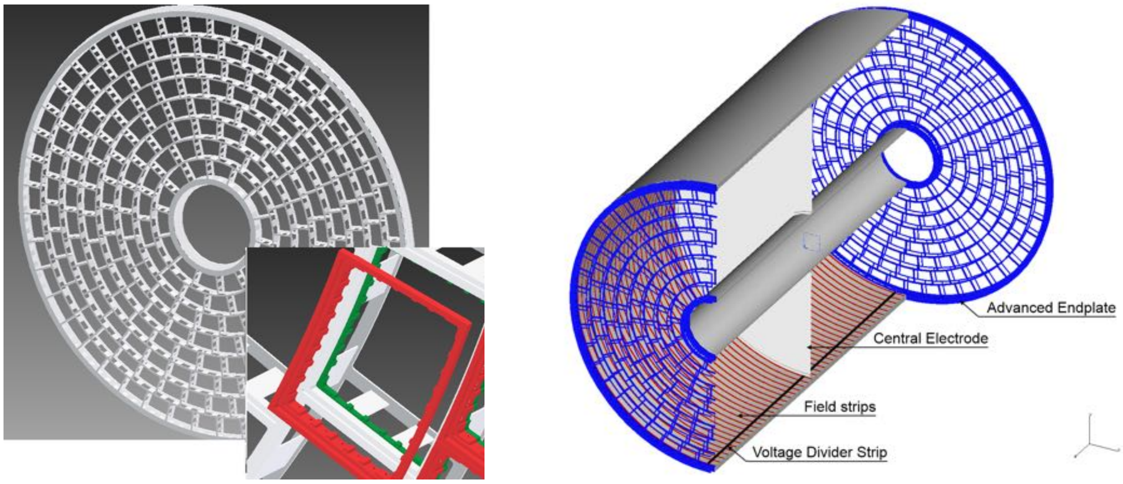


図 2.9: TPC[5]

電磁カロリーメーター

電磁カロリメータの主な役割は光子を同定し、エネルギーを測定することである。センサー層と吸収層を交互に重ねるサンプリング型設計となっている。吸収層は Moliere 半径が小さく、電磁相互作用による放射長と強い相互作用のの相互作用長が大きく異なるタングステンを用いることで、コンパクトな電磁シャワーが実現される。PFA に最適な高精細なセンサー層として、5mm×5mm のシリコンタイルを用いる SiWECAL と、短冊形シンチレータに Pixelated Photon Detector (PPD) を読み出しに用いる ScECAL の 2 種類が提案されている。前者はエネルギー分解能を有しているのに対して、後者はソフトウェアによる処理で疑似タイルを再構成 (Strip Splitting Algorithm[6]) することで比較的安価に SiWECAL に匹敵するエネルギー分解能を得られる。

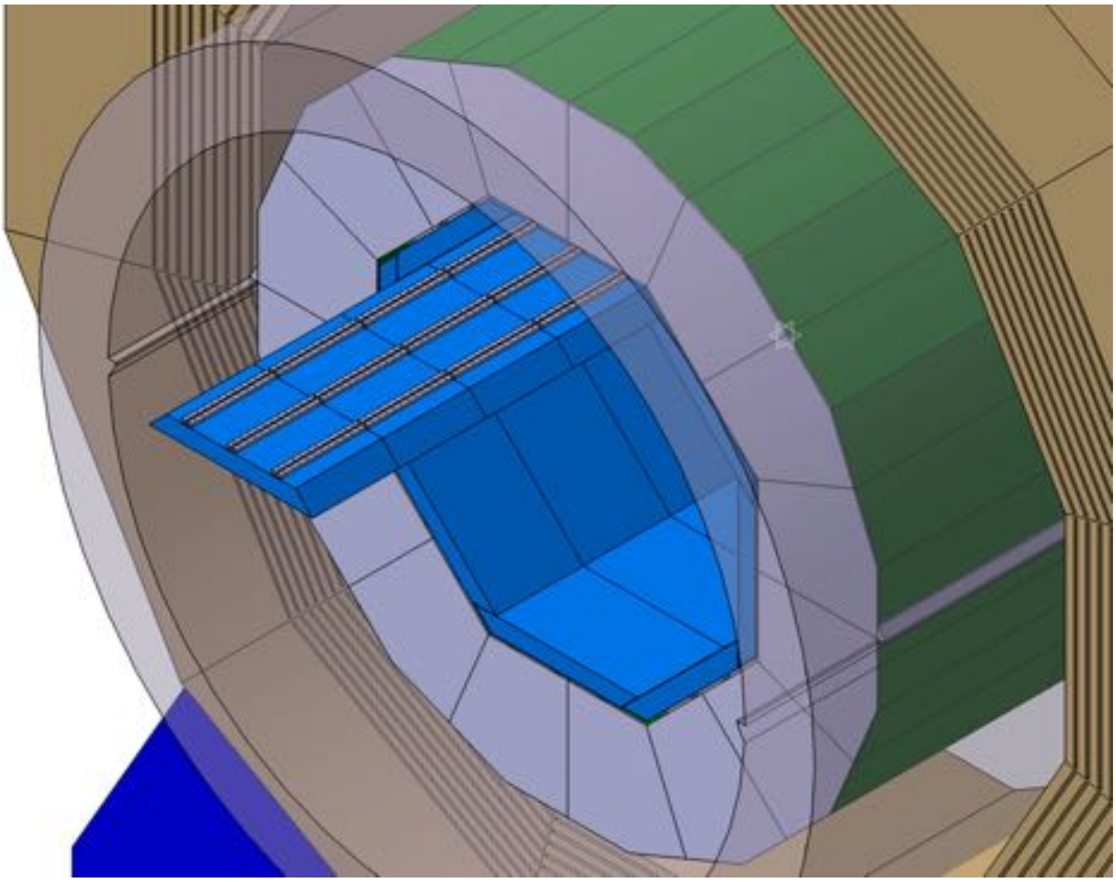
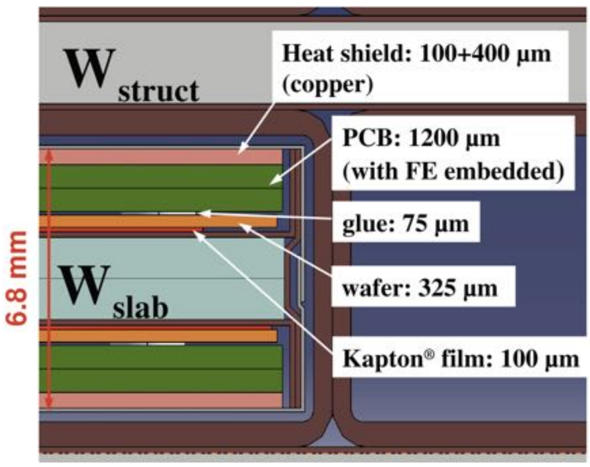


図 2.10: ILD 測定器内の電磁カロリーメーター [5]



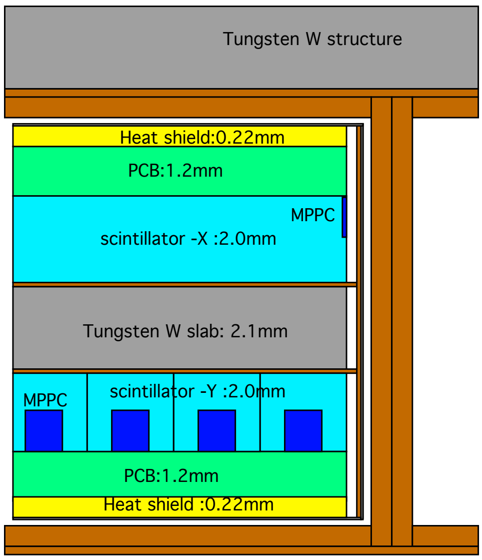


図 2.11: シリコン型 (左) とシンチレーター型 (右) の電磁カロリーメーター [5]

ハドロンカロリーメーター

Iハドロンカロリメーの主な役割は荷電ハドロンと中性ハドロンのエネルギー損失を分離し、中性ハドロンのエネルギーを測定することである。鉄の吸収層とセンサー層を重ねるサンプリング型カロリメータである。センサー層としては検討されている技術としては、3cm×3cm のシンチレータタイルと PPD の読み出しをもちいる Analog HCAL と、1cm×1cm のガス RPC のセルを用いる Semi-Digital HCAL がある。

すべての測定器をあわせて得られるジェットエネルギー分解能を図 2.12 に示す。

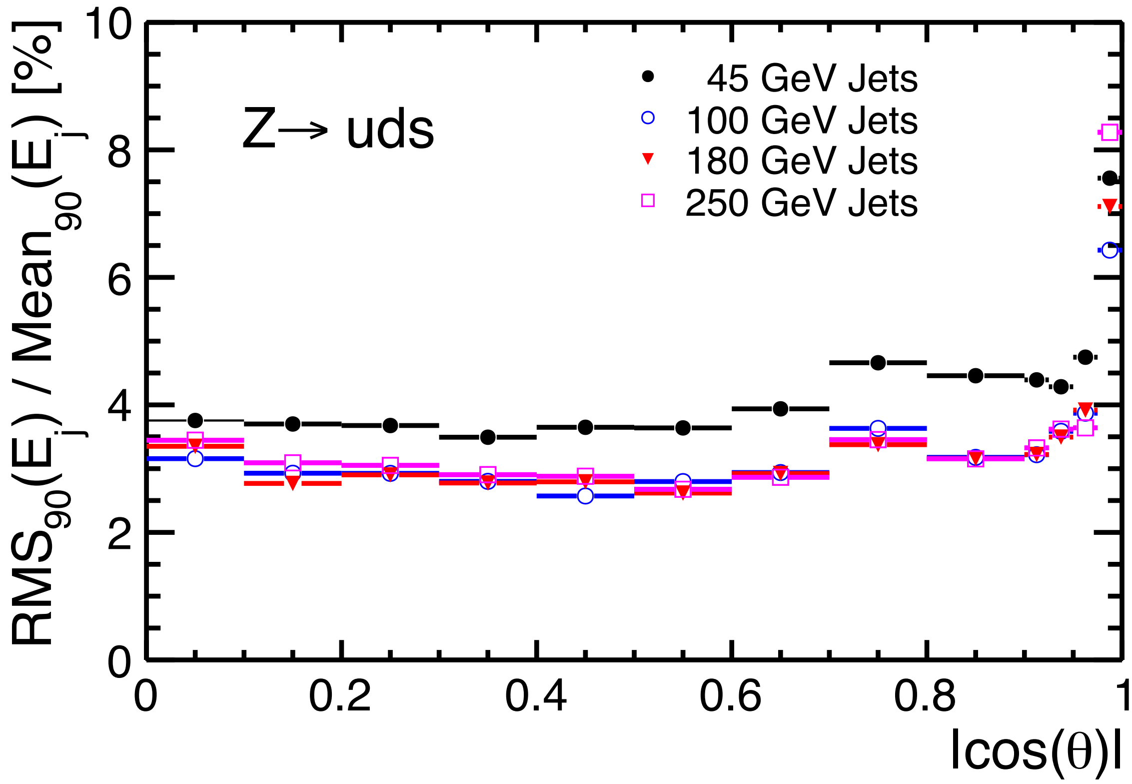


図 2.12: uds ジェットのエネルギー分解能 [5][3]

[3] ヒストグラムの積分で 90% の事象数が占められる最小の積分領域を RMS_{90}、積分領域における期待値を $Mean_{90}$ という。$RMS_{90}/Mean_{90}$ は分解能が裾を引く場合に裾の影響を抑えて分解能を評価できるが、本論文では今後使用しない。

第3章　研究動機

3.1　kinematic fit の概要

素粒子実験において信号事象と背景事象を分ける事象選択は解析における最重要課題の一つである。特に信号事象の種類が数多く存在する実験においては、信号事象の種類ごとにあるいは考慮する背景事象の種類ごとに選択条件を考えなければならないが、選択条件にいかなる量を用いてどのような値で切り分ければ純度 (全事象数に占める信号事象数の割合) を最大化できるかという問いに答えるのは難しい。もちろん、多変量解析や機械学習によって純度を最大化する選択条件を見出そうとする試みも行われてはいるが、なぜその選択条件で良いのかという物理から離れてしまい、信号事象ごと、考慮する背景事象ごとに全事象についてやり直さなければいけない。本質的には事象選択の難しさは測定値に誤差があることと、選択条件にいかなる量を用いるかを見出す必要があることであるが、測定値からより真の値に近い値を得やすくなり、かつ選択条件として「信号事象らしさ」をどの事象でも同じ尺度で得られる解析手法がある。それが kinematic fit である。

kinematic fit は大型電子陽電子衝突型加速器 (LEP) 実験における W ボソンの質量解析に有効であった。現在は ATLAS、CMS などの加速器実験でも用いられている。kinematic fit は事象毎に物理量の測定値が測定器の分解能に従って分布することを考慮しながら、その物理量の真値の推定値同士の間に物理的な制約条件を課し、真値の推定値をより真値に近付けるという手法である。このとき測定器の分解能および物理的な制約条件は信号事象に対して満たされるように設定しておく。ゆえに信号事象に対して kinematic fit を行えば、真値の推定値は測定器の分解能および物理的な制約条件をよく満たす。一方、背景事象はあまりよく満たさない。このどのくらいよく満たすかを数値として「信号事象らしさ」として選択条件として加えることができる。「信号事象らしさ」は事象毎に得られるために、背景事象が増えても全事象に対して kinematic fit をやり直す必要はない。また、物理的制約条件は 4 元運動量保存則や 4 元運動量と質量の関係など自明なものであり、恣意的になり得ない。このことから、kinematic fit は事象選択を原則的に機械的に行うことを可能にする。ILC においては、相対的に分解能の悪いジェットエネルギーの評価に有効であると考えられている。

3.2　kinematic fit の構成

kinematic fit の定式化は実験や fitter の種類によって大きく異なるため、ここでは kinematic fit の構成の大枠のみを述べる。3.1 でも述べたように、kinematic fit は物理量の測定値が測定器の分解能に従って分布することを考慮しながら、その物理量の真値の推定値同士の間に物理的な制約条件を課し、真値の推定値をより真値に近付けるという手法であ

るから、kinematic fit に予め必要なのは測定器の分解能および物理的な制約条件である。今後それぞれ

fit object 測定器の分解能

constraint 物理的な制約条件

と呼ぶ。ただし、本論文での fit object および constraint の呼称は一般に kinematic fit で使われている用法と異なる可能性がある。

ここで、constraint は例えば 4 元運動量保存などのように物理量同士の関係を等式で固定するものと、崩壊幅のように物理量同士の関係をある分布に従うと想定し[1]、固定しないものがあり、今後それぞれ

hard constraint 物理量同士の関係を等式で固定する constraint

soft constraint 物理量同士の関係をある分布に従うと想定する constraint

と呼ぶ。kinematic fit の定式化には fit object、hard constraint、soft constraint の 3 つの部分が必要である。そして、kinematic fit はその式を解いて、測定値から真値の推定値を得て、かつ選択条件として「信号事象らしさ」を得ることで実現される。

3.3 研究目的

kinematic fit の定式化は第 4 章に譲る。ここでは kinematic fit の構成を踏まえて、現状の ILC における kinematic fit が抱える問題を提示し、研究動機を述べる。ILC における kinematic fit とは iLCSoft[16] という線形加速器実験のためのソフトウェアとして内の kinematic fit 用のパッケージとして実装されている MarlinKinfit[17] を指す。MarkinKinfit には開発された順に OPAL Fitter、Newton Fitter、New Fitter という 3 種類の kinematic fitter が存在する。これらの fitter についての詳細な説明は第 4 章に譲るものの、現状の MarlinKinfit 全体を通した問題点は大きく以下の 3 つである。

1. fit object に正規分布以外の関数を想定することができない
2. soft constraint に任意の関数を導入することができない
3. constraint をかけられる対象が限定されている。

1 は測定器あるいは観測量によって測定器分解能が正規分布で表せない分布となることが多く存在することから問題となる。例えば、終状態に b ジェット、c ジェットなどの重いジェットが含まれている場合に、ジェットのエネルギー分解能が非対称になり、正規分布ではなくなる。2 は様々な影響を考慮する際に問題となる。例えば、崩壊する粒子の質量は Breit-Wigner 分布になる一方でビームの始状態放射 (Initial State Radiation; ISR) などの分布など様々な分布を考慮する必要があるが、soft constraint は任意の分布に対応できるようにはなっていない。3 は constraint をかけられる対象が粒子の質量の質量や運動

[1] 崩壊する粒子の質量分布は Breit-Wigner 分布に従う

量、崩壊点などに限定されており、対象を変更するのが容易ではないことから、汎用性の点と問題となる。これは constraint に任意の関数を適用できるようにすることで解決できるはずである。

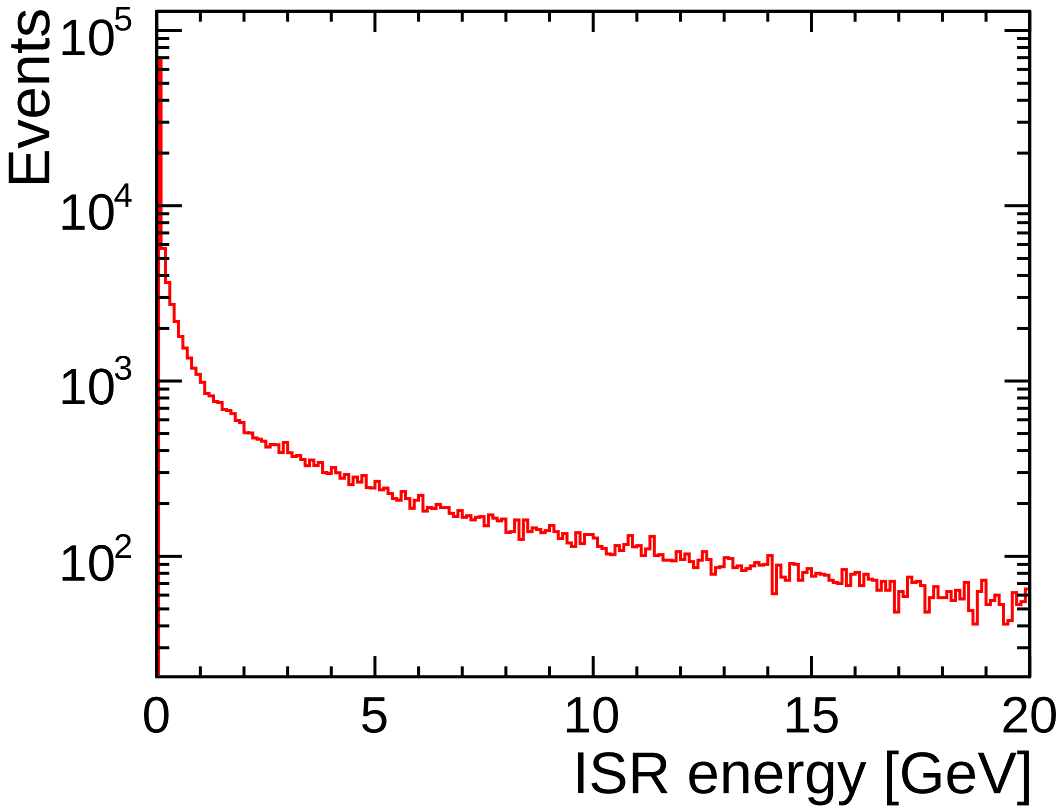


図 3.1: 始状態放射によるエネルギー損失

したがって、本研究の目的は『fit object および constraint に任意の関数を導入できる汎用 kinematic fit を開発する』ということである。

3.4 本研究の成果の概要

本研究の成果を述べる前に、本研究がどの段階まで進んだかを予め表にしておく。なお、詳細は後の章に述べるため、その章を参照していただきたい。

表 3.1: 本研究の成果

課題	未了/完了	記述章
fit object および constraint に任意の関数を導入できる定式化	完了	第 4 章
MarlinKinfit と独立した kinematic fitter の実装	完了	第 5 章
自分の解析過程における kinematic fit を行わない事象選択の実施	完了	第 6 章
正しい fit object 関数の評価	途上	第 7 章
ISR の評価	未了	
新しい kinematic fit の MarlinKinfit への実装	未了	

第4章　kinematic fit

kinematic fit は第 3 章で述べたように物理量の最適化手法の一つである。本章では kinematic fit をどのように定式化すべきかについて詳しく記述する。次に kinematic fitter として現在 MarlinKinfit に実装されている OPAL Fitter、Newton Fitter、New Fitter という異なる 3 つの Fitter のうち、OPAL Fitter と Newton Fitter の定式化について述べる。New Fitter については、数値計算における差異があるものの、最適化としては Newton Fitter と同じ問題を解いているため、ここでは New Fitter の説明は割愛する。第 5 章でその差異に触れる。

4.1　kinematic fit の定式化

kinematic fit は fit object、soft constraint、hard constraint からなると述べた。しかし、これは私が研究を始めた時点での知見であり、以下では kinematic fit を詳しく説明するに当たり、MarlinKinfit が OPAL Fitter、Newton Fitter と改良されていく過程に沿って、現在の知見までを述べる。

まず、kinematic fit は 1 事象 (ILC においては電子・陽電子の 1 回の衝突) 毎に行う。これは、事象間で物理量の相関はないからである。したがって、以下は 1 事象における議論である。

MarlinKinfit における kinematic fit は最小二乗法の考えを応用している。最小二乗法はある測定値 y とその真値の推定値 η が y の測定誤差 (真値の推定値が η であるときの測定値 y の分布の標準偏差) が σ であれば、

$$\min \chi^2_{univariate} = \left(\frac{y-\eta}{\sigma}\right)^2 \tag{4.1}$$

という最小化問題を解き、真値の推定値 η に含まれる未知定数を最適化するのである。多変数に拡張すると、測定値 $\overrightarrow{y}$ とその真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ であれば、測定値 $\overrightarrow{y}$ の測定誤差を共分散行列 V で表すと、

$$\min \chi^2_{multivariate} = (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}}\, V^{-1}\, (\overrightarrow{y} - \overrightarrow{\eta}) \tag{4.2}$$

となる。ここで、$\chi^2_{multivariate}$ は真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ のときの測定値 $\overrightarrow{y}$ の測定分解能を表している。したがって、これは fit object にあたる。fit object の測定値 $\overrightarrow{y}$ と真値の推定値 $\overrightarrow{\eta}$ は同じ物理量に対応している。この fit object に含まれる物理量についてであるが、これは実験や解析対象により選択の余地があるものの、MarlinKinfit では、kinematic fit がジェットのエネルギー分解能評価に有効であり、カロリーメータにおけるエネルギー分

解能が相対的に悪いことから、エネルギーを含めている。また、それ以外の物理量としては球面座標系における 2 つの角度がある。1 本のジェットにつきエネルギーと 2 つの角度 (E,θ,ϕ) の 3 変数を評価している。ただし、4 元運動量を

$$(E,p_x,p_y,p_z) = (E,|\overrightarrow{p}|\sin\theta\cos\phi,|\overrightarrow{p}|\sin\theta\sin\phi,|\overrightarrow{p}|\cos\theta) \quad (0\leq\theta\leq\pi,-\pi\leq\phi\leq\pi) \tag{4.3}$$

として、図 2.1 を基に、x 軸を電子のビーム軸と陽電子のビーム軸のダンピングリングと交わる二等分線上にダンピングリングから衝突点へ向かう方向にとり、z 軸を電子のビーム軸と陽電子のビーム軸のダンピングリングと交わらない二等分線上に電子側から陽電子側に向かう方向にとり、y 軸を z 軸と x 軸に直交する右ねじの方向にとる[1]。iLCSoft では質量に関しては Particle ID[18] から求めた粒子の質量を用いており、これは信頼のおける値であるとして fit はしない。また、Particle Flow Algorithm[19] において、荷電粒子に関しては飛跡検出器から運動量を、中性粒子に関してはカロリーメータからエネルギーを測定し、Particle ID から求めた粒子の質量からエネルギー及び運動量のうち、求まっていない方を計算しているから、運動量はエネルギーに分解能が押し付けられているとして含めていない。ILC に限定しない一般の議論に戻ると、最小二乗法は通常 η_i 同士が全て独立ではなくある関係を持っている。なぜなら、η_i 同士が全て独立では、式 (4.2) を解いても、$\overrightarrow{\eta}=\overrightarrow{y}$ という自明な解しか得られないからである。だから、真値の推定値 η_i 同士の関係が必要になる。例えば、4 元運動量の保存や、4 元運動量と質量の関係などである。これが constraint である。まず物理量同士の関係を等式で固定する hard constraint $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi})=\overrightarrow{0}$ を考えた場合の定式化が、OPAL Fitter である。($\overrightarrow{\xi}$ の説明は後述する。)

4.1.1 OPAL Fitter

OPAL Fitter は MarlinKinfit に 2008 年に Benno List が実装した Fitter であり [17]、χ^2 の定義は以下である。ただし、等式制約条件 $2\overrightarrow{h}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi})=\overrightarrow{0}$ における 2 は単なる今後の規格化であり、なくても良い。

$$\begin{aligned} &\min_{\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}} && \chi^2_{OPAL}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta}) \\ &\text{subject to} && 2\overrightarrow{h}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi})=\overrightarrow{0} \end{aligned} \tag{4.4}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{y} &: \text{測定値} \\ \overrightarrow{\eta} &: \text{測定値に対する真値の推定値} \\ \overrightarrow{\xi} &: \text{非測定値に対する真値の推定値} \\ V &: \text{共分散行列} \end{aligned}$$

OPAL Fitter は最小二乗法に hard constraint をかけた定式化をしていることがわかる。ここで、非測定値に対する真値の推定値 $\overrightarrow{\xi}$ というのは、測定できないが他の物理量との関係で求まる物理量の真値の推定値であり、例えば、ILC では測定できないニュートリノの 4 元運動量などを衝突重心系 4 元運動量の保存から導入する場合などに現れ、constraint

[1] 電子のビーム軸と陽電子のビーム軸は 14 mrad で交わっている。

にしか存在できない変数となっている。

OPAL Fitter は fit object と hard constraint を備えた fitter である。しかし、量子力学では不確定性原理によって物理量の真値自体がある分布を持つことが考えられるから、真値の推定値に課す関係に幅を持たせてやる必要が生じる。これが soft constraint である。soft constraint は hard constraint のように等式制約条件を課すのでなく、幅を持たせた関係性を課すのであるから、これは測定値が真値を中心に幅を持っているのと同じことである。したがって、soft constraint は fit object と同じように最小二乗法で課す。等式 $g_l(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi})=0$ を中心で満たし、それぞれ σ_l の幅を持っているとすれば、soft constraint を含んだ Newton Fitter は次のように定式化できる。

4.1.2 Newton Fitter

Newton Fitter は MarlinKinfit に 2011 年に Benno List が実装した Fitter であり [17]、fit object の構成は OPAL Fitter と同様であるが、χ^2 に soft constraint の項が加わった。soft constraint の項は χ^2_{Newton} の第二項にあたる。

$$\begin{aligned}
\min_{\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}} \quad & \chi^2_{Newton}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}}\, V^{-1}\,(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta}) + \sum_{l=1}^{L}\left(\frac{g_l\left(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}\right)}{\sigma_l}\right)^2 \\
\text{subject to} \quad & 2\overrightarrow{h}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = \overrightarrow{0}
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
L &: \text{soft constraint の数} \\
g_l(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) &: \text{soft constraint で 0 を中心に正規分布の幅を持たせたい値} \\
&(\sigma_l \to 0 \text{の極限で } g_l(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = 0 \text{ の hard constraint になる}) \\
\sigma_l &: \text{soft constraint の幅} \\
&(\text{正規分布の標準偏差に換算したもの})
\end{aligned}$$

Newton Fitter がなぜ OPAL Fitter と別に実装されたのかというと、第 5 章で述べるが、数値計算上の問題である。ここまでが MarlinKinfit から分かる kinematic fit の知見である。

4.1.3 新しい kinematic fit の定式化

ここで、現状の MarlinKinfit の 3 つの問題点

1. fit object に正規分布以外の関数を想定することができない
2. soft constraint に任意の関数を導入することができない
3. constraint をかけられる対象が限定されている。

を考えてゆく。これを考える前に、最小二乗法を定義に戻って考え直す必要がある。まず、$\chi^2_{multivariate}$ は多変数正規分布からなる尤度 (N: fit object に含まれる物理量の数)

$$L_{multivariate}(\overrightarrow{\eta}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |V|}} e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})} \tag{4.6}$$

の対数をとり負号をつけたものが定義である。ただし、$|V|$ は V の行列式である。最尤法で尤度を最大化するとき χ^2 を最小化することになるから、これは最小二乗法である。ここで、$(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ 同士の関係、すなわち constraint をさらにこの尤度に取り入れることを考える。すると、対数に負号をつけたものが χ^2_{OPAL} および χ^2_{Newton} を再現することを考えれば、尤度 L_{OPAL} および L_{Newton} は

$$L_{OPAL}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |V|}} e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})} \prod_{k=1}^{K} \delta\left(h_k\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)\right) \tag{4.7}$$

$$L_{Newton}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N |V|}} e^{-\frac{1}{2}(\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\overrightarrow{y}-\overrightarrow{\eta})} \prod_{l=1}^{L} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_l} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{g_l\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)}{\sigma_l}\right)^2} \prod_{k=1}^{K} \delta\left(h_k\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)\right) \tag{4.8}$$

K は hard constraint の数、L は soft constraint の数を表す。hard constraint の部分は便宜上デルタ関数で表した。すると、現状の MarlinKinfit の問題点の 1 と 2 が理解できるだろう。尤度 $L_{OPAL}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ および尤度 $L_{Newton}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ は fit object を第一因数に含んでいるが、正規分布に限定されている。尤度 $L_{Newton}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ は soft constraint を第二因数に含む点で OPAL Fitter で扱えなかった soft constraint が扱えるようになったが、これも正規分布である。これを任意の関数に拡張することが目的である。ここで、「現状の MarlinKinfit の 3 つの問題点」において fit object については「fit object に正規分布以外の関数を想定することができない」と記しながら、soft constraint については「soft constraint に任意の関数を導入することができない」と異なる表現をしたのは、実は MarlinKinfit では Newton Fitter で質量にのみこの定式化で Breit-Wigner 分布を仮定した soft constraint をかけられるようになっているからである。MarlinKinfit では、Breit-Wigner 分布の幅 Γ_l を以下の式で正規分布の幅 σ_l に対応させて計算している。

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{|g_l(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})|}{\Gamma_l}} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{|g_l(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})|}{\sigma_l}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \tag{4.9}$$

しかし、fit object も soft constraint も任意の関数が使えないことに変わりはない。3 については定式化ではなく実装上の問題で、例えば Breit-Wigner 分布を仮定した constraint は質量にはかけられるが運動量にはかけられない [17]。

したがって、我々が目指すべき kinematic fit の定式化は $L_{Newton}(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi})$ の第一因数である fit object および第二因数である soft constraint を一般の関数に置き換えれば実現できる。これを置き換えた尤度は以下のようになる。

$$L(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) = f(\overrightarrow{y}; \overrightarrow{\eta}) \prod_{l=1}^{L} s_l(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}) \prod_{k=1}^{K} \delta\left(h_k\left(\overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\xi}\right)\right) \tag{4.10}$$

ここで、fit object は確率密度関数 $f(\vec{y};\vec{\eta})$ で表され、soft constraint は確率密度関数 $s_l(\vec{\eta},\vec{\xi})$ で表されている。ただし、$f(\vec{y};\vec{\eta})$ のセミコロン (;) の左は確率変数であり、右は条件を表す定数であって確率変数ではないことを述べておく。こうして kinematic fit の一般の定式化ができたわけであるが、Newton Fitter の定式化を $f(\vec{y};\vec{\eta})$ および $s_l(\vec{\eta},\vec{\xi})$ が正規分布であるときに再現するように我々の fitter の最適化問題を尤度の対数をとり、負号をつけ、正規分布の指数の係数 $\frac{1}{2}$ のために 2 倍することで定式化した。

4.1.4 Likelihood Fitter

現状我々が開発している Fitter は尤度の考えに基づいているから、Likelihood Fitter(仮称) と呼ぶことにする。Likelihood Fitter では以下のように χ^2 を定義している。

$$\begin{aligned} \min_{\vec{\eta},\vec{\xi}} \qquad & \chi^2_{Likelihood}(\vec{\eta},\vec{\xi}) = -2\ln f(\vec{y};\vec{\eta}) - 2\sum_{l=1}^{L} \ln s_l(\vec{\eta},\vec{\xi}) \\ \text{subject to} \quad & 2\vec{h}(\vec{\eta},\vec{\xi}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{4.11}$$

これにより、fit object および soft constraint に任意の分布を導入し、かつ constraint を任意の対象にかけられる fitter を実装するものである。ただし、χ^2 と記してはいるが、この χ^2 はカイ二乗分布に従わないため、単なる記号であると考えていただいてよい。実際には尤度の対数を取り、負号をつけたものを規格化のために 2 倍したのであり、負対数尤度 (negative log likelihood) とでも呼ばれるものである。ここで、実際に式 (4.4)、式 (4.5)、式 (4.11) を最適化するにあたり、解析的には次に述べる Lagrange の未定乗数法を用いる。

4.2 Lagrange の未定乗数法

関数 $f(\vec{x})$ を等式制約条件 $\vec{c}(\vec{x})$ のもとで最小化したい、すなわち、

$$\begin{aligned} \min_{\vec{x}} \qquad & f(\vec{x}) \\ \text{subject to} \quad & \vec{c}(\vec{x}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{4.12}$$

を解きたい場合、以下の Lagrange 関数を考える。

$$\mathcal{L}(\vec{x},\vec{\lambda}) = f(\vec{x}) - \vec{\lambda}^{\mathrm{T}}\vec{c}(\vec{x}) \tag{4.13}$$

ただし、$\vec{\lambda}$ は Lagrange の未定乗数で、最適化が完了すると決定する。
これを、各変数 $(\vec{x},\vec{\lambda})$ に対する極値問題として解き、$f(\vec{x})$ が最小になる極値を探すことで最適化が完了する。

第5章　fitterのアルゴリズム

本研究では、準ニュートン法を用いた逐次二次計画法で $\chi^2_{likelihood}$ を等式制約条件の下で最小化する。まず、逐次二次計画法を説明しその後,OPAL Fitter、Newton Fitter、New Fitter および Likelihood Fitter の計算方法を逐次二次計画法の考えを用いて説明する。その後、逐次二次計画法を利用した $\chi^2_{likelihood}$ の最適化アルゴリズムについて詳しく述べる。

5.1　二次計画法

従来の Fitter や自分の Fitter で用いられている原理を説明するため、まず、二次計画問題

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{x}} && \frac{1}{2}\vec{x}^{\mathrm{T}}Q\vec{x} + \vec{q}^{\mathrm{T}}\vec{x} \\ &\text{subject to} && A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.1}$$

を考える。ただし、Q は実対称行列とする。この問題を Lagrange 未定乗数法で解くことを考えると、Lagrange 関数は

$$\mathcal{L}_{QP}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \frac{1}{2}\vec{x}^{\mathrm{T}}Q\vec{x} + \vec{q}^{\mathrm{T}}\vec{x} - \vec{\lambda}^{\mathrm{T}}(A\vec{x} - \vec{b}) \tag{5.2}$$

と書ける。この極値問題を解くため、Lagrange 関数を各変数 $(\vec{x}, \vec{\lambda})$ で偏微分して $\vec{0}$ と置くと、

$$\vec{\nabla}_x\mathcal{L}_{QP}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = Q\vec{x} + \vec{q} - A^{\mathrm{T}}\vec{\lambda} = \vec{0} \tag{5.3}$$

$$-\vec{\nabla}_\lambda\mathcal{L}_{QP}(\vec{x}, \vec{\lambda}) = A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0} \tag{5.4}$$

これを行列でまとめて表記すると、

$$\begin{pmatrix} Q & -A^{\mathrm{T}} \\ A & O \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{q} \\ \vec{b} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

となるから、この連立一次方程式が解ければ、最適解が求まる。

5.2　逐次二次計画法

MarlinKinfit は OPAL Fitter 、Newton Fitter 、New Fitter の順に改善されてきた。これらの Fitter は全て逐次二次計画法によるものである。逐次二次計画法は非線型計画法の一種であり、逐次近似法である。逐次近似法は最適化で初期値 $(\vec{x}^0, \vec{\lambda}^0)$ から最適解

$(\vec{x}^*, \vec{\lambda}^*)$ を求める際、ν 番目の値 $(\vec{x}^\nu, \vec{\lambda}^\nu)$ から $(\nu+1)$ 番目の値 $(\vec{x}^{\nu+1}, \vec{\lambda}^{\nu+1})$ に逐次解を更新していく方法である。

$$\begin{pmatrix} \vec{x}^{\nu+1} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}^{\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{p}^{\nu} \\ \vec{s}^{\nu} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

今、以下の非線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{x}} && f(\vec{x}) \\ &\text{subject to} && \vec{c}(\vec{x}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.7}$$

逐次二次計画法では、解を更新する際に部分問題として以下の二次計画問題を解く。

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{p^\nu}} && \vec{p^\nu}^{\mathrm{T}} \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu}) \vec{p}^\nu + \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} f(\vec{x}^\nu) \vec{p}^\nu \\ &\text{subject to} && \left[\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\mathrm{T}}(\vec{x^\nu})\right]^{\mathrm{T}} \vec{p}^\nu + \vec{c}(\vec{x}^\nu) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.8}$$

ただし、$\mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu})$ は Lagrange 関数

$$\mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu}) = f(\vec{x}^\nu) - \vec{\lambda}^{\nu\mathrm{T}} \vec{c}(\vec{x}^\nu) \tag{5.9}$$

である。これを式 (5.1) と比較すると、

$$\vec{x} = \vec{p}^\nu \tag{5.10}$$

$$\vec{\lambda} = \vec{\lambda}^{\nu+1} \tag{5.11}$$

$$Q = \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu}) \tag{5.12}$$

$$\vec{q} = \vec{\nabla}_x f(\vec{x}^\nu) \tag{5.13}$$

$$A = \left[\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\mathrm{T}}(\vec{x^\nu})\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.14}$$

$$\vec{b} = -\vec{c}(\vec{x}^\nu) \tag{5.15}$$

であるから、これを式 (5.5) に代入して、

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu}) & -\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\mathrm{T}}(\vec{x^\nu}) \\ \left[\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\mathrm{T}}(\vec{x^\nu})\right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}^\nu \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_x f(\vec{x}^\nu) \\ -\vec{c}(\vec{x}^\nu) \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

これを解くことで、次のステップを得る。この式はニュートン法による定式化と同じである。逐次二次計画法は式 (5.8) をニュートン法を再現するように定義しただけなのである。

5.3 OPAL Fitter

OPAL Fitter は正規分布の fit object と hard constraint を含む kinematic fitter である。OPAL Fitter では厳密には逐次二次計画法を用いてはいない。4.1.1 で記したように OPAL Fitter では以下のように非線形計画問題を定義している。

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{\eta}, \vec{\xi}} && \chi^2_{OPAL}(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = (\vec{y} - \vec{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\vec{y} - \vec{\eta}) \\ &\text{subject to} && 2\vec{h}(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.17}$$

ここから式 (5.16) を用いて逐次二次計画法で各イテレーション毎に解く連立一次方程式を構成するところであるが、OPAL Fitter では式 (5.16) における等式制約条件の二階微分の項 $\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \left[\vec{\lambda}^{\nu\,\mathrm{T}} \vec{c}(\vec{x}^{\nu}) \right]$ を含めておらず、

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} f(\vec{x}^{\nu}) & -\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\,\mathrm{T}}(\vec{x}^{\nu}) \\ \left[\vec{\nabla}_x \vec{c}^{\,\mathrm{T}}(\vec{x}^{\nu}) \right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}^{\,\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_x f(\vec{x}^{\nu}) \\ -\vec{c}(\vec{x}^{\nu}) \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

を用いているために、厳密な逐次二次計画法ではない。式 (5.18) を構成すると、

$$\begin{pmatrix} V^{-1} & O & -\vec{\nabla}_\eta \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{\eta}^{\nu}, \vec{\xi}^{\nu}) \\ O & O & -\vec{\nabla}_\xi \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{\eta}^{\nu}, \vec{\xi}^{\nu}) \\ \left[\vec{\nabla}_\eta \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{\eta}^{\nu}, \vec{\xi}^{\nu}) \right]^{\mathrm{T}} & \left[\vec{\nabla}_\xi \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{\eta}^{\nu}, \vec{\xi}^{\nu}) \right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta}^{\nu+1} - \vec{\eta}^{\nu} \\ \vec{\xi}^{\nu+1} - \vec{\xi}^{\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} V^{-1} \left(\vec{y} - \vec{\eta}^{\nu} \right) \\ O \\ -\vec{h}(\vec{\eta}^{\nu}, \vec{\xi}^{\nu}) \end{pmatrix} \tag{5.19}$$

となる。これを $(\vec{\eta}^{\nu+1}, \vec{\xi}^{\nu+1}, \vec{\lambda}^{\nu+1})$ について解くことをイテレーション毎に繰り返す。ただし、逆行列の計算には掃き出し法 (Gaussian elimination) を用いている [10]。OPAL Fitter では、メリット関数による直線探索法を採用し、Armijo の条件でステップサイズを調整している [17]。

5.4 Newton Fitter

Newton Fitter は従来の OPAL Fitter を soft constraint が適用可能なように改良された kinematic fitter である。Newton Fitter では、非線形計画問題を

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{\eta}, \vec{\xi}} \quad \chi^2_{Newton}(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = (\vec{y} - \vec{\eta})^{\mathrm{T}} V^{-1} (\vec{y} - \vec{\eta}) + \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{g_l(\vec{\eta}, \vec{\xi})}{\sigma_l}\right)^2 \\ &\text{subject to} \quad 2\vec{h}(\vec{\eta}, \vec{\xi}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.20}$$

で定義している。Newton Fitter は OPAL Fitter に対して正規分布を基にした soft constraint の項が加わったこと、等式制約条件の二階微分の項 $\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \left[\vec{\lambda}^{\nu\,\mathrm{T}} \vec{c}(\vec{x}^{\nu}) \right]$ を考慮した逐次二次計画法の定式化である式 (5.16) を用いていること点で異なる。厳密な逐次二次計画法、すなわちニュートン法の定式化を用いているから Newton Fitter である。ここで、簡単のため、

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\xi} \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

とまとめて表記すると、式 (5.20) は $\vec{\eta}$ と $\vec{\xi}$ の区別なく以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} &\min_{\vec{a}} \quad \chi^2_{Newton}(\vec{a}) \\ &\text{subject to} \quad \vec{h}(\vec{a}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.22}$$

式 (5.16) を構成すると、

$$\begin{pmatrix} \vec{\nabla}_a \vec{\nabla}_a^{\mathrm{T}} \left[\chi^2_{Newton}(\vec{a}^{\nu}) - \vec{\lambda}^{\nu\mathrm{T}} \vec{h}(\vec{a}^{\nu}) \right] & -\vec{\nabla}_a \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{a}^{\nu}) \\ \left[\vec{\nabla}_a \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{a^{\nu}}) \right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}^{\nu+1} - \vec{a}^{\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_a \chi^2_{Newton}(\vec{a}^{\nu}) \\ -\vec{h}(\vec{a}^{\nu}) \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

これを gsl_linalg_LU_decomp[15] で LU 分解し、gsl_linalg_LU_invert[15] で LU 分解から逆行列を求めている。逆行列が存在しない場合は擬似逆行列で代用している。直線探索法であるが、メリット関数は使われておらず、ステップ $\begin{pmatrix} \vec{a}^{\nu+1} - \vec{a}^{\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} - \vec{\lambda}^{\nu} \end{pmatrix}$ の L^{∞}-ノルム[1]が 5 を超えた場合に、ステップに $\frac{5}{\text{ステップの } L^{\infty} - \text{ノルム}}$ をかけて、5 を超えないように補正している。

5.5 New Fitter

New Fitter はステップサイズの限度をステップの最大ノルムではなく、Armijo の条件、Wolf の条件、Goldstein の条件 [9](ただし、Wolf の条件は参考文献内では曲率条件 (curvature condition) と呼ばれている。) から選択してかけられるようになっており、Newton Fitter に修正を加えたものである。メリット関数による直線探索法を採用している。また、厳密な逐次二次計画法である式 (5.16) と OPAL Fitter で用いている逐次二次計画法である式 (5.18) を選択できるようになっており、通常は式 (5.18) を用いることになっている。

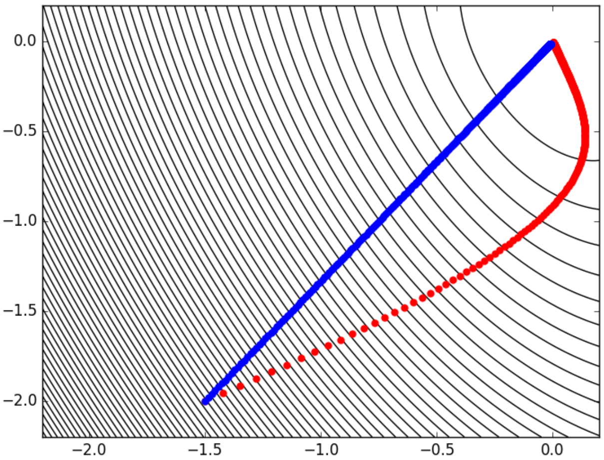


図 5.1: 最急降下法 (赤) とニュートン法 (青) の収束の違い [20]

[1] $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n$ の L^p-ノルム $||\vec{u}||_p (p \geq 1)$ は以下のように定義される。

$$\begin{cases} ||\vec{u}||_p = \left(\sum_{d=1}^{n} |u_d|^p\right)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty) \\ ||\vec{u}||_{\infty} = \max_d |u_d| \end{cases} \tag{5.24}$$

OPAL Fitter で用いている逐次二次計画法と厳密な逐次二次計画法の違いは等式制約条件 $h(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ を満たす曲線に最急降下法で下るか、ニュートン法で下るかの違いである。最急降下法では、勾配情報のみからステップを決めるために、解に遠回りになってしまう場合がある。一方、ニュートン法は勾配情報に加えて、曲率情報も用いるため、収束が速い。図 5.5 は最急降下法 (赤) とニュートン法 (青) の収束の経路を描いている。厳密な逐次二次計画法の場合は等式制約条件 $h(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ を満たす曲線に降下するのが速いのである。

5.6 Likelihood Fitter

第 4 章で Likelihood Fitter の最適化問題を以下のように定義した。

$$\begin{aligned} \min_{\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}} \quad & \chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = -\ln f(\overrightarrow{y};\overrightarrow{\eta}) - \sum_{l=1}^{L} \ln s_l(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) \\ \text{subject to} \quad & \overrightarrow{h}(\overrightarrow{\eta},\overrightarrow{\xi}) = \overrightarrow{0} \end{aligned} \tag{5.25}$$

ここから、Newton Fitter と同様に、$\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\eta} \\ \overrightarrow{\xi} \end{pmatrix}$ を定義すれば、同様に式 (5.16) を構成して、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\nabla}_a \overrightarrow{\nabla}_a^{\mathrm{T}} \left[\chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu}) - \overrightarrow{\lambda}^{\nu\,\mathrm{T}} \overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \right] & -\overrightarrow{\nabla}_a \overrightarrow{h}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \\ \left[\overrightarrow{\nabla}_a \overrightarrow{h}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\nu+1} - \overrightarrow{a}^{\nu} \\ \overrightarrow{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overrightarrow{\nabla}_a \chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \\ -\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \end{pmatrix} \tag{5.26}$$

となる。

我々は MarlinKinfit を変更するのではなく、現在スタンドアローンで動作する Fitter を製作した。理由としては以下が挙げられる。

- MarlinKinfit のクラスの継承関係が複雑であり [17]、汎用化が難しいと判断したため。
- ZH → $\nu\nu$bb では、消失質量に soft constraint をかける必要があるが、MarlinKinfit では消失物理量に soft constraint をかけることができないため[2]。
- 現状の MarlinKinfit は fit parameter の誤差伝播も計算しているが、我々の定式化では誤差伝播まで考慮できていないため。

最終的には MarlinKinfit への実装を実現したいが、現状ではスタンドアローンで解析を行っている。開発環境は C++である。

[2]消失物理量は観測できない粒子 (ニュートリノなど) の物理量

5.6.1 Likelihood Fitter のアルゴリズム

我々が作成した Likelihood Fitter のアルゴリズムは以下の特徴を持っている。

- ヘッセ行列 $\vec{\nabla}_a \vec{\nabla}_a^{\mathrm{T}} \left[\chi^2_{Likelihood}(\vec{a}^{\nu}) - \vec{\lambda}^{\nu\,\mathrm{T}} \vec{h}(\vec{a}^{\nu}) \right]$ の計算を厳密に行うのではなく、damped BFGS 法 [9] による準ニュートン法を用いることで、正定値行列 B^{ν} で近似する。
- Armijo の条件を用いてステップサイズの調節を行う直線探索法を用いている。
- 一般の関数の微分を取らなければいけないことから、数値微分を行っていて、導関数を手動計算する必要がない。
- 大域的最適化のため、hard constraint 上で一定間隔でサンプリングを行い、その最小値の点を初期解としているために局所解に収束しにくくなっている。

これらの特徴より、式 (5.27) を次のように修正する。

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} B^{\nu} & -\vec{\nabla}_a \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{a}^{\nu}) \\ \left[\vec{\nabla}_a \vec{h}^{\mathrm{T}}(\vec{a}^{\nu}) \right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{p}^{\nu} \\ \hat{\vec{\lambda}}^{\nu+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\vec{\nabla}_a \chi^2_{Likelihood}(\vec{a}^{\nu}) \\ -\vec{h}(\vec{a}^{\nu}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

ここで、

$$
\begin{pmatrix} \vec{p}^{\nu} \\ \hat{\vec{\lambda}}^{\nu+1} \end{pmatrix} \tag{5.28}
$$

はステップサイズを評価するために一旦フルステップを保持する必要があり、このように書いた。

以下では、本研究で作成した Likelihood Fitter の準ニュートン法を用いた逐次二次計画法のアルゴリズムを述べる。

アルゴリズム

kinematic fit は事象毎であるから、このアルゴリズムを事象毎に繰り返す。

- 大域的最適化のために、hard constraint を満たす点上で hard constraint を満たすエネルギー (E_1, E_2) の組み合わせを $E_1$1GeV 毎にとってくる (ただし角度は測定値のまま)。そして、$\chi^2_{Likelihood}$ に (E, θ, ϕ) をエネルギー (E_1, E_2) の各点で代入して、一番小さい $\chi^2_{Likelihood}$ のときの (E_1, E_2) を取ってくる。(角度 (θ, ϕ) は測定値のまま) これを、初期値とする。ただし、未定乗数 $\vec{\lambda}$ の初期値は $\vec{0}$ とする。準ニュートン法を用いるから、ヘッセ行列の近似行列の初期値 B^0 は単位行列 I とする。また、$(\mu, \eta, \tau, \rho) = (0, 0.2, 0.8, 0.5)$ とする。

以降は各イテレーションごとに繰り返す。

1. 準ニュートン法を用いた逐次二次計画法に基づき、

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{p}^{\nu} \\ \overrightarrow{\hat{\lambda}}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^{\nu} & -\overrightarrow{\nabla}_a \overrightarrow{h}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \\ \left[\overrightarrow{\nabla}_a \overrightarrow{h}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{a}^{\nu})\right]^{\mathrm{T}} & O \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\overrightarrow{\nabla}_a \chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \\ -\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu}) \end{pmatrix} \tag{5.29}$$

で式 (5.28) を計算する。ただし、gsl_linalg_LU_decomp[15] で LU 分解し、gsl_linalg_LU_invert[15] で LU 分解から逆行列を求めるのは Newton Fitter と同様である。ここで、

$$\overrightarrow{\hat{\lambda}}^{\nu+1} - \overrightarrow{\lambda}^{\nu} = \overrightarrow{s}^{\nu} \tag{5.30}$$

と定義する。

2. μ が以下の不等式

$$\mu \geq \frac{\overrightarrow{\nabla}^{\mathrm{T}} \chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu})\overrightarrow{p}^{\nu} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p}^{\nu\mathrm{T}} B^{\nu} \overrightarrow{p}^{\nu}}{(1-\rho)\,||\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})||_1} \tag{5.31}$$

を満たせば、μ は更新しない。満たさなければ、μ に右辺の値を代入する。ただし、$||\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})||_1$ は $\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})$ の L^1 ノルム

$$||\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})||_1 = \sum_{k=1}^{K} |h_k(a^{\nu})| \tag{5.32}$$

である。ここで、$\alpha = 1$ とおく。

3. メリット関数

$$\phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu};\mu) = \chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu}) + \mu||\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})||_1 \tag{5.33}$$

に対して、不等式

$$\phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu} + \alpha\overrightarrow{p}^{\nu};\mu) \leq \phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu};\mu) + \eta\alpha\overrightarrow{\nabla}^{\mathrm{T}}\phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu};\mu)\overrightarrow{p}^{\nu} \tag{5.34}$$

が満たされれば、4 に進む。満たされなければ、次に進む。
(二次補正　始) $\alpha = 1$ であれば、下に記す二次補正の方法を用いて $\overrightarrow{\hat{p}}^{\nu}$ を計算する。そして不等式

$$\phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu} + \overrightarrow{p}^{\nu} + \overrightarrow{\hat{p}}^{\nu};\mu) \leq \phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu};\mu) + \eta\overrightarrow{\nabla}^{\mathrm{T}}\phi_1(\overrightarrow{a}^{\nu};\mu)\overrightarrow{p}^{\nu} \tag{5.35}$$

を満たせば、$\overrightarrow{p}^{\nu}$ を $\overrightarrow{p}^{\nu} + \overrightarrow{\hat{p}}^{\nu}$ に置き換えて 4 に進む。不等式を満たさなければ、α を $\tau\alpha$ に置き換えて、3 の先頭に戻る。$\alpha \neq 1$ であれば、次に進む。(二次補正　終) α を $\tau\alpha$ に置き換えて 3 の先頭に戻る。

4.

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\nu+1} \\ \overrightarrow{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{a}^{\nu} + \alpha\overrightarrow{p}^{\nu} \\ \overrightarrow{\lambda}^{\nu} + \alpha\overrightarrow{s}^{\nu} \end{pmatrix} \tag{5.36}$$

と解を更新する。

5. 収束判定として

- 勾配ベクトルの L^1 ノルム $||\overrightarrow{\nabla}^{\mathrm{T}}\left[\chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu+1})-\overrightarrow{\lambda}^{\nu+1\,\mathrm{T}}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu+1})\right]||_1 < 10^{-4}$
- 勾配ベクトルの L^1 ノルム $||\overrightarrow{\nabla}^{\mathrm{T}}\left[\chi^2_{Likelihood}(\overrightarrow{a}^{\nu+1})-\overrightarrow{\lambda}^{\nu+1\,\mathrm{T}}\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu+1})\right]||_1 \to \infty$
- hard constraint の L^1 ノルム $||\overrightarrow{h}(\overrightarrow{a}^{\nu})||_1 = 0$
- $\alpha < 10^{-12}$

のいずれかを満たしたらイテレーションを抜ける。ただし、1000 回目イテレーションでは下の収束判定をいずれも満たさなくても抜ける。抜けたら $(\overrightarrow{a}^{\nu+1}, \overrightarrow{\lambda}^{\nu+1})$ を解とする。抜けなければ、以下に記す準ニュートン法の手続きに従って、更新した解と B^{ν} で $B^{\nu+1}$ を計算し、次のイテレーションに進む。

以下にアルゴリズム中に使われている、技術の詳細を記す。

数値微分

実際には、多変数関数の偏導関数を計算しているが、ここでは無関係な変数は定数と考え、一変数関数の導関数を議論する。一変数関数の導関数は

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \tag{5.37}$$

で定義される。ここで、$f(x)$ が微分可能であれば、Δx を限りなく 0 に近付けられれば、$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ は $\frac{df}{dx}(x)$ に収束するが、数値計算上は Δx を限りなく 0 に近付けることはできないため、Δx を微少量で近似する。ここで、$f(x+\Delta x)$ の Taylor 展開

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \mathrm{O}((\Delta x)^2) \tag{5.38}$$

より、数値微分として

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \mathrm{O}(\Delta x) \tag{5.39}$$

と定義すると、これは二点微分と呼ばれ、Taylor 展開を有限で打ち切ることによる打ち切り誤差が $\mathrm{O}(\Delta x)$ で発生する。これをできるだけ小さくするために、$f(x+\Delta x)$ と $f(x-\Delta x)$ の Taylor 展開

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)(\Delta x)^2 + \mathrm{O}((\Delta x)^3) \tag{5.40}$$

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \frac{df}{dx}(x)\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{dx^2}(x)(\Delta x)^2 + \mathrm{O}((\Delta x)^3) \tag{5.41}$$

から、(式 (5.40)-式 (5.41))/2 を計算すると、

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + \mathrm{O}((\Delta x)^2) \tag{5.42}$$

という三点微分を得る。三点微分は打ち切り誤差が $O((\Delta x)^2)$ に改善する。同様に、五点微分は

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{-f(x+2\Delta x) + 8f(x+\Delta x) - 8f(x-\Delta x) + f(x+2\Delta x)}{12\Delta x} + O((\Delta x)^4) \tag{5.43}$$

となり、n 点微分の場合は打ち切り誤差は $O((\Delta x)^{n-1})$ となる。しかし、打ち切り誤差の他に丸め誤差を考慮する必要がある。f が丸め誤差を $O(\delta)$ で含むとすると、数値微分は $O(\frac{\delta}{\Delta x})$ で含む。だから、n 点微分の場合の誤差は、

$$O((\Delta x)^{n-1}) + O(\frac{\delta}{\Delta x}) \tag{5.44}$$

打ち切り誤差と丸め誤差の絶対値の和が最小となるように Δx を選ぶと、n 点微分の場合、Δx は相加相乗平均の大小関係の等号成立条件より、

$$\Delta x = O(\sqrt[n]{\delta}) \tag{5.45}$$

であり、そのときの誤差は

$$O(\delta^{1-\frac{1}{n}}) \tag{5.46}$$

となる。これより、数値微分の点数を無限に増やせば誤差は $O(\delta)$、すなわち f の丸め誤差まで改善するが、点数が有限では、どうしても下位の桁に誤差が発生することがわかる。ここで、double 型の精度は 2 進法で 53 桁であるから、f が $O(1)$ と仮定すると、

$$\delta = O(2^{-53}) \approx O(10^{-15}) \tag{5.47}$$

今回は三点微分を使い、

$$\Delta x = O(\sqrt[3]{\delta}) = O(10^{-5}) \tag{5.48}$$

ととればよい。このときの誤差は、

$$O(10^{-15\times(1-\frac{1}{3})}) = O(10^{-10}) \tag{5.49}$$

となる。今回は Δx を ヘッダファイル float.h で宣言されている FLT_EPSILON にしており、そのオーダーは 10^{-5} であるから、良い精度であると考えられる。

準ニュートン法

OPAL Fitter、Newton fitter、New Fitter では、ヘッセ行列

$$\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{\nabla}_x^{\mathrm{T}} \mathcal{L}_{SQP}(\overrightarrow{x^{\nu}}, \overrightarrow{\lambda^{\nu}}) \tag{5.50}$$

を計算するにあたり、解析微分を用いていた。これらの fitter では、fit object、soft constraint が正規分布と決まっており、constraint も質量または運動量と決まっており、関数が定まっているため、手動で計算した導関数から各点の値をイテレーション毎に計算するということをしていた。即ち、ヘッセ行列は厳密であった。一方、Likelihood Fitter では、厳密なヘッセ行列の代わりに、近似したヘッセ行列を用いている。この厳密なヘッセ行列の代わりに、近似したヘッセ行列を用いる方法を準ニュートン法という。一般の関数のヘッセ行

列は必ずしも正定値にならないため、収束が保証されず、ニュートン法を用いるのは危険である。近似したヘッセ行列を damped BFGS 法を用いて常に正定値に保つことができる。また、一般の関数を導入したことにより、数値微分を行っているが、厳密にヘッセ行列を計算する場合に比べ、計算量を減らすことができる。ただ、収束に関してはニュートン法より準ニュートン法は若干遅い。しかし、ヘッセ行列を damped BFGS 法を用いて常に正定値に保つことで、常に降下方向にステップをとり続け、確実に最適解にたどり着けるようになる。以下、damped BFGS 法の計算法について述べる。
まず、正定値実対称行列 B^ν が与えられているとする。s^ν、y^ν を以下の式で定義する。

$$\vec{s}^\nu = \vec{x}^{\nu+1} - \vec{x}^\nu \tag{5.51}$$

$$\vec{y}^\nu = \vec{\nabla}\mathcal{L}_{SQP}(\vec{x}^{\nu+1}, \vec{\lambda}^{\nu+1}) - \vec{\nabla}\mathcal{L}_{SQP}(\vec{x}^\nu, \vec{\lambda}^{\nu+1}) \tag{5.52}$$

ここで、$\vec{r}^\nu$ を以下のように定義する。

$$\vec{r}^\nu = \theta^\nu \vec{y}^\nu + (1-\theta^\nu)B^\nu \vec{s}^\nu \tag{5.53}$$

ただし、θ^ν は

$$\theta^\nu = \begin{cases} 1 & (\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}\vec{y}^\nu \geq 0.2\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu\vec{s}^\nu) \\ \frac{0.8\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu\vec{s}^\nu}{\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu\vec{s}^\nu - \vec{s}^{\nu\mathrm{T}}\vec{y}^\nu} & (\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}\vec{y}^\nu < 0.2\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu\vec{s}^\nu) \end{cases} \tag{5.54}$$

で定義される。
B^ν の更新は

$$B^{\nu+1} = B^\nu - \frac{B^\nu\vec{s}^\nu\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu}{\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}B^\nu\vec{s}^\nu} + \frac{r^\nu r^{\nu\mathrm{T}}}{\vec{s}^{\nu\mathrm{T}}\vec{r}^\nu} \tag{5.55}$$

である。この更新は B^ν が正定値であれば、$B^{\nu+1}$ も正定値であることを保証する。すなわち、B^0 をある正定値行列にとれば、正定値行列でヘッセ行列が近似できる。通常、B^0 は単位行列にとる。このようにして、ヘッセ行列を常に正定値に取ることで、$\mathcal{L}_{SQP}(\vec{x^\nu}, \vec{\lambda^\nu})$ を常に降下方向に押し進める。

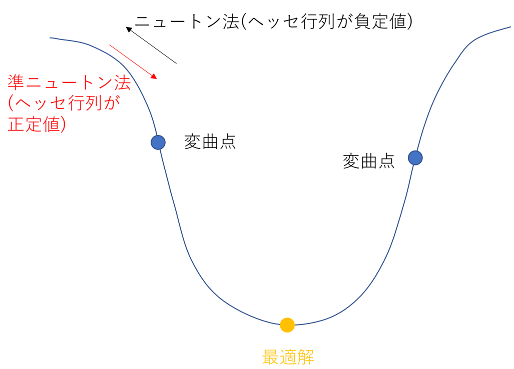


図 5.2: ニュートン法と準ニュートン法の収束の違い

1 次元の場合にニュートン法と準ニュートン法の収束の違いを表した図が図 5.6.1 である。準ニュートン法ではヘッセ行列を常に正定値に取れ、これは 1 次元では 2 階微分が正であることに対応する。すると、上に凸の領域ではニュートン法は最適解から離れていってしまうが、準ニュートン法では凸性に関係なく、降下させることができるのである。

直線探索法

今、非線形計画問題

$$\begin{aligned} \min_{\vec{x}} \quad & f(\vec{x}) \\ \text{subject to} \quad & \vec{c}(\vec{x}) = \vec{0} \end{aligned} \tag{5.56}$$

を考える。この等式制約条件つき最適化問題における直線探索法では、降下方向にステップ $\begin{pmatrix} \vec{p}^{\nu} \\ \vec{s}^{\nu} \end{pmatrix}$ を決め、次にそのステップの方向にどれくらい動かすかというステップサイズ α^{ν} を探索して、次の解 $\begin{pmatrix} \vec{x}^{\nu+1} \\ \vec{\lambda}^{\nu+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{x}^{\nu} \\ \vec{\lambda}^{\nu} \end{pmatrix} + \alpha^{\nu} \begin{pmatrix} \vec{p}^{\nu} \\ \vec{s}^{\nu} \end{pmatrix}$ に更新する。最初にメリット関数

$$\phi_1(\vec{x}^{\nu};\mu) = f(\vec{x}) + \mu||\vec{c}(\vec{a}^{\nu})||_1 \tag{5.57}$$

を定義し、降下方向にステップ $\vec{p}^{\nu}$ を決め、次にそのステップの方向にどれくらい動かすかというステップサイズ α を探索することで最適化を進める。MarlinKinfit では直線探索法を採用している。今回も直線探索法でアルゴリズムを組んでいる。このステップサイズ α はメリット関数

$$\phi_1(\vec{a}^{\nu};\mu) = f(\vec{x}) + \mu||\vec{c}(\vec{a}^{\nu})||_1 \tag{5.58}$$

に対して、

$$\phi_1(\vec{a}^{\nu} + \alpha\vec{p}^{\nu};\mu) \tag{5.59}$$

が最小になるような α を決まればよいが、これよりもっと緩い条件で良い。すなわち、メリット関数の降下量

$$\phi_1(\vec{a}^{\nu};\mu) - \phi_1(\vec{a}^{\nu} + \alpha\vec{p}^{\nu};\mu) \tag{5.60}$$

が α と方向微分 $\vec{\nabla}^{\mathrm{T}}\phi_1(\vec{a}^{\nu};\mu)\vec{p}^{\nu}$ に比例すると考えて、

$$\phi_1(\vec{a}^{\nu} + \alpha\vec{p}^{\nu};\mu) < \phi_1(\vec{a}^{\nu};\mu) + \eta\alpha\vec{\nabla}^{\mathrm{T}}\phi_1(\vec{a}^{\nu};\mu)\vec{p}^{\nu} \tag{5.61}$$

これを Armijo の条件といい、ステップの上限を与える。以下の図からメリット関数を α の一次関数 $\ell(\alpha)$ を基準にして切り分けていることが分かる。

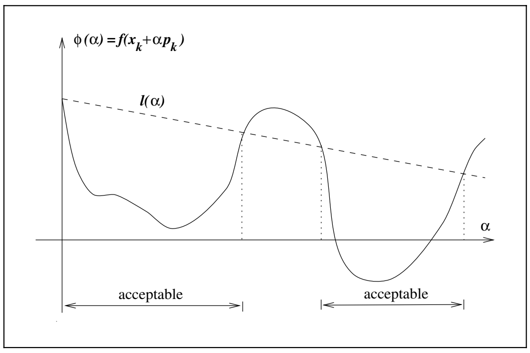


図 5.3: Armijo の条件 [9]

マラトス効果

逐次二次計画法では、メリット関数の評価で解に近づく良いステップが拒否され、収束が遅れてしまうことがある。これをマラトス効果という。例として、以下の問題を考える。

$$\begin{aligned} \min_{x_1,x_2} \quad & f(x_1,x_2) = 2(x_1^2 + x_2^2 - 1) - x_1 \\ \text{subject to} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned} \tag{5.62}$$

図 5.6.1 はこの例題で実際に Maratos 効果が起きる場合の概念図である。

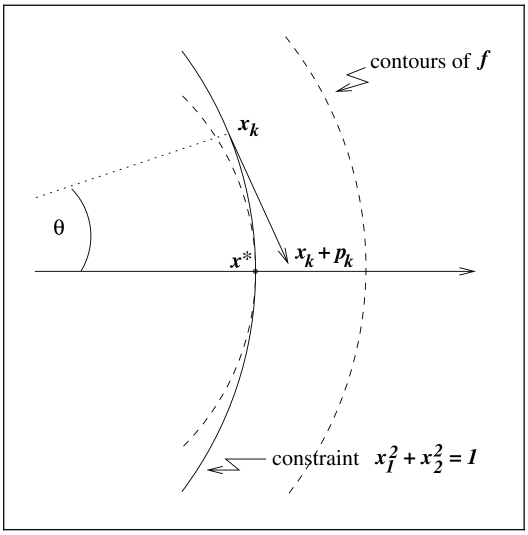


図 5.4: マラトス効果 [9]

この問題の最適解は (x_1^*, x_2^*)=(1,0) であるが、図 5.6.1 のようなステップが選ばれた場合、これは解に近づくにもかかわらず、f の等高線を登ってしまい、かつ等式制約条件も満たさなくなるため、メリット関数を増加させて、棄却されてしまう。こうした解に近づくステップの棄却が行われて収束が遅れてしまうことがあるのである。

次に述べる二次補正によって、この問題を緩和する。

二次補正

Maratos 効果による問題を緩和する方法の一つとして、二次補正がある。これは、ステップによって等式制約条件が満たされない点に移らないように、等式制約条件を 2 次まで近似してやるという方法である。具体的な定式化として、通常、逐次二次計画法では式 (5.8) のように

$$\left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right]^{\mathrm{T}} \overrightarrow{p}^{\nu} + \overrightarrow{c}(\overrightarrow{x}^{\nu}) = \overrightarrow{0} \tag{5.63}$$

と一次近似しているが、ここから求まる、$\overrightarrow{p}^{\nu}$ を基に、もう一度

$$\left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right]^{\mathrm{T}} \overrightarrow{\hat{p}}^{\nu} + \overrightarrow{c}(\overrightarrow{x}^{\nu} + \overrightarrow{p}^{\nu}) = \overrightarrow{0} \tag{5.64}$$

一次近似で $\overrightarrow{p}^{\nu}$ を求めてやることを考えれば、

$$\overrightarrow{p}^{\nu} = -\left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right] \left(\left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right]^{\mathrm{T}} \left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right]\right)^{-1} \overrightarrow{c}(\overrightarrow{x}^{\nu} + \overrightarrow{p}^{\nu}) \tag{5.65}$$

に左から $\left[\overrightarrow{\nabla}_x \overrightarrow{c}^{\mathrm{T}}(\overrightarrow{x^{\nu}})\right]^{\mathrm{T}}$ をかけると式 (5.65) になることから式 (5.65) から $\overrightarrow{p}^{\nu}$ が計算される。メリット関数が減少せず、かつ $\alpha = 1$ の場合に二次補正を行う。

第6章　解析対象

kinematic fit の性能を評価するにあたり、解析する反応過程が必要である。本章では本研究における信号事象と主要背景事象およびその特徴を述べ、kinematic fit を用いる下準備として物理量による事象選択を行っておく。kinematic fit は物理量による事象選択を行ったうえでさらに純度を高めるという目標や、物理量による事象選択を行わなくともこれと同水準あるいはそれ以上の純度を実現するという目標があるものの、本研究においては現在はまだ kinematic fit がどのような場合に有効かを評価するには至っていない。最後にこの信号事象における kinematic fit の具体的定式化について述べる。

6.1　信号事象と主要背景事象

信号事象

$e^+e^- \to ZH \to \nu\bar{\nu}b\bar{b}$ 事象

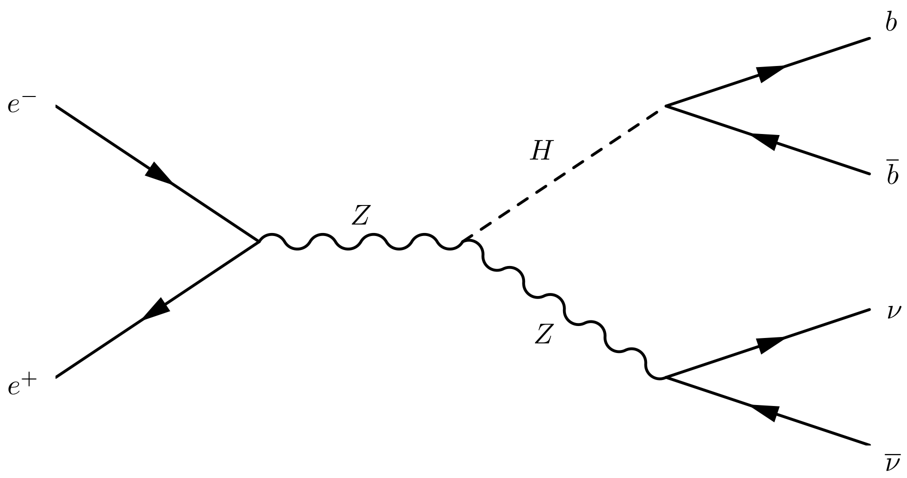


図 6.1: 信号事象

この事象を信号事象とする理由は以下の通りである。

1. 250GeV でのヒッグス粒子主要生成、崩壊過程であること
2. エネルギー分解能が非対称となる b ジェットを含んでいること
3. b クォーク以外はニュートリノで測定されず、b クォークの信号がきれいに見えること

4. soft constraint を Z ボソンの質量をかけられること

1 について、電子と陽電子が始状態の場合のヒッグス主要生成過程は図 6.2 の 3 過程が考えられる。図 6.2 の上段の過程は ZH 過程、中段の過程は WW 融合過程、下段の過程は ZZ 融合過程という。標準理論におけるヒッグス質量 $m_H = 125$[GeV]、偏極率 $(P_-, P_+) = (-0.8, +0.3)$ におけるそれぞれの過程の反応断面積を図 6.3 に示す。ZH 過程は赤、WW 融合過程は青、ZZ 融合過程は緑である。ZH 過程は重心系エネルギー 250GeV におけるヒッグス主要生成過程である。また、標準理論におけるヒッグス粒子の崩壊分岐比を表 6.1 に示す。これより $H \to b\bar{b}$ はヒッグス主要崩壊過程である。

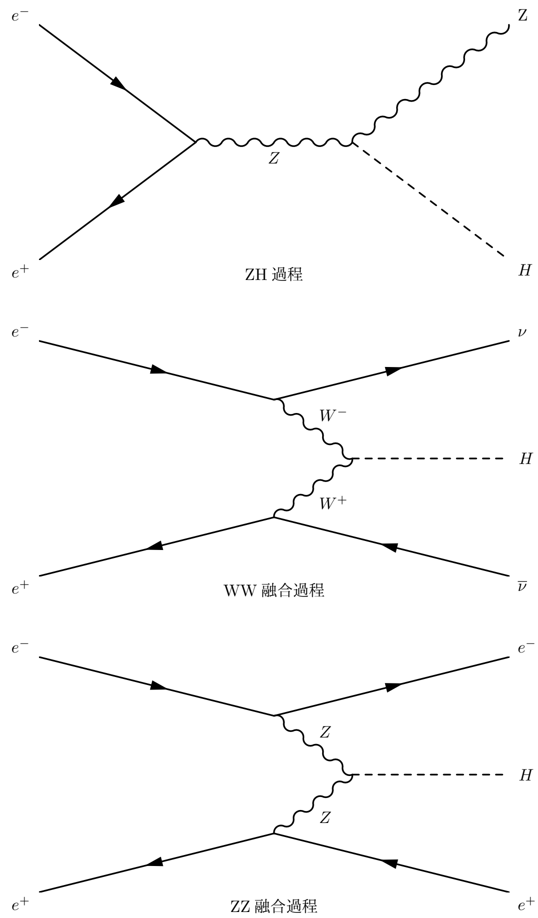


図 6.2: ZH・WW 融合・ZZ 融合のファインマン図

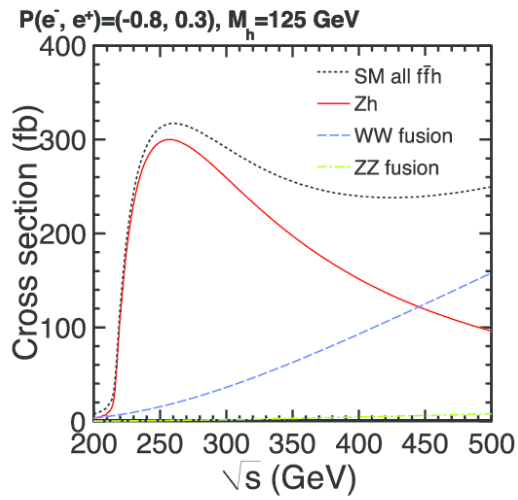


図 6.3: ZH・WW 融合・ZZ 融合の断面積比較 [21]

また 2 について、b クォークは第 7 章で述べるようにハドロン化した後、メソンから崩壊する際にニュートリノを放出する場合があり、これは消失物理量となるため、例えば b ジェットのエネルギー測定値はエネルギーの低い方に裾を引いた非対称分布となる。こうしたエネルギー分解能は正規分布では表せず、現在の MarlinKinfit では扱えないのである。

表 6.1: ヒッグス崩壊分岐比 (SM)($M_H = 125$[GeV])[13]

崩壊過程	崩壊分岐比
$H \to b\bar{b}$	0.578
$H \to WW^*$	0.216
$H \to \tau^+\tau^-$	0.064
$H \to gg$	0.086
$H \to c\bar{c}$	0.029
$H \to ZZ^*$	0.027
$H \to \gamma\gamma$	0.002

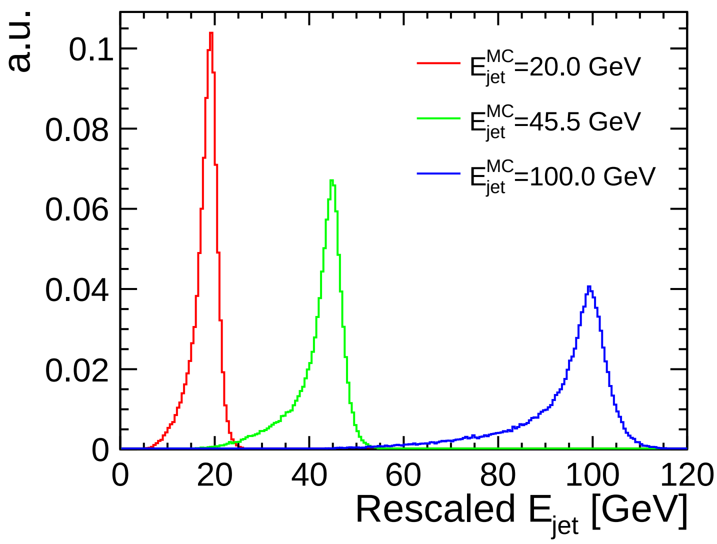


図 6.4: b ジェットエネルギー分解能

図 6.1 は b ジェットのエネルギーの真値が 20.0GeV(赤)、45.5GeV(緑)、100.0GeV(青) におけるジェットのエネルギーの測定値の分布である。ただし、IDR(ILD Design Report)[1] を測定器モデルに想定したサンプルの $e^+e^- \to Z \to b\bar{b}$ サンプル (以下 b ジェットサンプル) を用いて図 6.1 を作った。7.2 で述べる Durham アルゴリズムを用いてジェット 2 本にまとめ上げた後のジェット 1 本のエネルギーの測定値を横軸に、事象数を縦軸にとっている。(e^+e^- の重心系衝突エネルギー (40.0GeV(赤)、91.0GeV(緑)、200.0GeV(青)) 毎にジェットエネルギーの真値をビームエネルギーの半分 (20.0GeV(赤)、45.5GeV(緑)、100.0GeV(青)) に規格化したときの測定値の分布である (測定値も真値の規格化で等倍されている)。) ジェットエネルギーの真値については第 7 章で述べる。3 については kinematic fit で非正規分布を扱えるようにするという目的に焦点を絞るために単純化するものである。ただしニュートリノは観測されないため、4 元運動量の保存を物理的制約条件としてかけられないとい

[1] 現時点での最新の ILD モデルとソフトウェアの設計書

う難しさもある。4 は hard constraint と soft constraint の両方の確認ができるという意味合いである。信号事象の特徴として

- s 過程 (e^+e^- の衝突でできる重心系で静止している Z ボソンからヒッグス粒子と Z ボソンは逆方向に等方的に崩壊する。)
- 2 jet の質量=ヒッグス粒子の質量
- missing 質量=Z ボソンの質量
- 孤立した荷電レプトンを終状態に含まない

が挙げられる。

主要背景事象

- $\nu\nu qq$(4f_(sznu,zz)_sl) 事象
- $l\nu q_u q_d$(4f_ww_sl) 事象
- ff(2f_z_(l,h)) 事象
- $e\gamma \to \nu qq$((ae,ea)_vxy) 事象

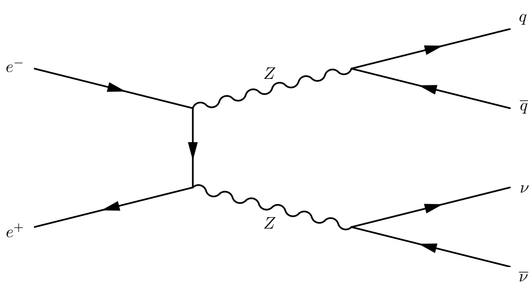


図 6.5: $\nu\nu qq$ 事象

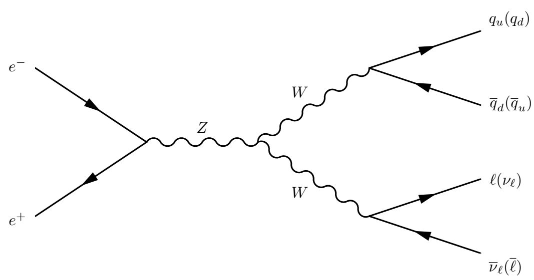


図 6.6: $\ell\nu q_u q_d$ 事象

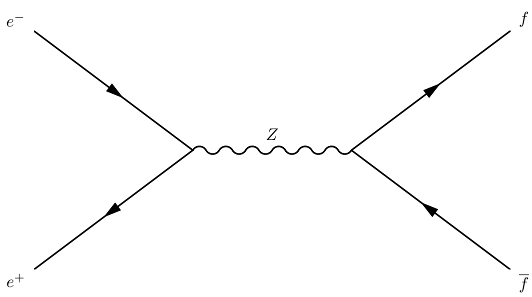


図 6.7: ff 事象

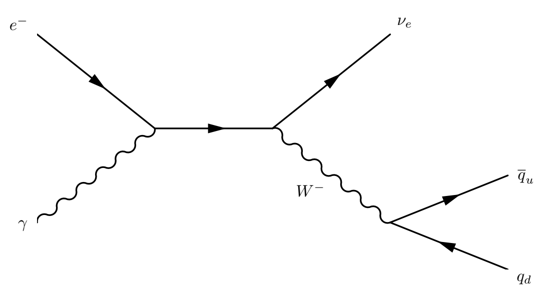


図 6.8: $e\gamma \to \nu qq$ 事象

ここで、上のファインマン図で示す過程は 1 つの背景事象に含まれるたくさんの過程の 1 つであることに注意してほしい。1 つの背景事象というのは、主に終状態の粒子で区別されるものである [22]。

6.2 事象選択

シミュレーション条件

重心系エネルギー $\sqrt{s} = 250$ [GeV]

スピン偏極度 $(P_-, P_+) = (-0.8, +0.3)$

ヒッグス崩壊分岐比 (SM) $(BR(H \to b\bar{b}) = 57.8\%)$

積分ルミノシティ $\int \mathcal{L}dt = 900[\mathrm{fb}^{-1}]$

測定器モデル DBD (2012)[5][2]

事象再構成の手順

粒子再構成 PFA[19]

ジェット再構成 Durham アルゴリズム
(すべての事象に対して、粒子を 2 本のジェットにまとめあげる。7.2 参照)

ジェットフレーバー同定 Btag[14]

以上の環境で解析を行った。

選択条件

1. $80 < M_{miss} < 140$ [GeV]
   $M_{miss} = \sqrt{(E_{cm} - E_1 - E_2)^2 - (\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2})^2}$
2. $20 < P_{Tvis} < 70$ [GeV]
   $P_{Tvis} = \sqrt{(p_{1_x} + p_{2_x})^2 + (p_{1_y} + p_{2_y})^2}$
3. $P_{Lvis} < 60$[GeV]
   $P_{Lvis} = |P_{z1} + P_{z2}|$
4. $N_{charged} > 10$
   $N_{charged}$:2 本のジェット中の全荷電粒子数
5. $P_{max} < 30$[GeV]
   P_{max}:PFO 中の運動量の大きさの最大値

[2]検出器詳細基礎設計書 (Detailed Baseline Design)(2012 年) に基づく測定器シミュレーションを行ったサンプルを用いている。

6. $Y_{23} < 0.02$
   Y_{23}:ジェットの本数を 3 本から 2 本に束ねるときの Y 値 (7.2 Durham アルゴリズム参照)

7. $0.2 < Y_{12} < 0.8$
   Y_{12}:ジェットの本数を 2 本から 1 本に束ねるときの Y 値 (7.2 Durham アルゴリズム参照)
   実際には 2 本までしか束ねていないが、仮想的に 1 本まで束ねた場合の値である。

8. $105 < M_{jj} < 135$[GeV]
   $M_{jj} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2})^2}$

9. $bprob_{1,2} > 0.5$ bprob1,2: b ジェット選定 [14]

10. $coplanarity < 3.08$
    $coplanarity$:xy 平面上に射影したジェット 1、ジェット 2 の運動量のなす角
    $(0 \leq coplanarity \leq \pi)$

11. $\cos j12 < -0.46$
    $\cos j12$:衝突重心系から見たときのジェット 1 とジェット 2 のなす角

まず、1 は消失質量に Z ボソンの質量を要求することで、崩壊元に Z ボソンを含まない過程を排除する。2 は消失粒子 (Z ボソンから崩壊するニュートリノ) がない事象を排除するために横運動量 P_{Tvis} に下限を設ける。ただし、信号事象は Z ボソンの 2 体崩壊であり、消失運動量に上限もあるから、横運動量 P_{Tvis} に下限を設ける。3 は t 過程は縦運動量 P_{Lvis} が大きくなる傾向があるため、t 過程を排除するために、縦運動量 P_{Lvis} に上限を設ける。4 は終状態がレプトンのみの事象を排除するため、荷電粒子数 $N_{charged}$ に下限を設ける。5 は孤立荷電レプトンは運動量が大きくなる傾向があり、終状態に孤立荷電レプトンを含む事象を排除する他、2f 過程のように終状態の粒子の運動量が大きい事象を排除する。Y 値の定義は 7.2 に譲るが、Y 値はジェットを何本まで束ねるのが適切かの指標になる。ジェットを n 本まで束ねるのが適切である場合、$Y_{n,n+1}$ まで Y 値は小さく、$Y_{n-1,n}$ から大きくなる傾向がある。ここで、図 6.9 に Y 値の大小とジェットの本数の関係を示した。6 は信号事象はジェット 2 本、ニュートリノ 2 本なので、Y_{23} は小さくなる。7 はニュートリノのためにブーストされているから Y_{12} は大きくはないが 1 ジェットではないので小さくもない。8 は 2 ジェット質量にヒッグス粒子の質量を要求する。9 は Btag[**?**] で b クォークらしさを課す。10 は ff 事象のように 2 個のフェルミ粒子が逆方向に放出される事象を排除し、11 はヒッグスより軽くブーストされやすい Z から qq に崩壊し、2 本のジェットのなす角が小さくなる事象 $(\nu\nu qq)$ を排除する。なお、1-9 の選択条件は先行研究 [23] で行われていたもので、本研究で追加した選択条件は 10 と 11 である。

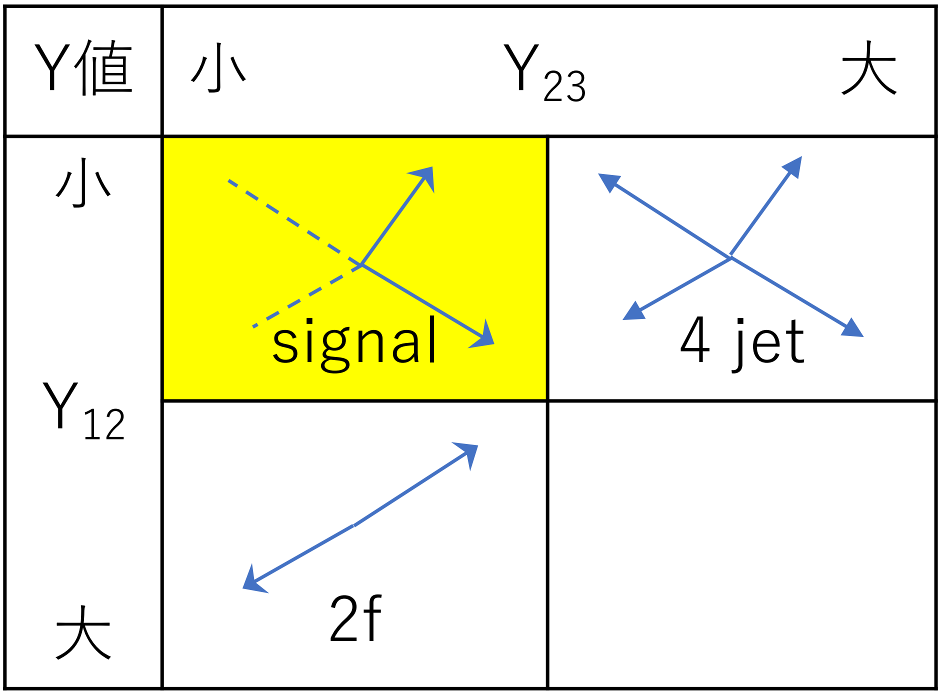


図 6.9: Y 値によるジェットの本数の評価

事象選択結果を表 6.2 に載せる。ここで終状態が信号事象と同じ $\nu\nu qq$ 事象が多く残る。今後の章で kinematic fit の確認を行う際、背景事象は全て $\nu\nu qq$ 事象を用いた。また、先行研究では $e\gamma$ や $\gamma\gamma$ を始状態とする事象は含まれていなかったが、今回含んで解析したことで、先行研究の事象選択 (1-9) でほとんど残らないことを確認した。

表 6.2: 事象選択

条件番号	選択条件	$\nu\nu H$ $(H \to bb)$	$\nu\nu H$ $(H \not\to bb)$	$\nu\nu qq$	$l\nu q_u q_d$	ff	$2f$,$4f$ other	$e\gamma \to \nu qq$	$e\gamma$,$\gamma\gamma$ other
	事象生成数[3]	40333	29447	1.02e+6	9.89e+6	8.19e+7	4.87e+7	1.11e+6	1.82e+8
1	$80 < M_{miss} < 140$ [GeV]	35087	18773	500845	1.15e+6	7.73e+6	2.03e+6	431090	1.82e+8
2	$20 < P_{Tvis} < 70$ [GeV]	31620	16668	318747	804038	658021	1.27e+6	310855	125534
3	$P_{Lvis} < 60$[GeV]	31181	16238	173041	563153	460775	987929	192999	27683
4	$N_{charged} > 10$	31181	15447	173007	563138	99090	189194	192978	5895
5	$P_{max} < 30$[GeV]	29077	13635	152515	368915	45531	44629	173796	1574
6	$Y_{23} < 0.02$	21837	4640	111609	91723	32126	15869	133085	692
7	$0.2 < Y_{12} < 0.8$	20164	4397	88250	76468	25126	12799	98468	552
8	$105 < M_{jj} < 135$[GeV]	17925	3795	11657	27196	11720	6116	2963	240
9	$bprob_{1,2} > 0.5$	11327	44	1373	21	1976	82	5	7
10	$coplanarity < 3.08$[rad]	10902	42	1326	21	315	78	5	0
11	$\cos j12 < -0.46$	10816	40	1072	21	315	74	5	0

[3] 反応断面積と積分ルミノシティーから求まる

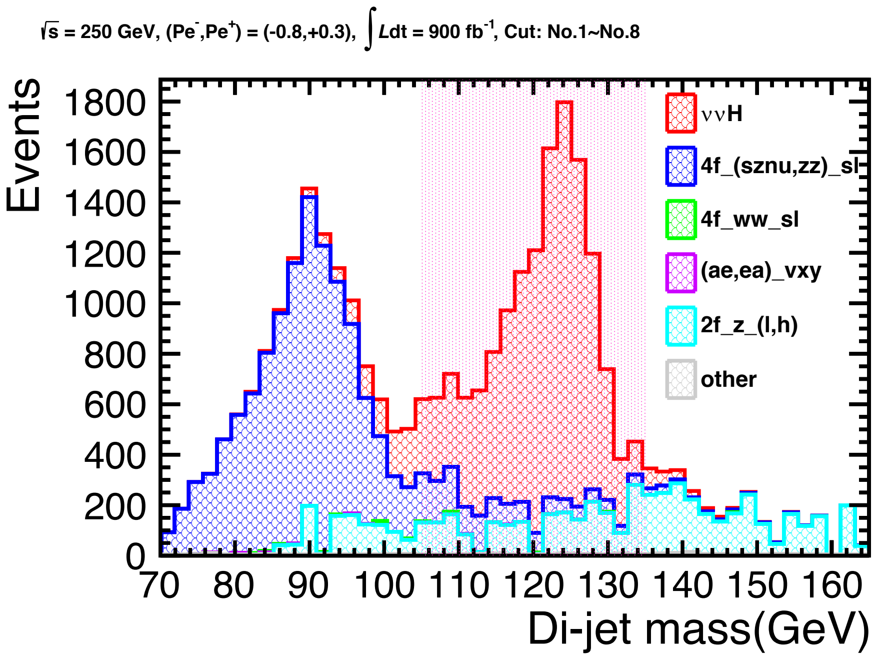


図 6.10: 先行研究における事象選択 (1-9) 後の全事象の再構成 2 ジェット質量 (w/o kinematic fit)

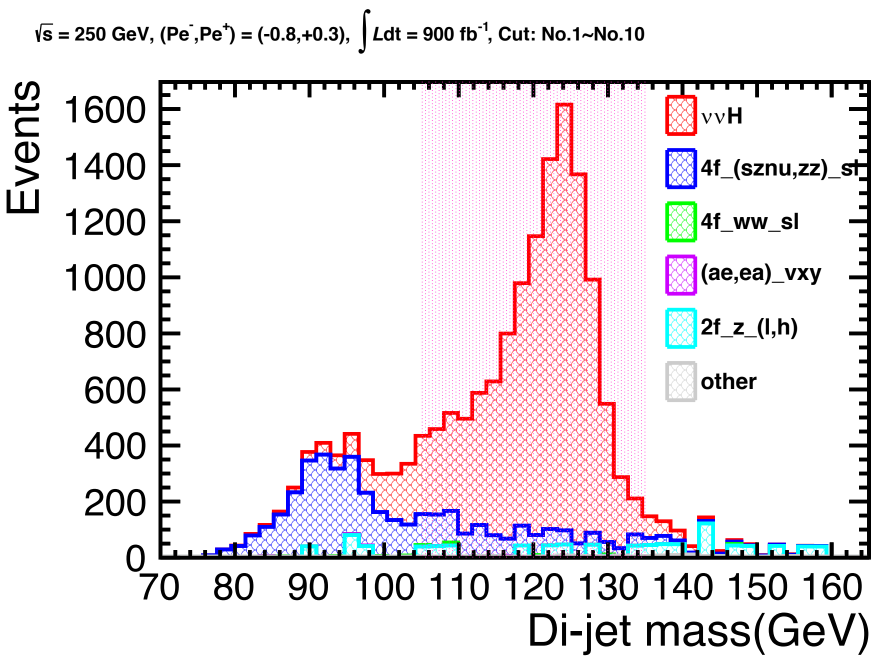


図 6.11: 本研究における事象選択 (1-11) 後の全事象の再構成 2 ジェット質量 (w/o kinematic fit)

図 6.10 は先行研究における事象選択 (1-9) 後の全事象の再構成 2 ジェット質量 (w/o kinematic fit)、図 6.11 は本研究における事象選択 (1-11) 後の全事象の再構成 2 ジェット質量 (w/o kinematic fit) を表している。$\nu\nu qq$(4f_(sznu,zz)_sl) 事象および ff(2f_z_(l,h)) 事象が排除されていることが分かる。2 ジェット質量は大きく質量が低い方に裾を引いている。

6.3 解析対象における kinematic fit

信号事象を定めたので、$\chi^2_{Likelihood}$ の具体的定式化ができる。しかし、fit object のエネルギーについては、非対称のエネルギー分解能を評価することからやや複雑な手続きを踏む必要がある。したがって、fit object のエネルギー分解能評価は第 7 章に譲り、ここでは fit object のうち角度および soft constraint と hard constraint の表式を記す。

まず、信号事象の終状態は 2 本のジェットと 2 本のニュートリノである。ここで、ジェットは 1 本につき (E, θ, ϕ) を fit object に入れるのは 4.1 で述べた。ニュートリノは観測できないのでニュートリノの物理量は fit object には含めない。fit object の角度 (θ, ϕ) は正規分布として、fit object に含む。

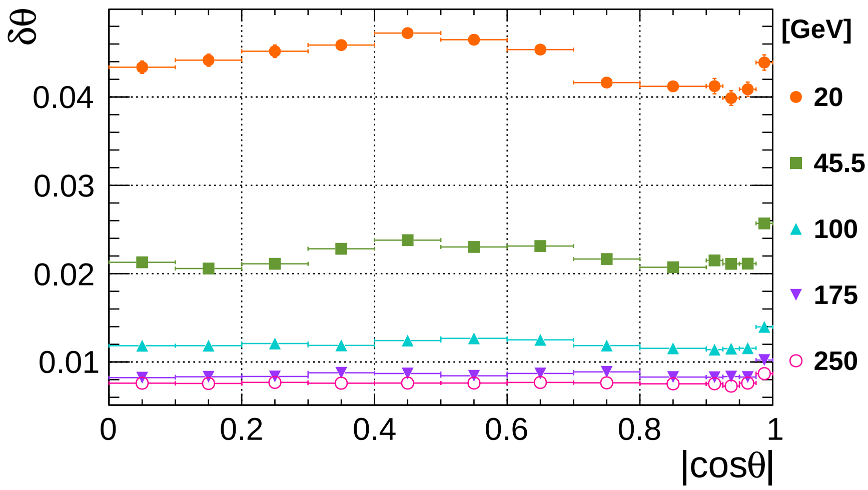


図 6.12: b ジェットのエネルギー毎の θ を正規分布でフィットしたときの標準偏差 σ_θ

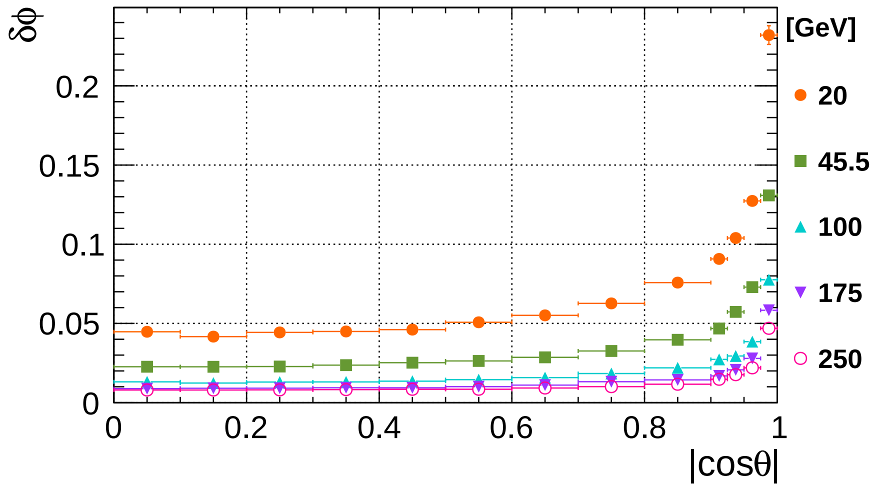


図 6.13: b ジェットのエネルギー毎の ϕ を正規分布でフィットしたときの標準偏差 σ_ϕ

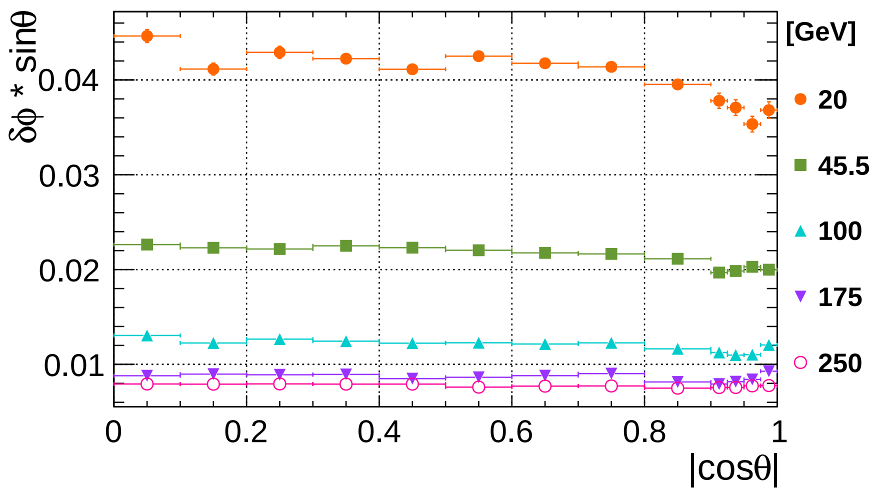


図 6.14: b ジェットのエネルギー毎の ϕ を正規分布でフィットしたときの標準偏差 $\sigma_\phi \times \sin\theta$

上図は θ の分解能、ϕ の分解能および ϕ の分解能 $\times \sin\theta$ を $|\cos\theta|$ を横軸にプロットしたものである。ただし、IDR サンプルの b ジェットサンプル ($e^+e^- \to b\bar{b}$) を用いている。ヒストグラム の右に表示されているエネルギーはサンプルの重心系衝突エネルギーの半分の値である。ただし、ジェット 1 とジェット 2 は区別なくジェットとみなしてヒストグラムを作った。ヒストグラムを正規分布でフィットしたのは下図となる。ただし、横軸は (b ジェットサンプルのジェットの放出角度の測定値)-(b ジェットサンプルのパートンの放出角度) に θ の場合は何もかけず、ϕ の場合はこれに $\sin\theta^{true}$(ただし、θ^{true} は b ジェットサ

ンプルのパートンの放出角度、ϕ^{true} も同様) をかけたものを用いている。これは、ジェット角度分解能 σ_θ は θ に依存せず、E にのみ依存させてよいと上図から読み取れ、また、ジェット角度分解能 σ_ϕ に関しては立体角を考慮して、$\sin\theta\sigma_\phi$ が E にのみ依存させて良いと読み取れるからである。m

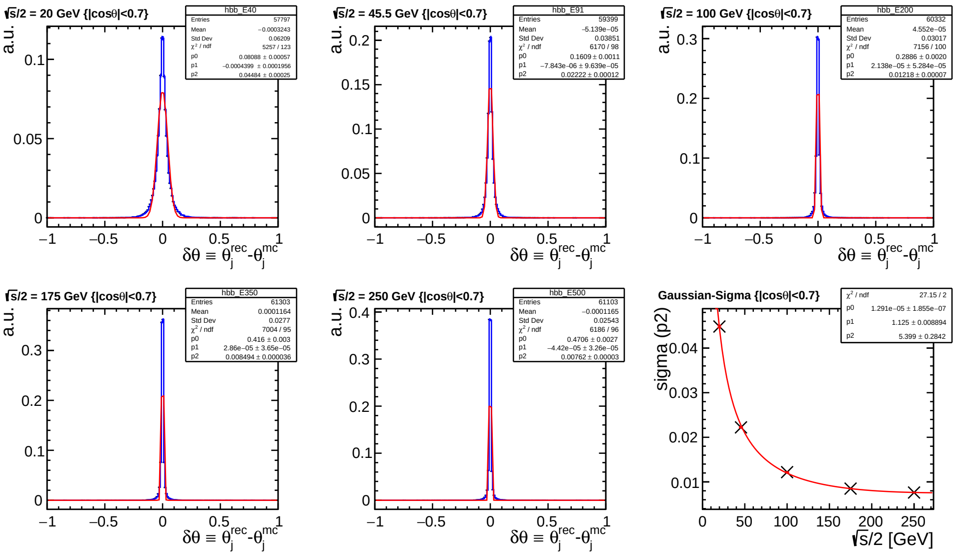


図 6.15: b ジェットのジェットエネルギー毎の正規分布による $\theta^{meas} - \theta^{true}$ のフィット結果

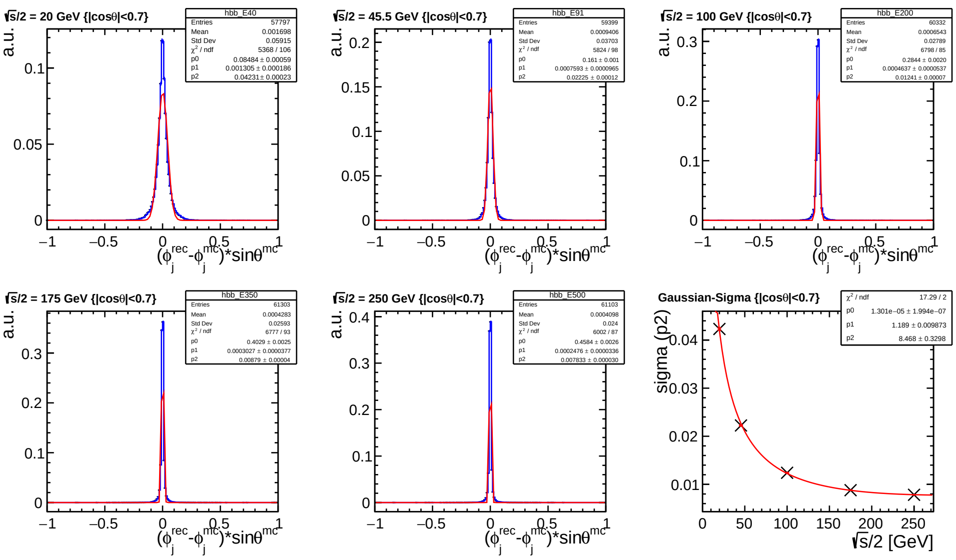


図 6.16: b ジェットのジェットエネルギー毎の正規分布による $\sin\theta^{true}\left(\phi^{meas} - \phi^{true}\right)$ のフィット結果

図 6.15 および図 6.16 は左上から b ジェットサンプルのビームエネルギーの半分が 20GeV、 45.5GeV、100GeV、175GeV、250GeV における θ および ϕ のそれぞれの正規分布におけるフィット結果である。ただし、統計量を確保するために θ に関して $|\cos\theta| < 0.7$ を満たすものについてまとめてヒストグラム にしている。$|\cos\theta|$ が大きいものはビーム軸方向に飛び、分解能が相対的に悪いため除外する。正規分布でフィットした標準偏差を横軸をビームエネルギーの半分としてプロットしたものが右下である。これを関数

$$f(x; A, B, C) = Ax + \frac{B}{x + C} \tag{6.1}$$

でフィットしたものである。このように内挿して間の点を求める。

以下では $\chi^2_{Likelihood}$ の具体的表式について述べる。ただし、x^{meas} は物理量 x の測定値、x^{true} は物理量 x の真値である。また、添字 1 と 2 はジェット 1 とジェット 2 を表し、$E_1^{meas} \geq E_2^{meas}$ となるように 1 と 2 が決まる。まずは fit object 部分についてである。角度については前述したように $\sigma_\theta(E)$、$\sin\theta\sigma_\phi(E)$ より、$\sigma_\theta(E)$、$\sigma_\phi(E,\theta)$ を計算する。

$$\begin{aligned}
\chi^2_{fit\ object} =& -2\ln f(E_1^{meas}, E_2^{meas}, \theta_1^{meas}, \theta_2^{meas}, \phi_1^{meas}, \phi_1^{meas}; E_1^{true}, E_2^{true}, \theta_1^{true}, \theta_2^{true}, \phi_1^{true}, \phi_1^{true}) \\
& -2\ln f_E(E_1^{meas}, E_2^{meas}; E_1^{true}, E_2^{true}) \\
& -2\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\theta_1}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_1^{meas}-\theta_1^{true}}{\sigma_{\theta_1}}\right)^2} -2\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\theta_2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta_2^{meas}-\theta_2^{true}}{\sigma_{\theta_2}}\right)^2} \\
& -2\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\phi_1}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_1^{meas}-\phi_1^{true}}{\sigma_{\phi_1}}\right)^2} -2\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{\phi_2}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\phi_2^{meas}-\phi_2^{true}}{\sigma_{\phi_2}}\right)^2} \\
=& -2\ln f_E(E_1^{meas}, E_2^{meas}; E_1^{true}, E_2^{true}) \\
& + \left(\frac{\theta_1^{meas}-\theta_1^{true}}{\sigma_{\theta_1}}\right)^2 + \left(\frac{\theta_2^{meas}-\theta_2^{true}}{\sigma_{\theta_2}}\right)^2 + \ln 2\pi\sigma^2_{\theta_1} + \ln 2\pi\sigma^2_{\theta_2} \\
& + \left(\frac{\phi_1^{meas}-\phi_1^{true}}{\sigma_{\phi_1}}\right)^2 + \left(\frac{\phi_2^{meas}-\phi_2^{true}}{\sigma_{\phi_2}}\right)^2 + \ln 2\pi\sigma^2_{\phi_1} + \ln 2\pi\sigma^2_{\phi_2}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

ただし、角度分解能の $\sigma(E,\theta)$ は本来真値の関数としてとるべきだが、今回は測定値の関数となっている。また、$\sigma(E,\theta)$ 変数 E については、b ジェットサンプルの重心系エネルギーの半分としている。soft constraint に関して Z ボソンの質量は Breit-Wigner 分布に従うから、

$$\begin{aligned}
\chi^2_{soft\ constraint} =& -2\sum_{l=1}^{L} s_l(E_1^{true}, E_2^{true}, \theta_1^{true}, \theta_2^{true}, \phi_1^{true}, \phi_1^{true}) \\
=& -2\ln \frac{1}{1 + \left(\frac{M_{mis}-M_Z}{\frac{\Gamma_Z}{2}}\right)^2}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

ただし、$M_Z = 91.1876$[GeV]、$\Gamma_Z = 2.5$[GeV] である。これは、図 6.17 に信号事象の Z ボソンから崩壊したニュートリノの MC 情報を用いて Z ボソンの質量をヒストグラムで表せ

ば、Breit-Wigner 分布 (青線) でフィットすると概ね当てはまることからも明らかである。ただし、重心系 4 元運動量を

$$\begin{pmatrix} E_{CM} \\ p_{xCM} \\ p_{yCM} \\ p_{zCM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250[\mathrm{GeV}] \\ 1.75[\mathrm{GeV}] \\ 0[\mathrm{GeV}] \\ 0[\mathrm{GeV}] \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

として[4]、

$$\begin{aligned} M_{mis}^2 = & (E_{CM} - E_1^{true} - E_2^{true})^2 \\ & - (p_{xCM} - |\overrightarrow{p}_1| \sin\theta_1^{true} \cos\phi_1^{true} - |\overrightarrow{p}_2| \sin\theta_2^{true} \cos\phi_2^{true})^2 \\ & - (p_{yCM} - |\overrightarrow{p}_1| \sin\theta_1^{true} \sin\phi_1^{true} - |\overrightarrow{p}_2| \sin\theta_2^{true} \sin\phi_2^{true})^2 \\ & - (p_{zCM} - |\overrightarrow{p}_1| \cos\theta_1^{true} - |\overrightarrow{p}_2| \cos\theta_2^{true})^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

とすれば、

$$M_{mis} = \begin{cases} \sqrt{M_{mis}^2} & (M_{mis}^2 \geq 0) \\ -\sqrt{-M_{mis}^2} & (M_{mis}^2 < 0) \end{cases} \tag{6.6}$$

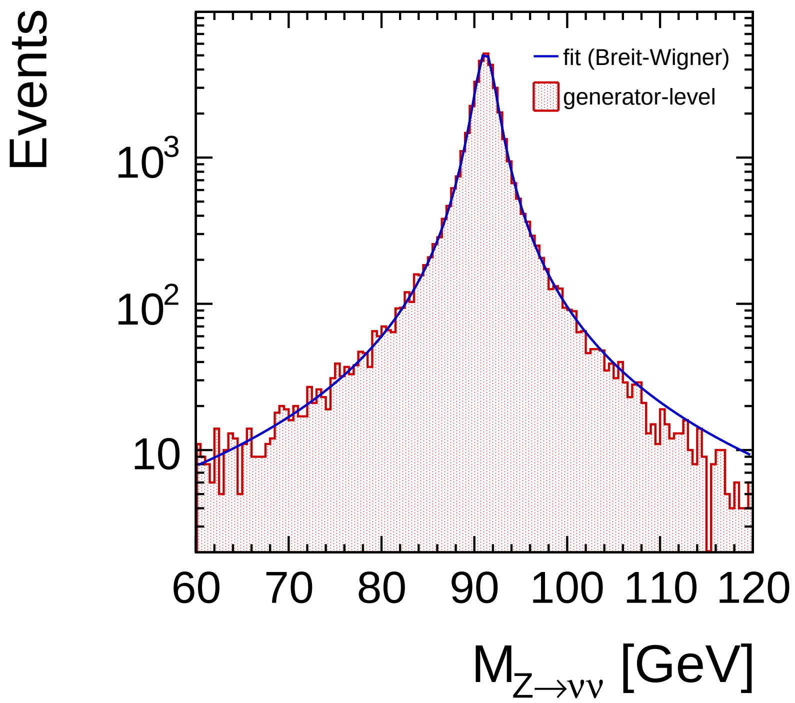


図 6.17: Z ボソンの質量 (MC 情報)

[4]電子のビーム軸と陽電子のビーム軸は 14 mrad で交わっているから、$p_{xCM} = 250\sin(\frac{14\times10^{-3}}{2}) \simeq 1.75[\mathrm{GeV}]$

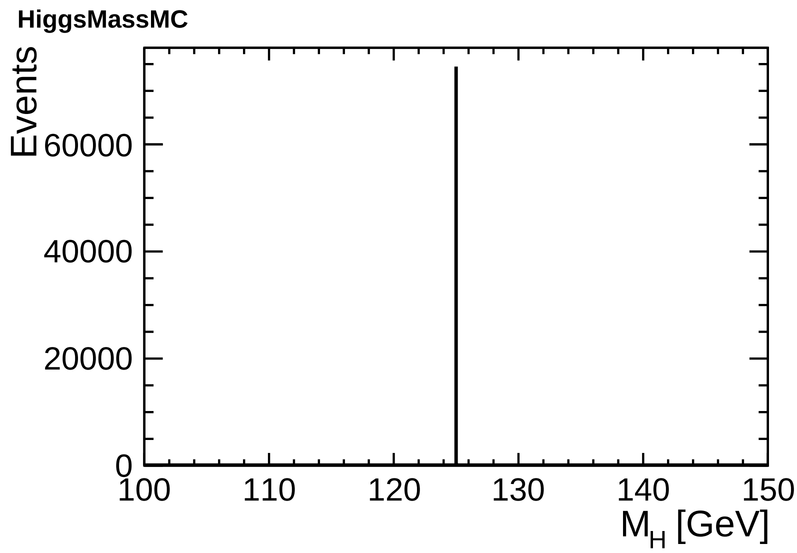


図 6.18: ヒッグス粒子の質量 (MC 情報)

ヒッグス粒子の崩壊幅は MC 情報で図 6.18 のように無視されているため、hard constraint とするのがよいであろう。hard constraint は

$$\overrightarrow{h}(E_1^{true}, E_2^{true}, \theta_1^{true}, \theta_2^{true}, \phi_1^{true}, \phi_1^{true}) = M_{jj} - M_H \tag{6.7}$$

と書ける。ただし、$M_H = 125[\mathrm{GeV}]$ であり、M_{jj} は 2 ジェット質量で、

$$\begin{aligned} M_{jj}^2 &= (E_1^{true} + E_2^{true})^2 \\ &- (|\overrightarrow{p}_1| \sin\theta_1^{true} \cos\phi_1^{true} + |\overrightarrow{p}_2| \sin\theta_2^{true} \cos\phi_2^{true})^2 \\ &- (|\overrightarrow{p}_1| \sin\theta_1^{true} \sin\phi_1^{true} + |\overrightarrow{p}_2| \sin\theta_2^{true} \sin\phi_2^{true})^2 \\ &- (|\overrightarrow{p}_1| \cos\theta_1^{true} + |\overrightarrow{p}_2| \cos\theta_2^{true})^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

ここで、

$$|\overrightarrow{p}_i| = \sqrt{E_i^{true2} - m_i^2} \tag{6.9}$$

と定義される。ここで、m_i は Particle ID[18] から計算されるジェットの質量である。最適化に当たり x^{true} が変数となり、最適解へ収束してゆく。ここで、kinematic fit に精通した方であれば、なぜヒッグス粒子の質量と Z ボソンの質量を両方 constraint　に入れ、フィット対象としたか疑問に思われるかもしれない。kinematic fit はフィットしない量を残しておき、フィットしない量がどの程度フィット後に信号事象で想定される値に近いかで信号事象と背景事象を分ける方法もある。しかし、今回は fit object および constraint に用いる物理模型を完全に再現し、信号事象が確実にフィットされ背景事象はフィットされにくいという fitter を目指しているから、物理模型の誤りを吸収してしまう自由度を設けず、かつ信号事象を確実に fit するため、すべての constraint をフィット対象としているのである。

第7章　ジェットエネルギー分解能

事象再構成においてはジェットエネルギーの分解能を特に考慮する必要がある。ここではまず、ジェットについて簡単に説明し、ジェットのエネルギー分解能を評価して fit object 関数のエネルギーの部分を正しく構築するところまでを目指す。

7.1　ジェット

クォークやグルーオン (以下、まとめてパートンと呼ぶ) といった強い相互作用に関与する粒子は色という量子数を持つ。しかし、観測される粒子は色を持たない白色の状態であり、パートンは単体で観測することはできない。こうしたパートンは生成してから色を持たない白色のバリオンやメソン (以下、まとめてハドロンと呼ぶ) といった粒子になるまでにハドロン化という過程を経る。このハドロン化で生成したハドロンと元のパートンは多数のパートンの相互作用でハドロン化が起きるために対応づけることができない。ハドロン化を経て多数のハドロンなどからなる多数の粒子の束が観測される。この粒子の束をジェットという。

7.2　ジェットクラスタリング

強い相互作用によるハドロン化が起きた結果、ハドロンの粒子群であるシャワーが観測される。ハドロンがどのパートンから生成したか同定することはできないから、原理的にシャワーを元のパートン毎に分離することはできない。しかし、元来同一の粒子であったであろう 2 粒子をまとめ上げることを繰り返すことで、仮想的にシャワーを目的の本数のジェットに分離することができ、これをジェットクラスタリングという。今回の解析ではジェットクラスタリングに LCFIPlus[14] の Durham アルゴリズムを用いている。Durram アルゴリズムにおける Y 値は以下の式で定義される。[11]

$$Y = \frac{2\min_{\{k,l\}}\left(E_k^2, E_l^2\right)}{E_{vis}^2}\left(1-\cos\theta_{kl}\right) \tag{7.1}$$

ここで、ジェットとは目的の本数までまとめ上げた状態の粒子の束を指し、目的の本数にまとめ上げるまでの現在の粒子の束を擬ジェットと呼ぶことにする。定義として {k,l} はまとめ上げたい擬ジェットの組み合わせであり、E_i は擬ジェットのエネルギー、θ_{kl} は k 番の擬ジェットと l 番目の擬ジェットのなす角である。E_{vis} はジェットクラスタリング対象の粒子のエネルギーの総和である。ジェットは次の手順でまとめ上げる。
まとめ上げるべき全ての擬ジェットの組み合わせ {k,l} について、Y 値を計算し、Y 値が最も小さい組み合わせ {k,l} のジェットをまとめて、1 つのジェットにする。このとき、まとめ上げられた擬ジェットの四元運動量は和をとる。これを繰り返し、目標のジェットの

本数になるまで繰り返す。
こうして、擬ジェットは目標のジェット本数までまとめ上げられるが、この本数は任意である。したがって、Durham アルゴリズムにおいてはまとめ上げるジェットの本数は任意に選べる。今回は終状態が b クォーク対であるから、2 本までまとめ上げる。

7.3 ジェットエネルギー分解能の評価

サンプル b ジェットサンプル $e^+e^- \to b\bar{b}$(IDR)
信号事象の偏りの影響を受けず、測定器の分解能だけを評価したい。解析は DBD サンプルで行っているが、b ジェットサンプルは DBD サンプルには存在しないため、IDR サンプルの b ジェットサンプルを用いた。

ジェットクラスタリング Durham アルゴリズム

ジェットエネルギー分解能の評価において重要な点は 2 つである。

- ジェットエネルギーの真値をどう定義するか
- (E^{true}, E^{meas}) の組から fit object はどのように構成するか

それぞれについて見ていく。ただし、E^{true}、E^{meas} はジェットエネルギーの真値と測定値の関係である。

7.3.1 ジェットエネルギーの真値

ハドロン化前後の粒子を対応づけることは原理的にできないと 7.1 で述べた。ゆえに、ジェットエネルギーの真値は測定値がハドロン化後の情報であるから、ハドロン化後の情報を採用すべきである。以下に本解析で用いたジェットエネルギーの真値の定義方法を述べる。

1. e^+e^- の衝突で生成されたクォークやグルーオンがハドロン化した後の粒子をシミュレーションしたものである MC Particle の全ての粒子 (モンテカルロ情報なので、ニュートリノも含む) の (3 元) 運動量と測定値によりジェットクラスタリングされたジェットの (3 元) 運動量のなす角の最も小さいジェットにその MC Particle の粒子は属することにする。(ただし、ニュートリノは親の B メソンや C メソンと運動量の向きが大きく異なる場合があるため、親粒子の運動量で判定する)
2. そのジェットに属することになった MC Particle の全ての粒子のエネルギーを足し合わせる。(ただし、ニュートリノは判定に使うのは親だが足すのはニュートリノ自身のエネルギーであるから注意する。)

これで、各事象、ジェット 1 とジェット 2 毎に (E^{true}, E^{meas}) の組ができる。

7.3.2 fit object の構成

各事象、ジェット 1 とジェット 2 毎に (E^{true}, E^{meas}) の組ができたが、現状では b ジェットサンプルの重心系衝突エネルギーは 40GeV、91GeV、200GeV、350GeV、500GeV と 5 点 (各点 50000 事象) しかない。さらに、E^{true} は若干のずれがあるとはいえ、多くは b ジェットサンプルの重心系衝突エネルギーの半分付近に分布している。したがって、E^{meas} に比べて、E^{true} は局所的に分布していることになる。このことを踏まえて fit object をどのように構成するかについて述べる。図 7.1 は b ジェットサンプルにおいて、横軸を (E^{true}-重心系衝突エネルギーの半分)/重心系衝突エネルギーの半分、縦軸を $(E^{meas} - E^{true})/E^{true}$ とおいたときの散布図であり、上段はジェット 1、下段はジェット 2 である。また、左から順に b ジェットサンプルの重心系衝突エネルギーは 40GeV、91GeV、200GeV、350GeV、500GeV である。この図からわかることは、ジェット 1 よりジェット 2 の方が非対称性が大きいこと、E^{true} は重心系衝突エネルギーの半分付近に多く位置していることである。前者の理由はジェット 1 はジェット 2 より E^{meas} が大きいために、ハドロン化後にニュートリノを出すレプトン崩壊やセミレプトン崩壊をあまり起こしていないことが考えられる。後者の理由は b ジェットサンプルでは 2 つの b クォークが back to back に出るためにエネルギーが偏りにくいことが考えられる。

fit object の確率密度関数であるが、これには 2 通りの構成方法がある。

方法 1 真値の推定値が E^{true} であるときの測定値 E^{meas} の分布を用いる方法

方法 2 測定値が E^{meas} であるときの真値の推定値 E^{true} の分布を用いる方法

方法 1 は E^{meas} に比べて、E^{true} は局所的に分布している場合でも比較的容易に準備できる反面、イテレーション毎に分布を取り直す必要がある。方法 2 は局所的に分布している場合は準備が煩雑になるがイテレーション毎に分布を取り直す必要がない。以下に方法 1 および方法 2 における fit object 構成方法を述べる。なお、本研究では方法 2 を用いている。

方法 1

方法 1 は真値の推定値が E^{true} であるときの測定値 E^{meas} の分布を用いる方法であるから、真値の推定値が E^{true} である事象を多く集めればよい。

1. E^{true} の多くは重心系衝突エネルギーの半分付近に位置していることを考えると、E^{true} を重心系衝突エネルギーの半分に規格化して、E^{meas} をそれに比例させて重心系衝突エネルギーの半分/E^{true} 倍すれば、真値の推定値が E^{true} である事象を多く集められる。

2. これを用いて真値の推定値が E^{true} であるときの測定値 E^{meas} の分布をサンプルの重心系衝突エネルギー毎に作り、同じ関数で重心系衝突エネルギー毎にフィットする。

3. 関数のフィット値を縦軸に、E^{true} を横軸にしてサンプルの重心系衝突エネルギーの数だけフィット値をプロットしてこの点を通る関数で内挿する。

4. これで任意の E^{true} の値に対して測定値 E^{meas} の分布を作ることができるようになる。これを、E^{meas} での積分が 1 になるように規格化した分布が fit object になる。

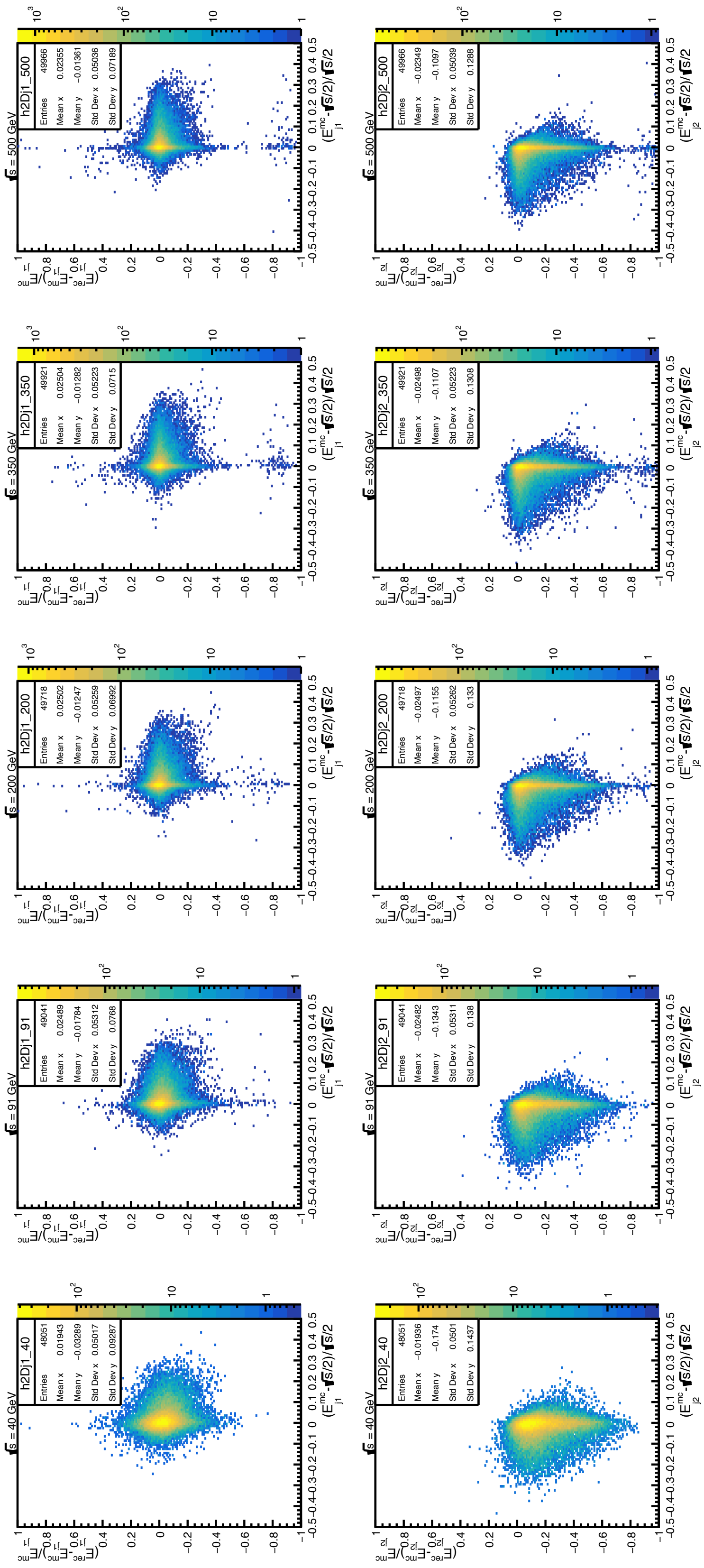


図 7.1: b ジェットの $((E^{true}-$ 重心系衝突エネルギーの半分$)/$重心系衝突エネルギーの半分, $(E^{meas}-E^{true})/E^{true})$ の散布図

しかし、各イテレーションで真値の推定値 E^{true} が動くために、イテレーション毎に E^{meas} の分布を作り直す必要が生じる。

方法 2

方法 2 は測定値が E^{meas} であるときの真値の推定値 E^{true} の分布を用いる方法であるから、測定値が E^{meas} である事象を多く集めればよい。しかし、方法 1 と同様の手法をとろうとすると、E^{true} に比べて、E^{meas} は広がって分布しているから、測定値が E^{meas} である事象が少ない。方法 1 で行ったように E^{meas} に比例させて E^{true} の値をスケーリングしても、統計量を稼ぐためには E^{meas} の値を大きくずらさなければならず、統計処理の点で問題が生じる。そこで、方法 1 を経由して fit object の確率変数を E^{meas} から E^{true} に変更した。この変更する手続きを以下に述べる。

1. E^{meas} での積分が 1 になるように規格化した真値の推定値が E^{true} であるときの測定値 E^{meas} の分布を真値の推定値 E^{true} を横軸を E^{meas}、縦軸を確率密度として任意の E^{true} の値に対して描く。

2. ある事象において測定値が E^{meas} であれば測定値の分布から測定値が E^{meas} であるときの確率密度を横軸を E^{true} にしてプロットする。

3. これをあらゆる E^{true} でくまなくプロットし、E^{true} での積分が 1 になるように規格化した分布が fit object になる。

これは測定値が得られる各事象毎にあらゆる E^{true} の値で、くまなくプロットしなければならないが、イテレーション毎には分布を作り直す必要がなく、高速である。ただし、今回は方法 2 を fit object にのみ適用したが、本来は constraint も含めた尤度全体に適用しなければならない。この場合、デルタ関数の数値計算上の取り扱いが難しいため、方法 1 を用いた方が良い。実は方法 1 は頻度論、方法 2 はベイズ論に基づく解釈である。この旨を 7.4 で述べる。現在はベイズ論を fit object に適用し、constraint には適用していないという誤った状況であり、これを修正するのは今後の課題とする。

7.4 頻度論とベイズ論

確率密度関数をどのように定義するかは頻度論とベイズ論の 2 通りの定義がある。頻度論は物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ であるときに物理量の測定値が $\overrightarrow{y}$ である確率密度関数を用い、ベイズ論は物理量の測定値が $\overrightarrow{y}$ であるときに物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ である確率密度関数を用いる。すなわち、確率変数を頻度論では物理量の測定値 $\overrightarrow{y}$ とし、ベイズ論では物理量の真値の推定値 $\overrightarrow{\eta}$ とする。
頻度論における確率密度関数

$$f_F(\overrightarrow{y};\overrightarrow{\eta}) \tag{7.2}$$

ベイズ論における確率密度関数

$$f_B(\overrightarrow{\eta};\overrightarrow{y}) \tag{7.3}$$

ただし、セミコロン (;) の左は確率変数の実現値である変数、右は条件を示す定数である。つまり、両者の確率密度関数は条件付き確率密度を表しており、確率変数と条件が入れ替わっただけである。両者の関係を説明すると、

$$\begin{aligned}&\text{ベイズ論におけるの確率}\\ =&\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{であるときに物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率}\\ =&\frac{\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{でありかつ物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率}}{\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{である確率}}\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}&\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{である確率}\\ =&\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{でありかつ物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率を}\\ &\text{すべての}\overrightarrow{\eta}\text{について足し上げた確率}\\ &(\overrightarrow{\eta}\text{の周辺確率})\end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned}&\text{物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{でありかつ物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率}\\ =&\text{物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率}\\ &\times\text{物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{であるときに物理量の測定値が}\overrightarrow{y}\text{である確率}\\ =&\text{物理量の真値の推定値が}\overrightarrow{\eta}\text{である確率}\times\text{頻度論におけるfit object の確率}\end{aligned}$$

より、物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ である確率密度を $\pi(\overrightarrow{\eta})$ と置くと、両者の関係式として、

$$f_B(\overrightarrow{\eta};\overrightarrow{y}) = \frac{f_F(\overrightarrow{y};\overrightarrow{\eta})\pi(\overrightarrow{\eta})}{\int f_F(\overrightarrow{y};\overrightarrow{\eta'})\pi(\overrightarrow{\eta'})d\overrightarrow{\eta}'} \tag{7.4}$$

が得られる。頻度論とベイズ論の関係式には物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ である確率密度 $\pi(\overrightarrow{\eta})$ が含まれるが、$\pi(\overrightarrow{\eta})$ は事前情報がない通常の場合は一様分布にとる。一様分布にとると、頻度論とベイズ論で物理量の真値の推定値 $\overrightarrow{\eta}$ は同じ推定値となる。式 (**??**) の分母は単に規格化である。ただし、kinematic fit 後の尤度を比較する場合は、確率密度関数を規格化しておく必要があるため、規格化を考慮しておくべきである。ここからは頻度論とベイズ論のそれぞれにおける確率密度関数を用いたときの取り扱いの違いを述べる。

頻度論

頻度論では物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ であるときに物理量の測定値が $\overrightarrow{y}$ である確率密度関数を用いるから、物理量の真値の推定値 $\overrightarrow{\eta}$ を条件として確率密度関数を定める。しかし、物理量の推定値は分からないのであるから、数値計算で $\overrightarrow{\eta}$ が更新されたら、確率密度関数を作り直す必要がある。そのため、計算に時間がかかる。

ベイズ論

物理量の測定値が $\overrightarrow{y}$ であるときに物理量の真値の推定値が $\overrightarrow{\eta}$ である確率密度関数を用いるから、物理量の測定値 $\overrightarrow{y}$ を条件として確率密度関数を定める。ここで、測定値 $\overrightarrow{y}$ は

事象毎に既知であり、数値計算で $\vec{\eta}$ が更新されても、確率密度関数を作り直す必要はない。そのため、高速である。ただし、本来は尤度全体においてベイズ論の確率密度関数を用いるべきであるが、今回は fit object にしか用いていないのと、式 (7.4) におけるデルタ関数の処理が難しいため、尤度全体で方法を統一する場合は頻度論を推奨する。

7.5　ジェット 1 本あたりのエネルギー分解能の評価

fit object のエネルギー分解能を得る際に、信号事象を用いると、今回は統計量が不足してしまう。したがって、b ジェットサンプルを用いる。ここではジェット 1 本あたりのジェットエネルギー分解能を構成する方法としていくつかの候補を述べる。

7.5.1　ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーの和 $(E_1 + E_2)$ を用いる方法

これは uds ジェットのようにエネルギー分布が対称な場合に用いられていた方法で、ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー分解能が共に標準偏差 σ の正規分布で表されていると仮定すると、誤差伝播により、ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーの和 $E_1 + E_2$ の分解能は $\sqrt{2}\sigma$ となるから、ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーの和 $E_1 + E_2$ の分解能が分かっていれば、ジェット 1 本あたりのエネルギー分解能を計算できるということであった。しかし、今回は b ジェットを扱っているために $E_1 + E_2$ の分布は図 7.2 となる。

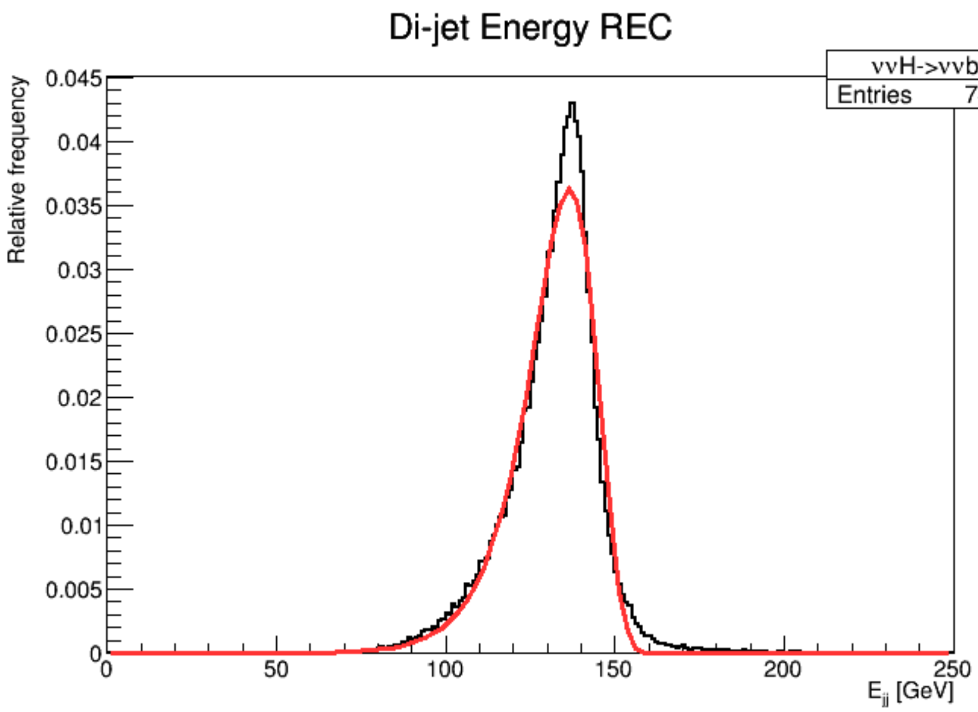


図 7.2: $E_1^{meas} + E_2^{meas}$ の分布 ($\nu\overline{\nu}H \to \nu\overline{\nu}b\overline{b}$ サンプル (DBD))

ここで、フィットしているのはガンベル分布という以下の確率密度関数で表される確率分布である。

$$f(x;\mu,\eta)=\frac{1}{\eta}e^{\frac{x-\mu}{\eta}-e^{\frac{x-\mu}{\eta}}} \tag{7.5}$$

まず、E_1+E_2 の分布が非対称であるから、正規分布を仮定する上記の方法でジェット 1 本あたりのエネルギー分解能を求めることはできない。また、図 7.1 でジェット 1 とジェット 2 のエネルギーの分布が異なることからもこの方法ではジェット 1 本あたりのエネルギー分解能を構成するのは難しいことがわかる。

7.5.2　ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーを区別して評価する方法

ジェット 1 本あたりのエネルギーの真値を定義できるようになったので、7.5.1 の方法をジェット 1 本のエネルギーを直接評価できる方法に置き換える。以下では E^{true} を 7.3 で記述した方法で計算するものとする。ここで、ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー分布が異なるということを述べた。そこで、ジェット 1 とジェット 2 を区別し、それぞれを E^{true} 毎にフィットすることを考える。フィットには、ジェット 1、ジェット 2 共に以下の GPET 関数を用いた。

$$f(x;\mu,\sigma,N,k,b)=\begin{cases} Ne^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} & (x\geq k) \\ N\left[be^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2}+(1-b)\,e^{-k(\frac{x-\mu}{\sigma})}e^{k^2/2}\right] & (x<k)\end{cases} \tag{7.6}$$

ただし、N は規格化であり

$$x=\frac{E^{meas}-E^{true}}{E_1^{true}} \tag{7.7}$$

フィット結果を以下に載せる。横軸は上で定義した x で、縦軸は確率密度である。

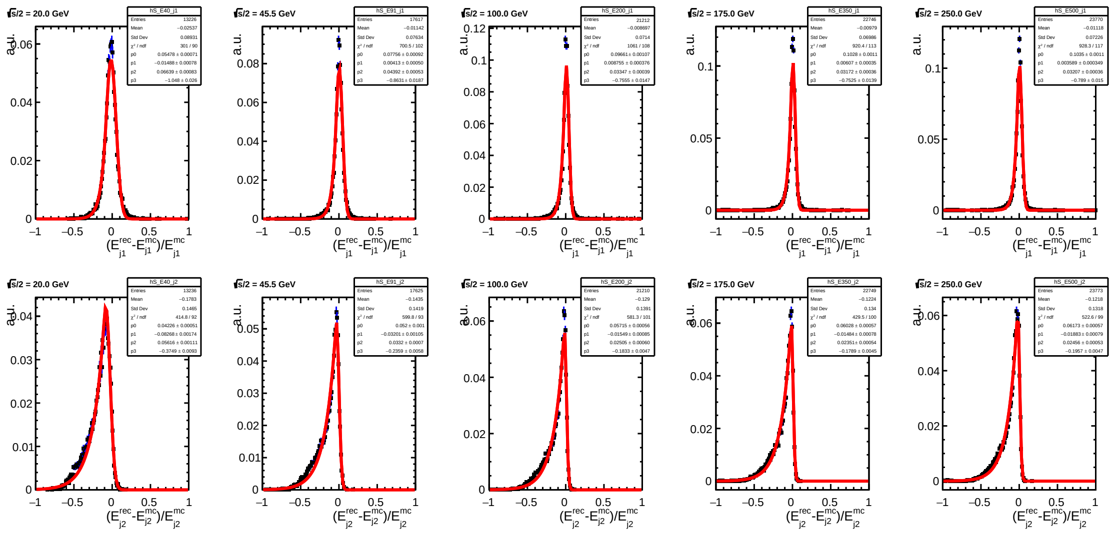


図 7.3: fit object を E_1 と E_2 共に GPET 関数で fit した場合の E_1(上段) と E_2(下段) の分布の違い (b ジェットサンプルのビームエネルギーは左から 40 GeV、91 GeV、200 GeV、350 GeV、500 GeV)

7.5.3 ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーを区別せずに足し上げて評価する方法

b ジェットサンプル $(e^+e^- \to Z \to b\bar{b})$ と異なり、信号事象 $(ZH \to \nu\bar{\nu}b\bar{b})$ に関してはヒッグス粒子がブーストされているためにジェットクラスタリングにおけるジェットの分かれ方が b ジェットサンプルと異なることが予想できる。したがって、ジェット 1 とジェット 2 を区別せずにヒストグラムを作り、それをフィットすることで、ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー分解能の分布を共通化してしまうということである。これのフィットにも GPET 関数を用いた。(b ジェットサンプルのビームエネルギーは左上から 40 GeV、91 GeV、200 GeV、350 GeV、500 GeV)

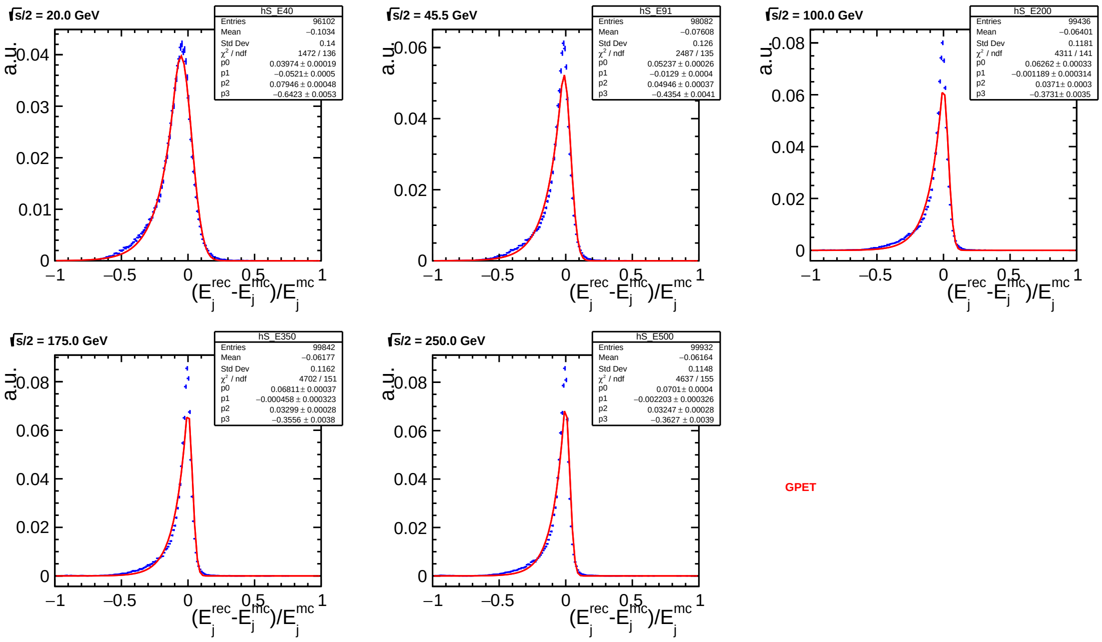


図 7.4: fit object を E_1 と E_2 共に GPET 関数で fit した場合の E_1(上段) と E_2(下段) の分布の違い (b ジェットサンプルのビームエネルギーは左から 40 GeV、91 GeV、200 GeV、350 GeV、500 GeV)

なお、内挿には

$$f(x; A, B, C) = Ax + \frac{B}{x + C} \tag{7.8}$$

を用いた。

第8章　研究状況報告

以下の解析においては、第 6 章における事象選択 1-11 のうち、kinematic fit で特に絞ることができる 1 の M_{mis} および 8 の M_{jj} 以外の選択条件をかけた後のものを kinematic fit している。また、スピン偏極率は $(P_{-}, P_{+}) = (-1, +1)$ である。信号事象は $e^{+}e^{-} \rightarrow ZH \rightarrow \nu\bar{\nu}b\bar{b}$(ただし、サンプルの特性上 ZH 過程と WW 融合過程を完全に分けることはできないため、 $\nu\bar{\nu}b\bar{b}$ のニュートリノのフレーバーが電子ニュートリノ でないことを要求し、WW 融合過程を除外している。)、背景事象は、6 章での事象選択において最もよく残り、Higgs の質量を M_{jj} に課して絞るのが特に有効な $\nu\nu qq$ 過程のうちの 4f_sznu_sl 過程 (終状態のニュートリノが電子ニュートリノである $\nu\nu qq$ 過程) を用いた。

ここからは現状の Likelihood fitter の動作確認および fit object のエネルギー分解能に試した種々の関数を紹介しながら、性能評価していく。以下特に記載がない場合は準ニュートン法による逐次二次計画法で Armijo 条件および二次補正、大域的最適化を行っているものとする。

8.1　fitter の動作確認

まず、以下の議論は hard constraint としてヒッグスの質量、soft constraint として Z ボソンの質量をかけ、準ニュートン法による最適化を行っているものとする。また、信号事象については上記の事象選別をして残るうちの最初の 10000 事象のみを扱う。背景事象は上記の事象選別をして残る 1711 事象を扱う。角度分解能については第 6 章で導入した方法を用いるものとする。

8.1.1　Armijo の条件と二次補正

以下では、特に記さない限り fit object にジェット 1 とジェット 2 のエネルギーを区別せずに足し上げて評価する方法で導入した GPET 関数を用い、角度分解能の評価を行った場合の大域的最適化を行った場合の結果に Armijo の条件を用いた場合と用いない場合および二次補正を行った場合と行わない場合の信号事象の収束判定を満たすまでのイテレーション数、kinematic fit 後の 2 ジェット質量、消失質量のプロットを載せる。ただし、Armijo の条件無の場合は第 5 章のアルゴリズムの 3 を行わない。また、二次補正無の場合はアルゴリズムの 3 の二次補正 (始) から二次補正 (終) までを行わない。

Armijo の条件は収束に大きく寄与していることがわかる。特に、hard constraint は Armijo の条件を課した場合は完璧に効いており、ステップサイズの調整が非常に重要であることがわかる。また、二次補正によって顕著な改善は見られなかった。Maratos 効果があまり発生していないからと考えられる。soft constraint が Armijo の条件および二次

補正有でもうまく効いていない (対数をとると顕著) のは物理模型が悪い、例えば ISR を考慮していないなどの影響が消失質量に押しつけられているためと考えられる。

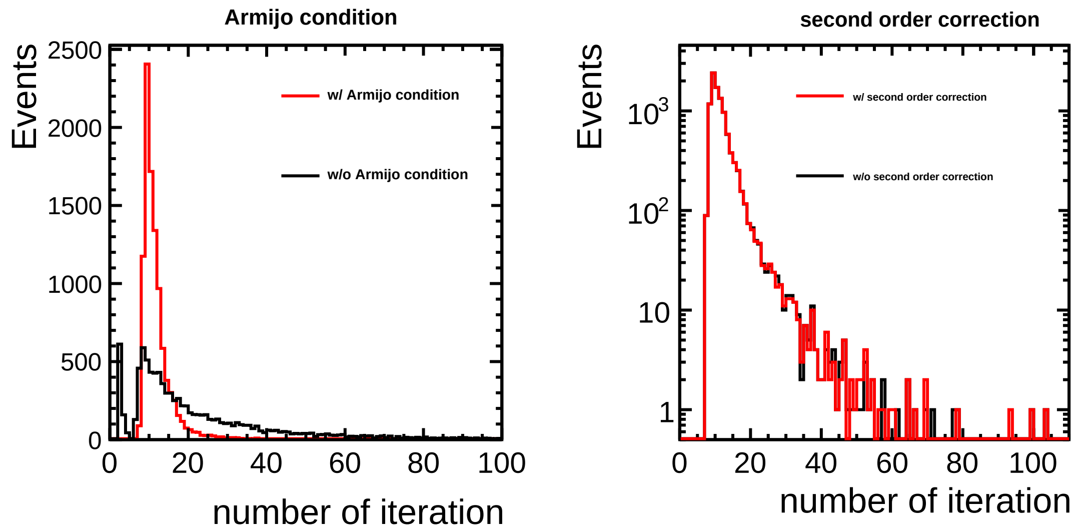


図 8.1: 収束判定を満たすまでのイテレーション数:Armijo の条件 (左) と二次補正 (右):有 (赤) と無 (黒)

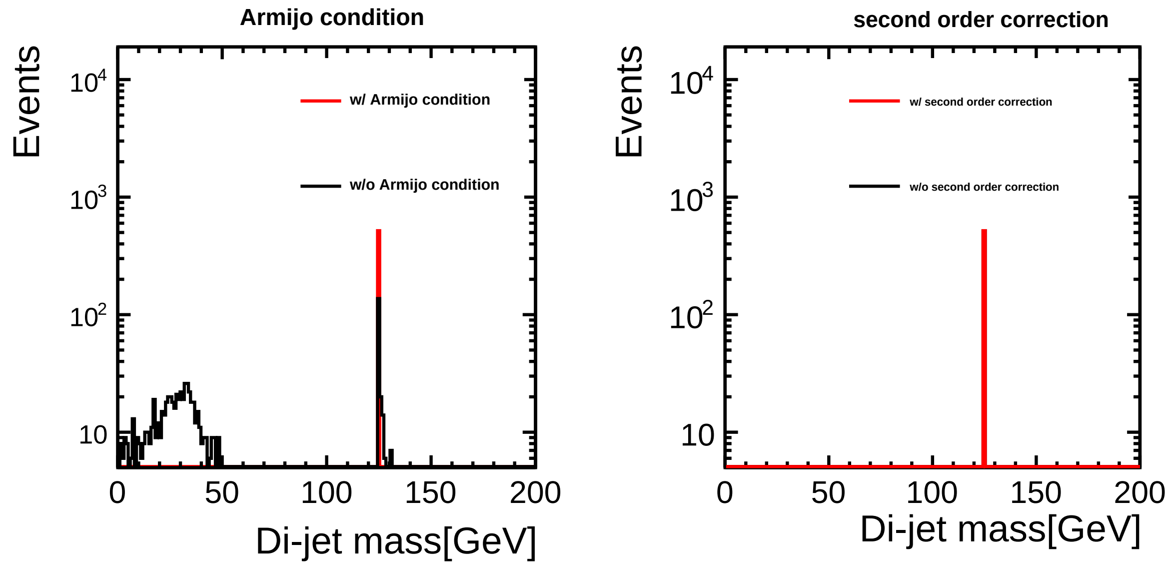


図 8.2: 2 ジェット質量 (w/ kinfit):Armijo の条件 (左) と二次補正 (右):有 (赤) と無 (黒)

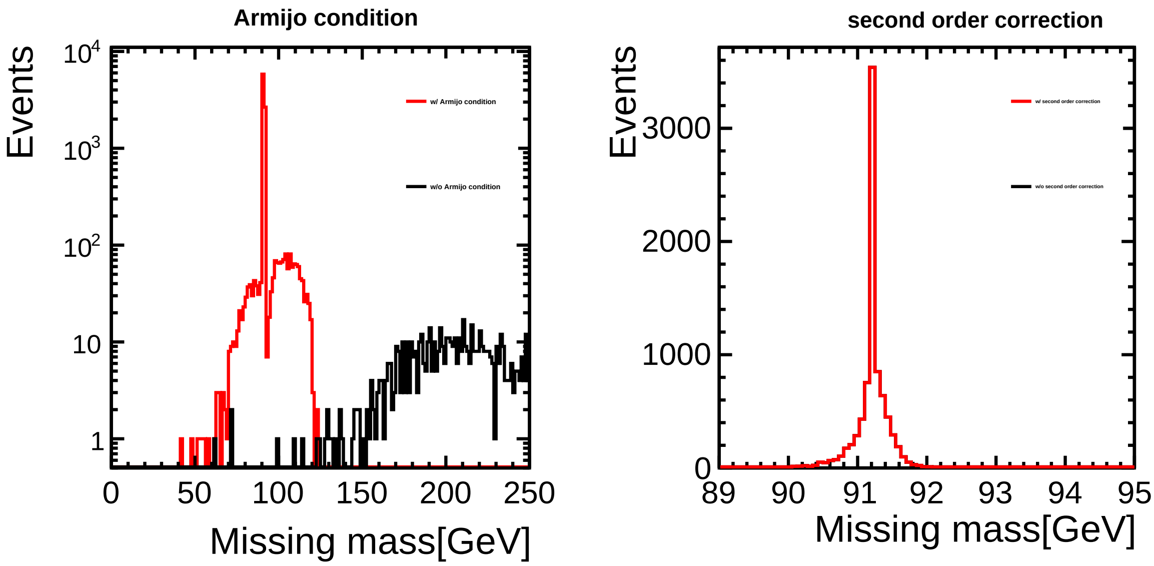


図 8.3: 消失質量 (w/ kinfit):Armijo の条件 (左) と二次補正 (右):有 (赤) と無 (黒)

大域的最適化

大域的最適化[1]が機能していることを示すために、大域的最適化によって収束点が変わった例を下図に示す。この図はある測定値に対して、(E_1^{true}, E_2^{true}) を変化させたときの、$\chi^2_{Likelihood}$ および、$\chi 2_{fitobject}$ と $\chi^2_{softconstraint}$ の分布である。ただし、角度 $(\theta^{true}, \phi^{true})$ に関しては測定値に固定している。ただし、大域的最適化無の場合の初期値は測定値とし、有の場合は第 5 章で述べたように、hard constraint 上の点をサンプリングして、最も $\chi^2_{Likelihood}$ の小さい点を初期値に最適化を始めることで、初期値依存性をなくしている。未定乗数 $\overrightarrow{\lambda}$ の初期値は常に $\overrightarrow{0}$ である。

[1] 第 5 章で述べたように、hard constraint 上の点をサンプリングして、最も $\chi^2_{Likelihood}$ の小さい点を初期値に最適化を始めることで、初期値依存性をなくしている。

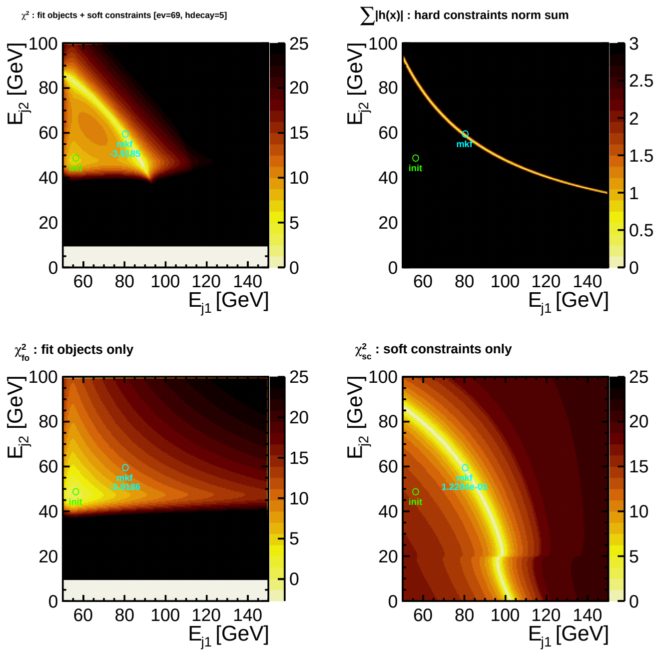


図 8.4: エネルギーの fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) の場合の信号事象の第 69 事象の χ^2 および hard constraint の分布 (大域的最適化無)

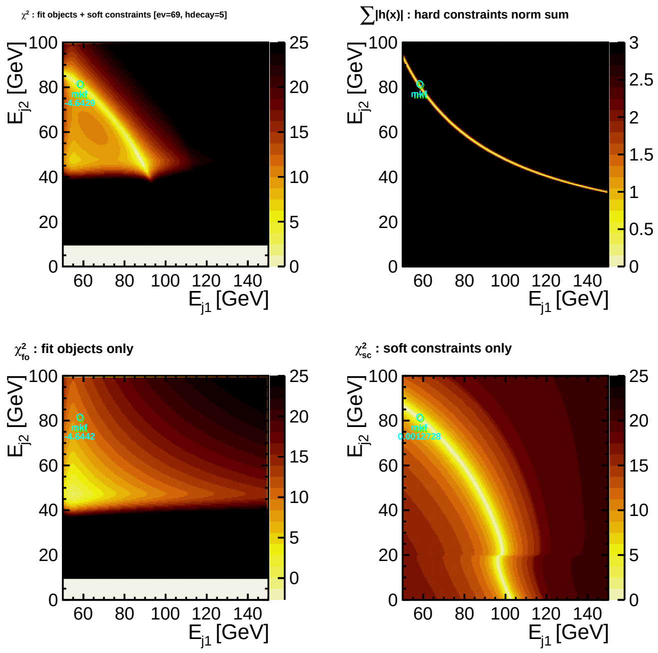


図 8.5: エネルギー fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) の場合の信号事象の第 69 事象の χ^2 および hard constraint の分布 (大域的最適化有)

ジェット 1 とジェット 2 のエネルギーを区別せずに足し上げて評価する方法で導入した GPET 関数をエネルギーの fit object として信号事象の第 69 事象を見ている。この図にある init(緑色)、mkf(青色)、2 点はそれぞれ kinematic fit の初期値、kinematic fit の結果の値を表している。また、mkf の点の下の書いてある数字はフィット後の $\chi^2_{Likelihood}$、$\chi^2_{fit\ object}$、$\chi^2_{soft\ constraint}$ のそれぞれの値である。これより、大域的最適化で $\chi^2_{Likelihood}$ は-3.9185 から-4.6429 に小さくなっており、これが大域的最適解かは分からないが、この方法により局所的最適解から抜け出せる可能性があることと、逐次二次計画法だけでは局所的最適解に陥る可能性があることを示している。ここで、$\chi^2_{soft\ constraint}$ の分布で途中で滑らかでないように見えるのは、6.6 のように消失質量 M_{mis} を定義しているからである。また、GPET 関数に関しては実装上 $\chi^2_{Likelihood}$ に指数関数および対数関数を使う必要があるため、これによる桁落ちが図の白くなっている部分に現れている。

8.1.2 hard conctraint の確認

hard constraint について信号事象と背景事象で両方効いていることを調べるために、同じくジェット 1 とジェット 2 のエネルギーを区別せずに足し上げて評価する方法で導入した GPET 関数をエネルギーの fit object として用い、kinematic fit 前後で信号事象および背景事象について 2 ジェット質量を比較した。これにより、信号事象でも背景事象でも問題なく hard constraint が効くことが分かる。

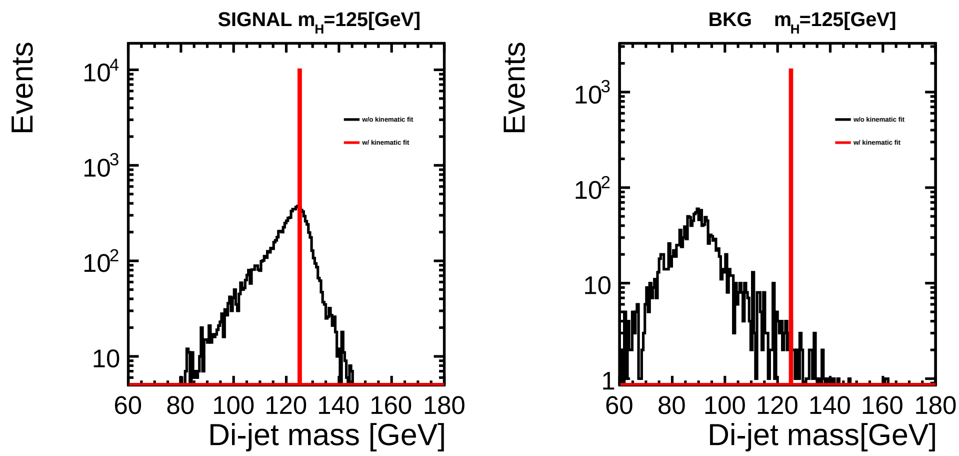


図 8.6: 信号事象と背景事象における kinematic fit 前後のヒッグス質量

8.1.3 soft constraint の確認

soft constraint も hard constraint と同様の条件で kinematic fit 前後で信号事象と背景事象の消失質量を比較した。

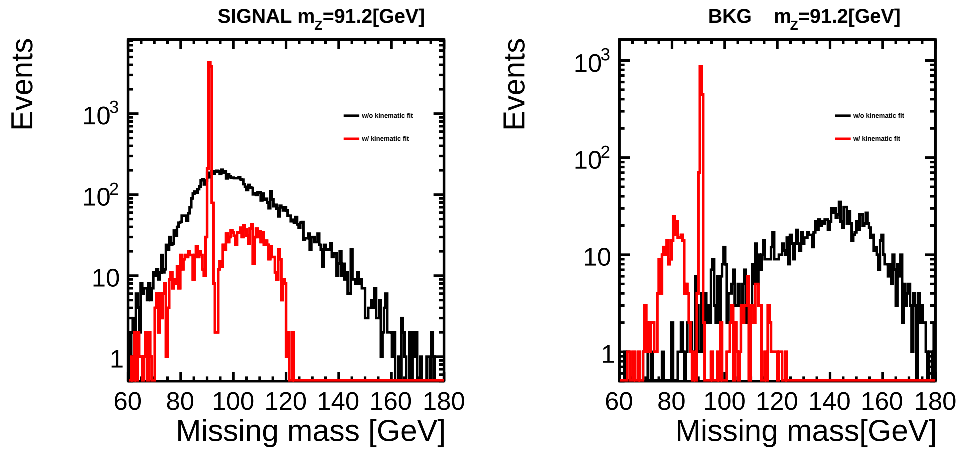


図 8.7: 信号事象と背景事象における kinematic fit 前後の Z ボソン質量

これより、soft constraint が効いていない事象が信号事象にも背景事象にも多いということが分かる。これを詳しく調べるため、　信号事象において横軸に kinematic fit 後の消失質量を、縦軸に衝突重心系から見たジェット 1 とジェット 2 のなす角の測定値を 2 次元プロットした。なお、kinematic fit で角度はあまり変化しないため、簡単のため測定値としている。

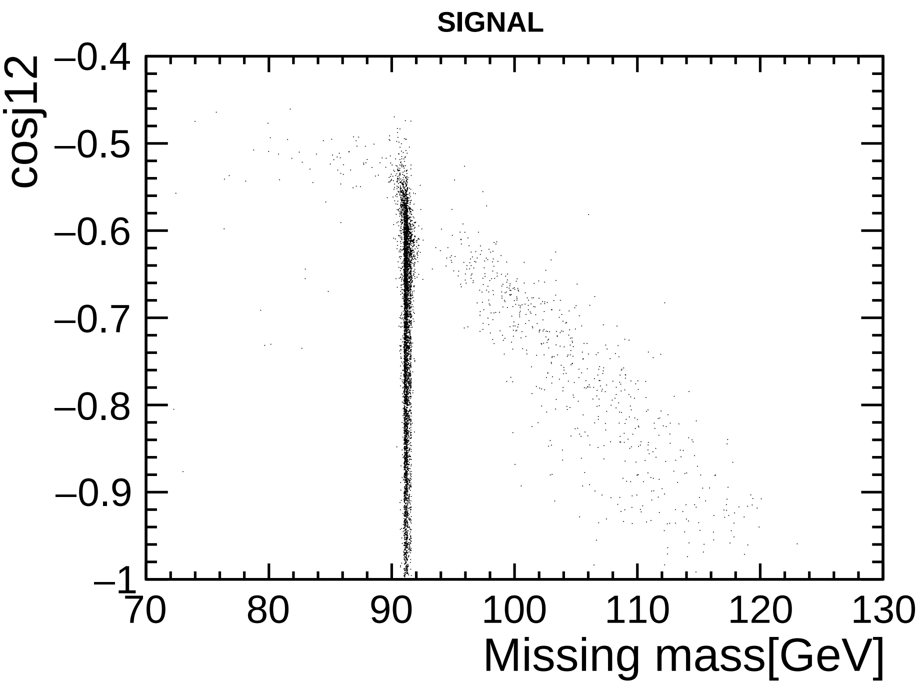


図 8.8: 信号事象の kinematic fit 後の消失質量とジェット 1 とジェット 2 のなす角の測定値の 2 次元分布

ここで、問題点は大きく 2 つある。

1. 消失質量が $M_Z = 91.2[GeV]$ になっていない信号事象がある。

2. $M_Z = 91.2$[GeV] より消失質量がやや大きいところで、分布が薄くなっている。

まず、1 について、消失質量が Z ボソンの質量にならないのは、kinematic fit の物理模型に問題があると考えられる。例えば、ISR を soft constraint で考慮すると、重心系エネルギーが変化するから、消失質量が Z ボソンの質量に合いやすくなる。
図 8.1.3 は消失質量が 125GeV で $\cos j12$ が-1 の点から左上方向に薄く分布した構造を持つ。これは、ヒッグス質量の hard constraint だけを考えたときに消失質量がとりうる上限値に沿っている。ヒッグス粒子から崩壊した 2 ジェットのなす角が小さくなればなるほど、同じ質量を組むには大きなエネルギーを要し、Z ボソンはエネルギーをヒッグス粒子にとられて、質量の上限値が小さくなっていく。
2 について、Z ボソンの質量は Breit-Wigner 分布に従うから、本来であれば $M_Z = 91.2[GeV]$ から消失質量が離れるにつれて段々薄くなっていくはずであるが、そうなっていない。これはバグが考えられるが、まだ見つかっていない。

8.1.4 fit object と soft constraint の幅の関係

エネルギーの fit object を正規分布

$$f_E(E_1^{meas}, E_2^{meas}; E_1^{true}, E_2^{true}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E_1^{meas}-E_1^{true}}{\sigma_{E_1}}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{E_2^{meas}-E_2^{true}}{\sigma_{E_2}}\right)^2} \tag{8.1}$$

で仮定し、$(\sigma_{E_1}, \sigma_{E_2}) = (5, 5), (10, 10), (15, 15)$[GeV] ととったときの消失質量の分布は図 8.9 のようになっている。これから、今回の定式化では、soft constraint は fit object との兼ね合いで、 fit object の幅が広く、真値の推定値が自由に動くことができれば、soft constraint は狭い幅に決まりやすく、逆に fit object の幅が狭く、真値の推定値が自由に動くことを許さないのであれば、soft constraint は決まらず、広い幅を持ってしまう。最適な物理モデルをかけた場合に、2.5 GeV の最適な幅を信号事象で持つと考えられる。

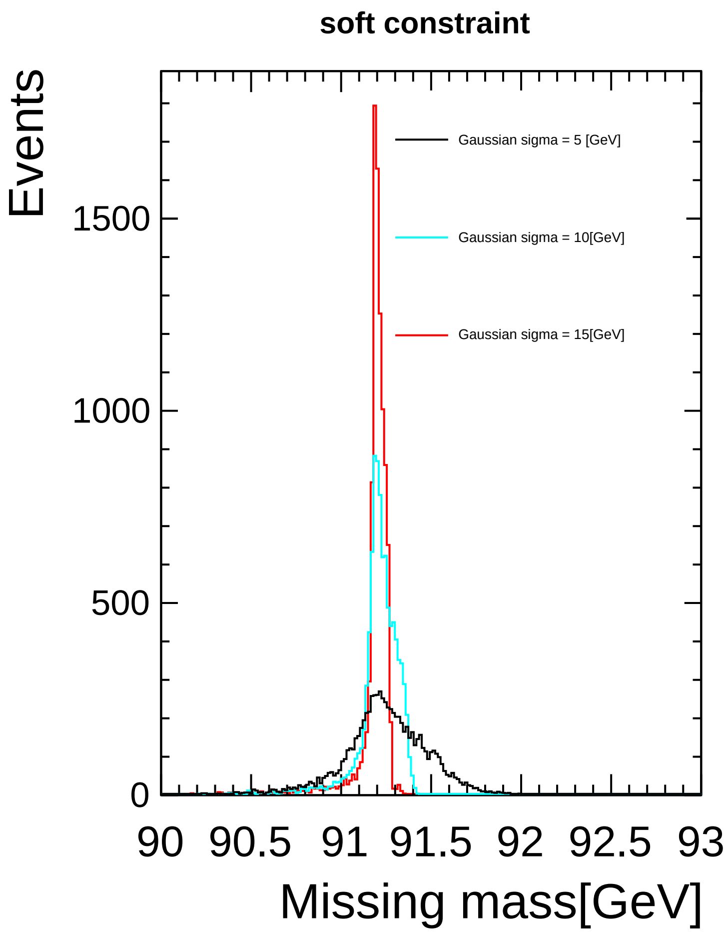


図 8.9: kinematic fit 後の消失質量の fit object の幅による比較

8.2 fit object の評価

ここからは具体的に様々な fit object 関数について $\chi^2_{Likelihood}$ で信号事象と背景事象を選別し、純度 (事象選択で残っている信号事象数の同じく残っている信号事象数と背景事象数の和に占める割合) と効率 (事象選択で残っている信号事象数の全体の信号事象数に占める割合) のプロットを作る。このとき、fit object 関数については随時説明する。

8.2.1 fit object の幅

エネルギーの fit object の幅によって soft constraint の幅が決まることは 8.1 で見た。そこで、適当な幅を調べるため、式 (8.1) で $(\sigma_{E_1}, \sigma_{E_2}) = (5, 5), (10, 10), (15, 15)$[GeV] と変化させた。ただし、角度分解能は第 6 章で用いたもので定義している。$\chi^2_{Likelihood}$ の分布は図 8.2.1 のようになる。

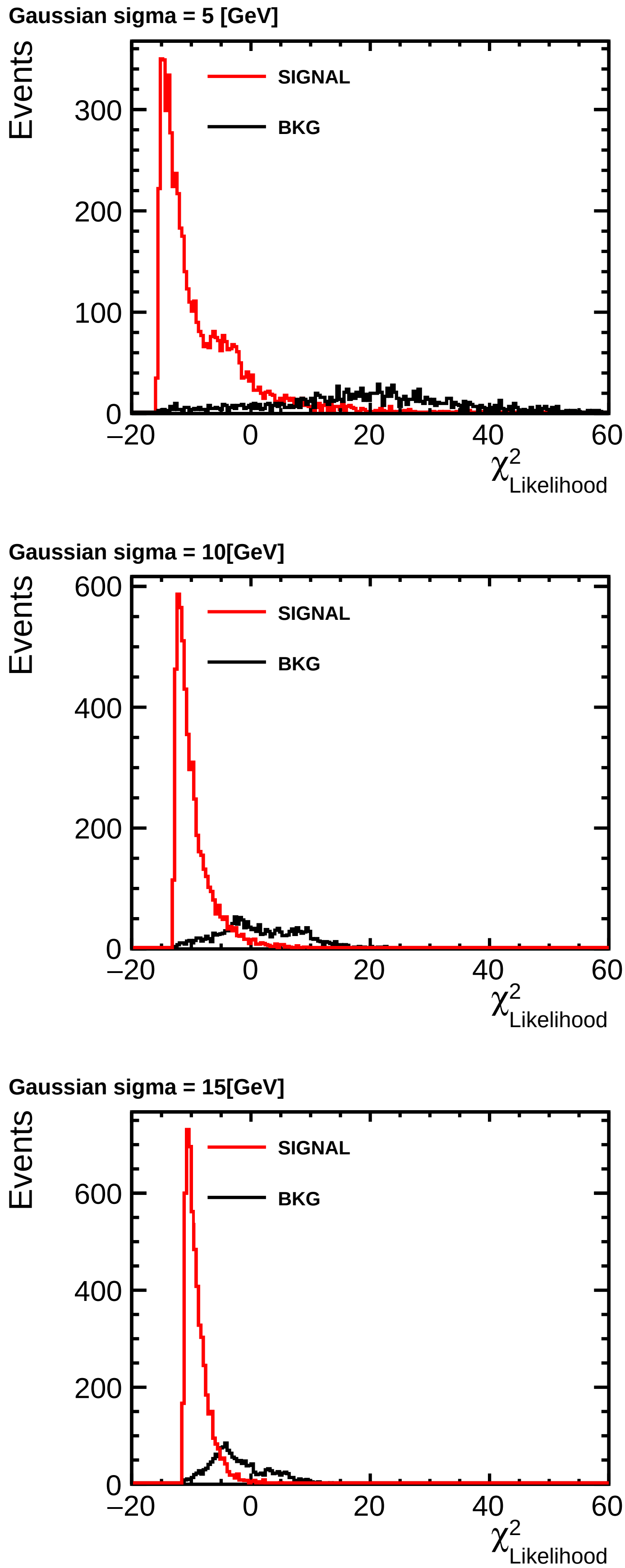


図 8.10: 正規分布の標準偏差が 5GeV、10GeV、15GeV のときの $\chi^2_{Likelihood}$ の分布

純度と効率のプロットは

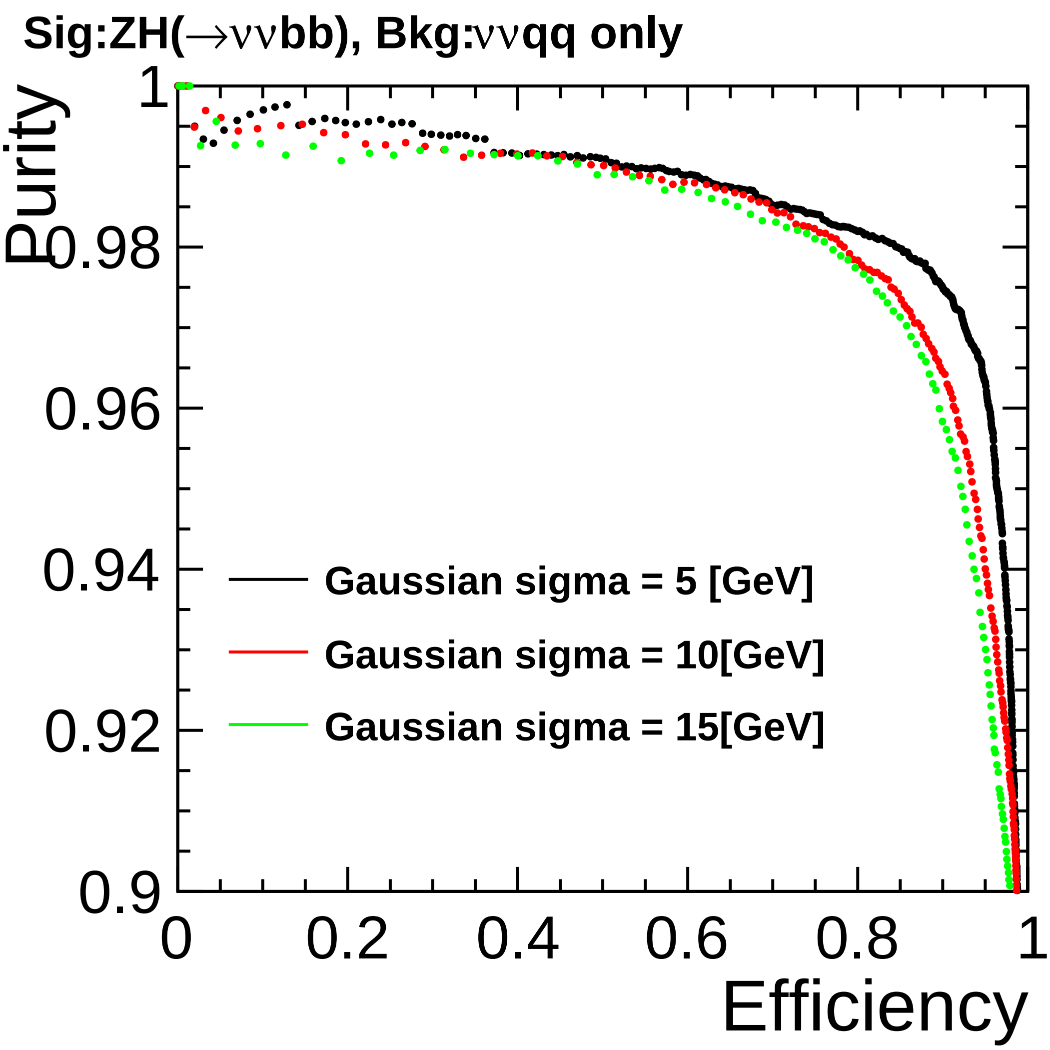


図 8.11: 正規分布の標準偏差が 5GeV、10GeV、15GeV のときの純度と効率

さらに、1GeV から 5GeV まで 1GeV 刻みで見た場合の純度と効率のプロットを図 8.2.1 に載せる。

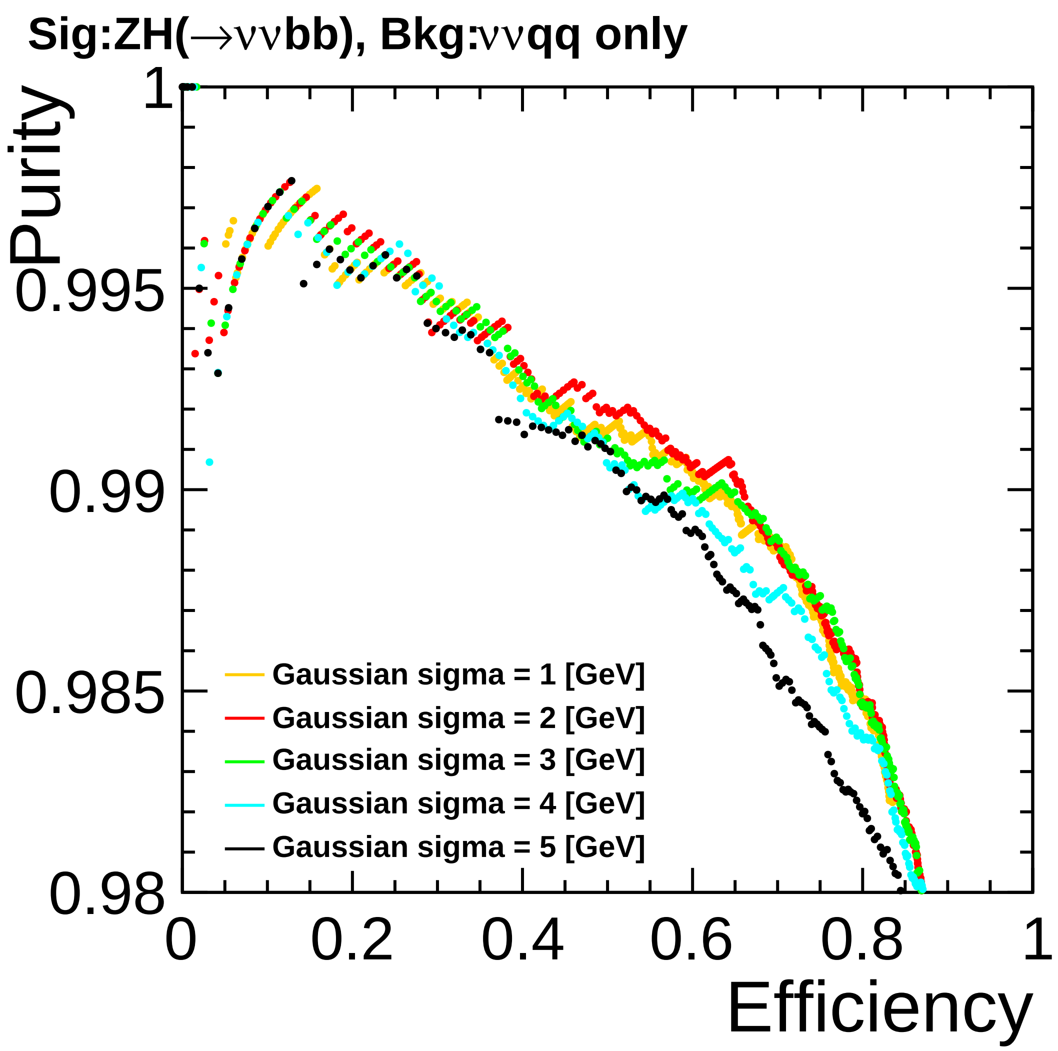


図 8.12: 正規分布の標準偏差が 1GeV から 5GeV まで 1GeV 刻みで見たときの純度と効率

凡そであるが、エネルギーの fit object の幅が 2GeV で純度が最大の選別となる。以下ではエネルギーの fit object 関数の基準を $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)$[GeV] の正規分布として、これと様々な fit object を比較していく。

8.2.2 ジェット角度分解能

ジェット角度分解能はジェットエネルギー分解能に対して固定して良いほど無視できると当初考えていた。しかし、第 6 章で述べた方法で角度分解能を評価したところ、純度がわずかに。以下は当初行っていた角度分解能を $(\sigma_{\theta_1}, \sigma_{\theta_2}, \sigma_{\phi_1}, \sigma_{\phi_2}) = (0.1, 0.1, 0.1, 0.1)$ で固定した場合と第 6 章で述べた方法で評価した場合で純度と効率を比較したプロットである。ただし、エネルギーの fit object 関数を $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 2)[GeV]$ の正規分布とした。

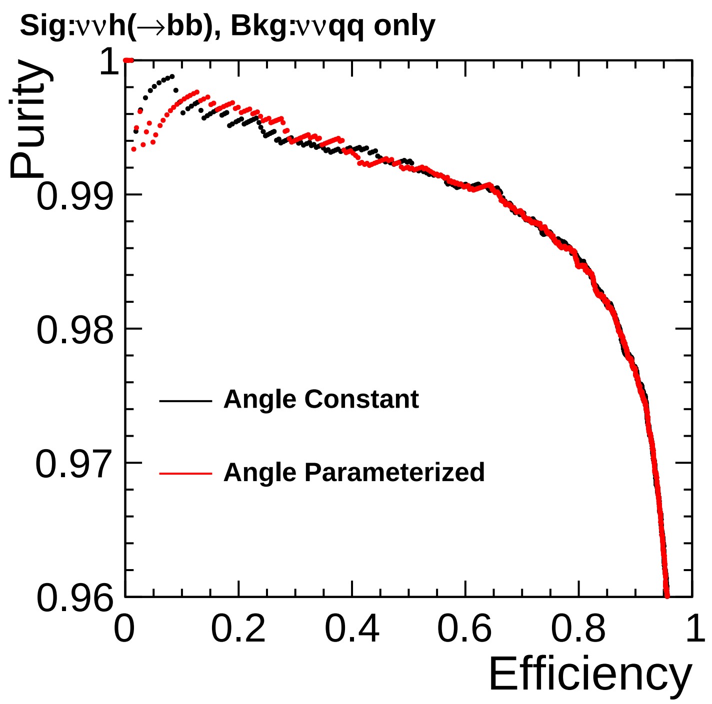


図 8.13: 角度分解能を評価した場合 (赤) と固定した場合 (黒) の純度と効率

これも凡そであるが、第 6 章で述べた方法で角度分解能を評価したほうが良いようである。効率の低いところは、$\chi^2_{Likelihood}$ が切れ上がるため、あまり意味がない。

8.3 ジェットエネルギー分解能

ジェットエネルギー分解能については第 7 章でジェット 1 本あたりのエネルギー分解能を評価することになったが、ジェット 1 とジェット 2 を区別して評価するのか、ジェット 1 とジェット 2 を区別せず評価するかについて本節で調べる。以下に大域的最適化の際の説明に用いた 2 次元プロット、$\chi^2_{Likelihood}$ の分布、純度と効率のプロットを fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別あり)、GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし)、$\sigma_E = 2$[GeV] の正規分布のそれぞれで載せる。ただし、純度と効率のプロットは比較のため 1 つのプロットになっている。なお、2 次元プロットの説明は大域的最適化の節を参照してほしい。(2 次元プロットの白い部分は同様桁落ちである。)

結論を述べると、GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) の方が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別あり) より純度が高く分けられていた。したがって、ヒッグス粒子がブーストされていることによるクラスタリングの効果は大きいと考えられる。また、GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) を用いても $\sigma_E = 2$[GeV] の正規分布よりは悪かった。しかし、$\sigma_E = 2$[GeV] の正規分布は背景の物理がよく分からないので、物理模型の正しさの目安の役割である。

8.3.1 ジェット 1 とジェット 2 を区別して評価

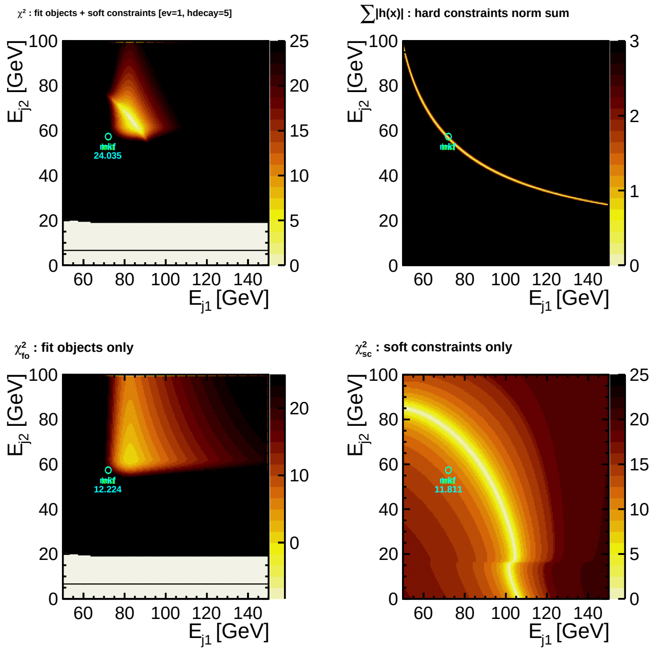


図 8.14: エネルギーの fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別あり) の場合の信号事象の第 1 事象の χ^2 および hard constraint の分布

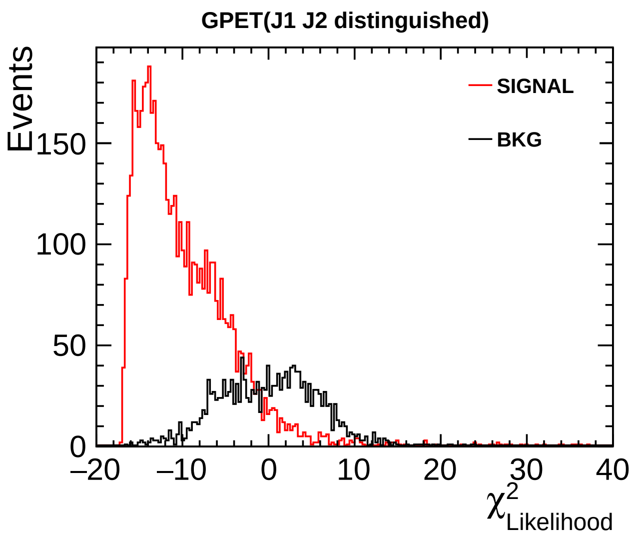


図 8.15: エネルギーの fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別あり) の場合の $\chi^2_{Likelihood}$ の分布

8.3.2 ジェット 1 とジェット 2 を区別せず評価

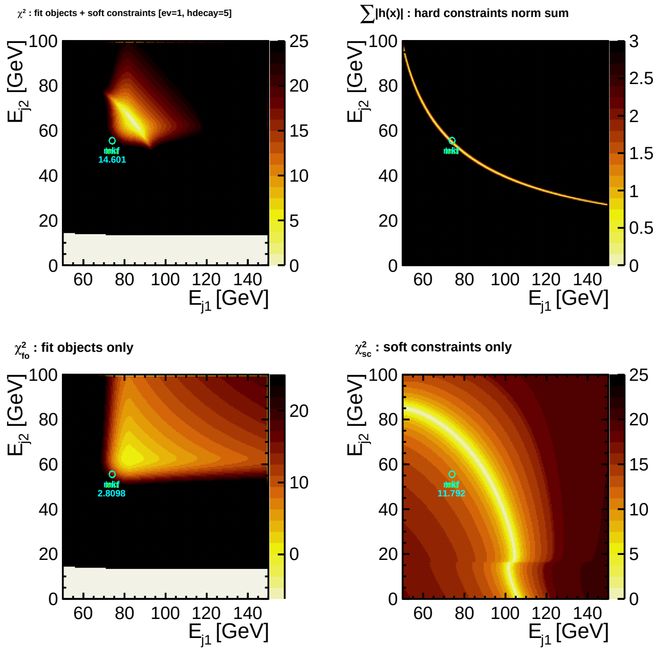


図 8.16: エネルギーの fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) の場合の信号事象の第 1 事象の χ^2 および hard constraint の分布

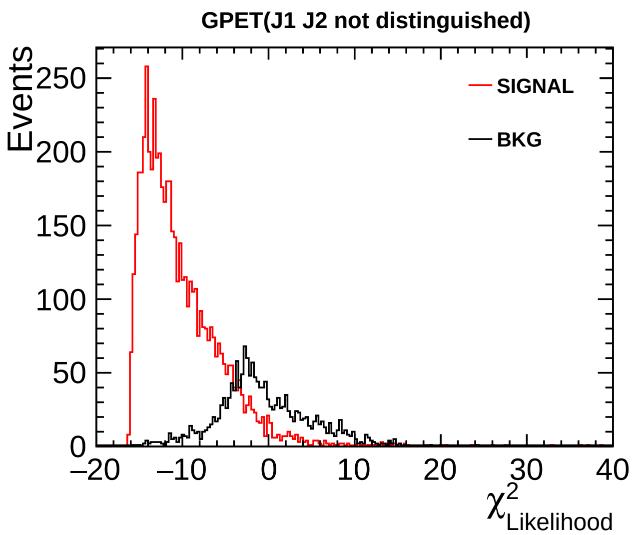


図 8.17: エネルギーの fit object が GPET 関数 (ジェット 1 とジェット 2 のエネルギー区別なし) の場合の $\chi^2_{Likelihood}$ の分布

8.3.3 fit object 関数の評価基準である、$\sigma_E = 2$[GeV] の正規分布

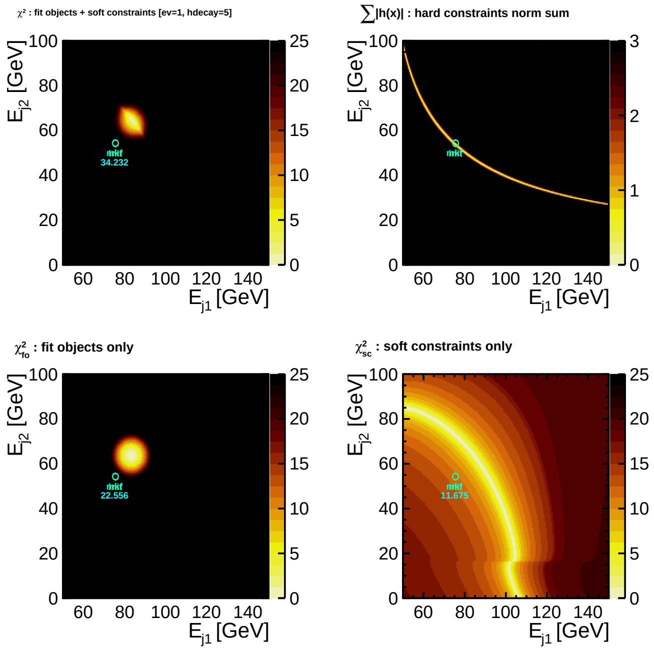


図 8.18: エネルギーの fit object が正規分布 ($\sigma_E = 2$[GeV]) の場合の信号事象の第 1 事象の χ^2 および hard constraint の分布

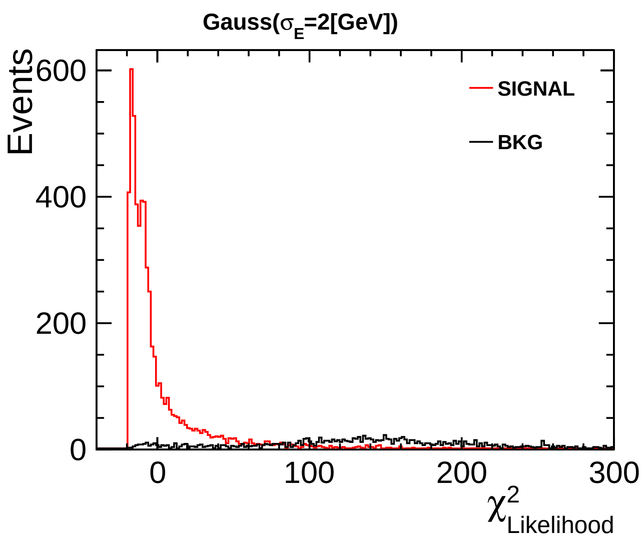


図 8.19: エネルギーの fit object が $\sigma_E = 2$[GeV] の正規分布の場合の $\chi^2_{Likelihood}$ の分布

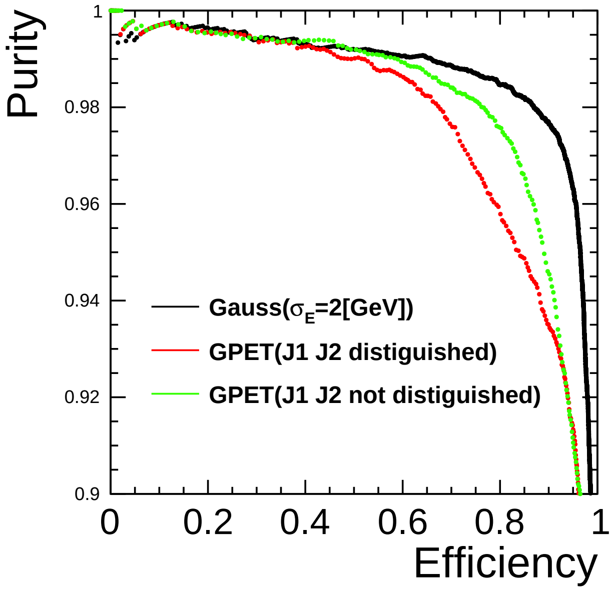


図 8.20: 正規分布 ($\sigma_E = 2$[GeV])、ジェット 1 とジェット 2 を区別して評価した GPET 関数、ジェット 1 とジェット 2 を区別せず評価した GPET 関数による純度と効率

8.4 hard constraint と soft constraint の交点

信号事象では soft constraint と hard constraint は図 8.4 のように 1 点で交わることが望ましい。
しかし、実際には図 8.4 のように交わってしまうことがある。
こうした場合の対処の 1 つとして始状態放射 (Initial State Radiation) の導入が考えられる。ISR は衝突重心系エネルギーを変化させるので、こうした交わる場合を接する場合に補正することが可能であると考えられる。

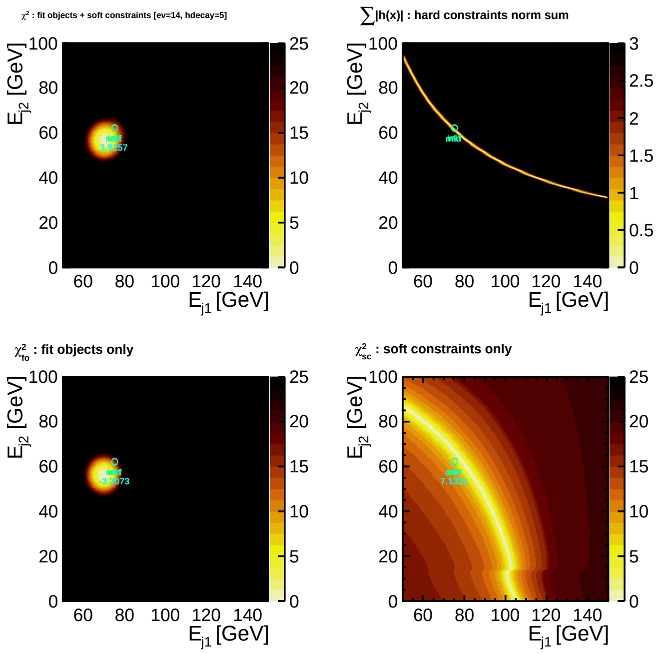


図 8.21: エネルギーの fit object が正規分布 ($\sigma_E = 2$[GeV]) の場合の信号事象の第 14 事象の χ^2 および hard constraint の分布

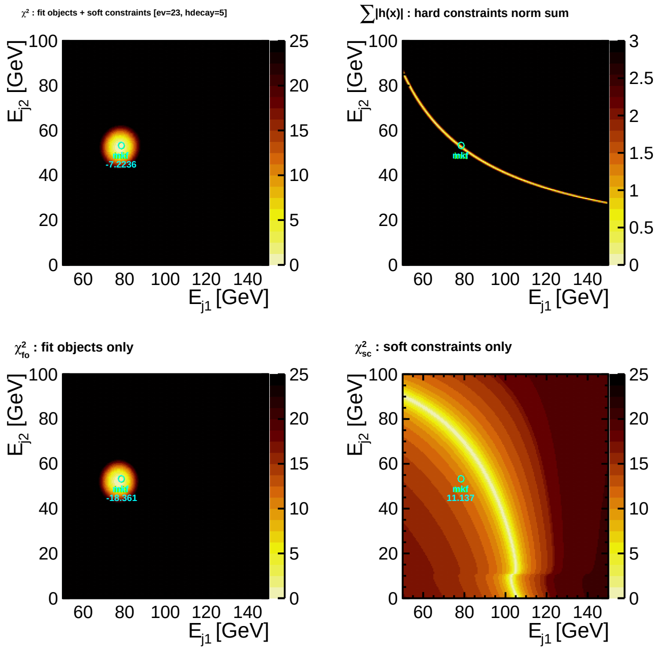


図 8.22: エネルギーの fit object が正規分布 ($\sigma_E = 2$[GeV]) の場合の信号事象の第 23 事象の χ^2 および hard constraint の分布

第 9 章　結果と今後の課題

本研究では、

1. fit object に正規分布以外の関数を想定することができる
2. soft constraint に任意の関数を導入することができる
3. constraint をかけられる対象が限定されない

ことを目標に進めてきた。本研究で実現したことは

1. 尤度を用いて、上記の条件を満たす fitter の定式化を実現した。
2. hard constraint がかかる fitter を開発することができた。
3. fit object および constraint の構成方法を探索し、ジェットエネルギーの真値をハドロン化後の情報を用いて計算したり、頻度論とベイズ論の取り扱いの区別などの統計的な理解が進んだ。

ただし、3 についてはまだ検証が不十分であり、課題としては

- kinematic fit 後に信号事象について真値に真値の推定値が近づいているかの確認をしなければならない。
- 分解能のエネルギーおよび角度依存性を忠実に再現するためにサンプルの点数をもっと増やさなければならない。
- 事象毎に fitter の動作確認をし、バグが残っていないか確認しなければならない。
- イベントディスプレイを作成し、考慮していない物理現象があるか確認しなければならない。

本研究は共同研究として、山下研助教の田辺友彦氏、博士課程学生の加藤悠氏と私の共同研究で進め、それぞれ

梶原 現状の kinematic fit の理解と新しい kinematic fit の数学的定式化およびアルゴリズムの構築、統計学的理解

田辺 kinematic fitter の実装および、動作確認

加藤 ジェットエネルギーおよび角度分解能の評価

を行った。今後は上記の課題に共同で取り組み、MarlinKinfit への実装を果たしたい。

付 録 A　Appendix

以下では第 6 章で用いた事象選択変数の分布を示す。ある条件まで選択が終わった後の次の選択変数の分布を表し、次の選択範囲を赤く着色している。

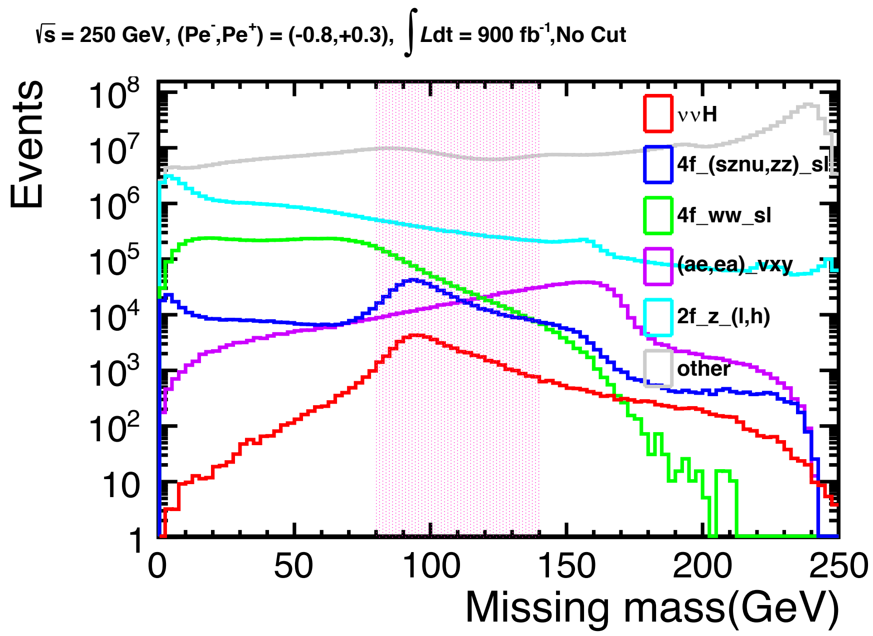


図 A.1: 選択なし

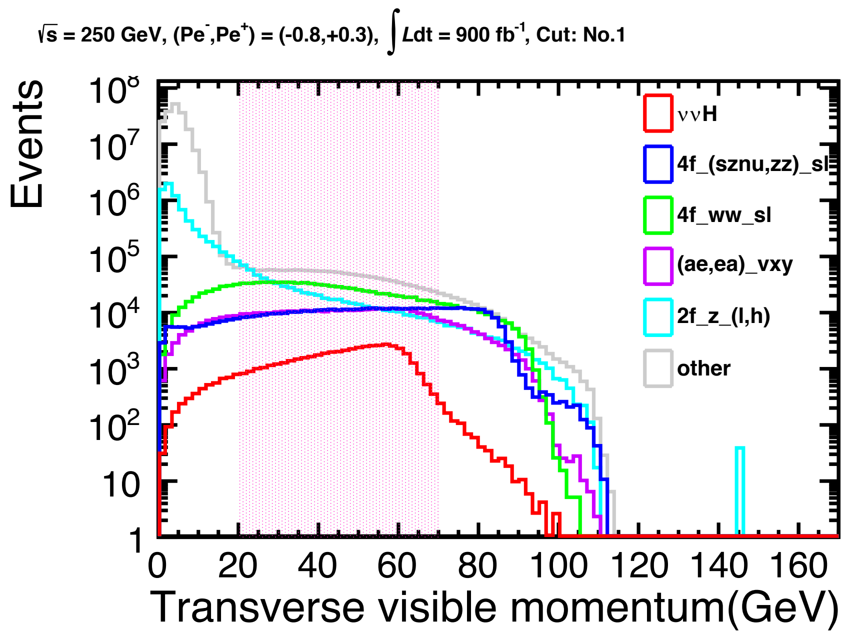


図 A.2: 条件 1 まで

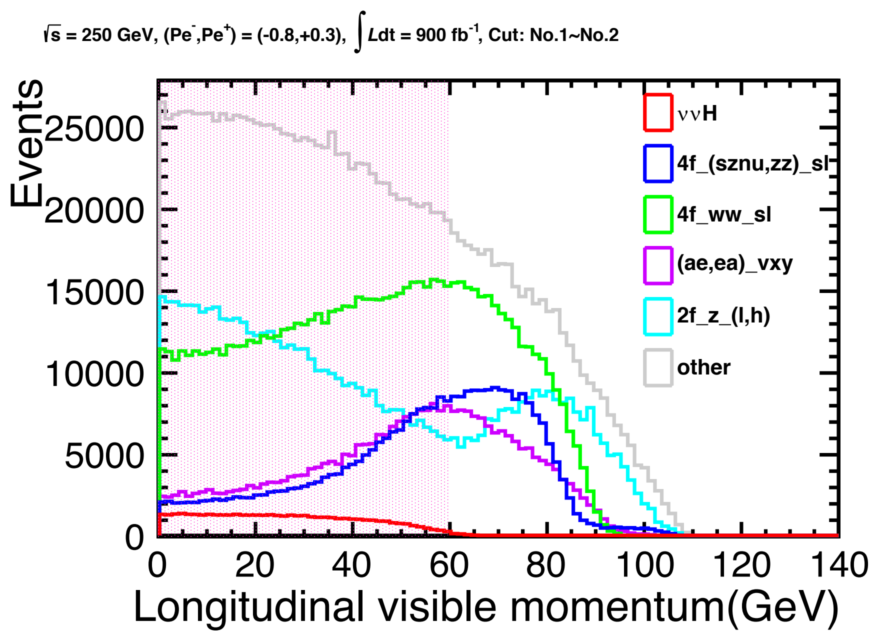


図 A.3: 条件 2 まで

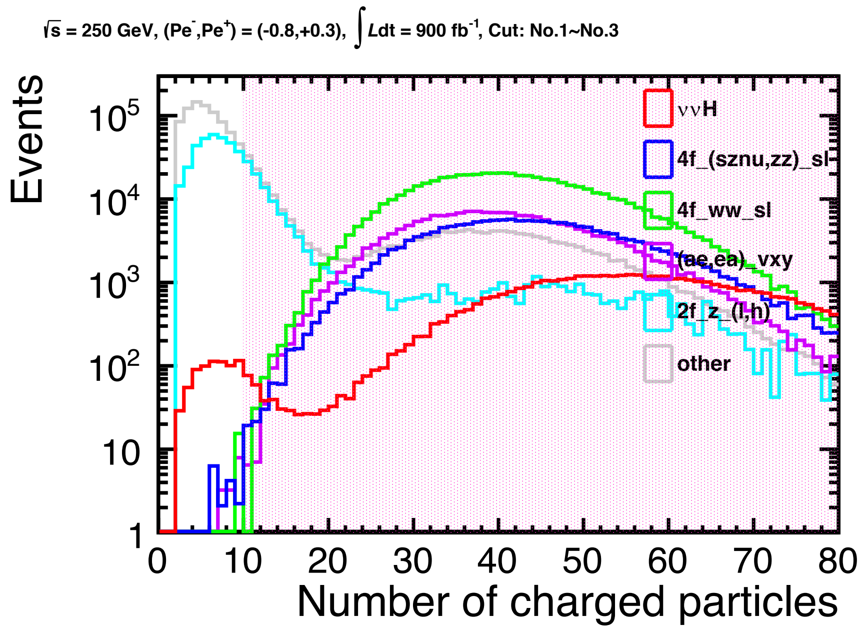


図 A.4: 条件 3 まで

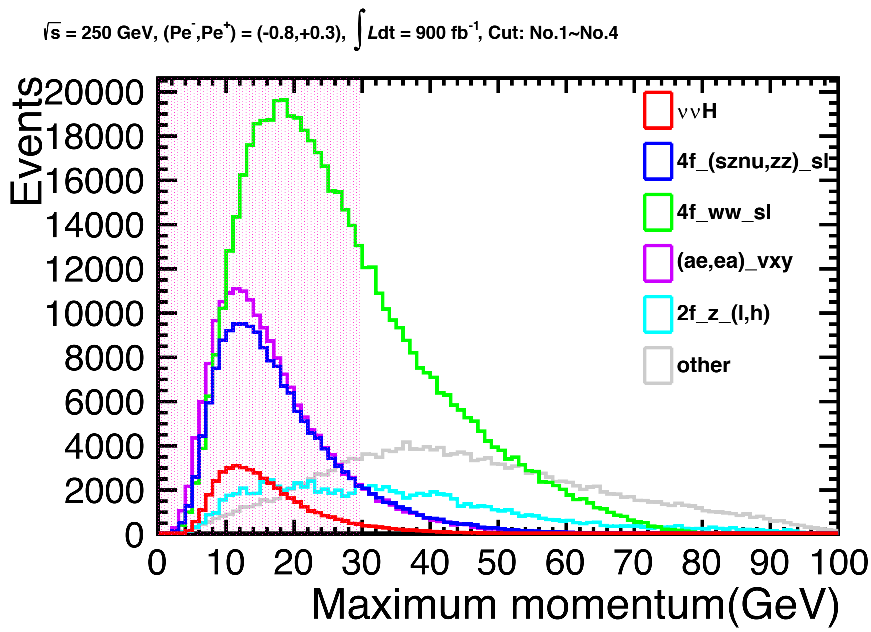


図 A.5: 条件 4 まで

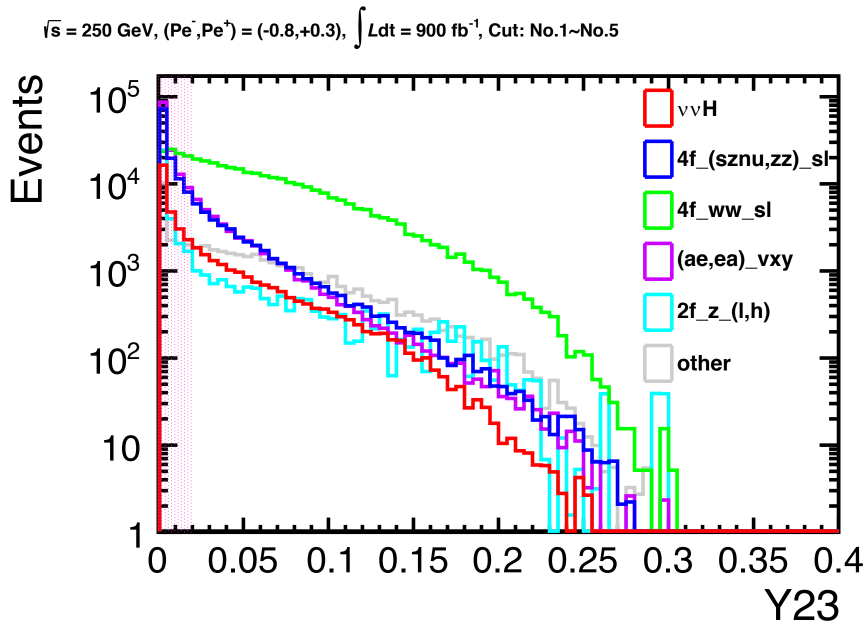


図 A.6: 条件 5 まで

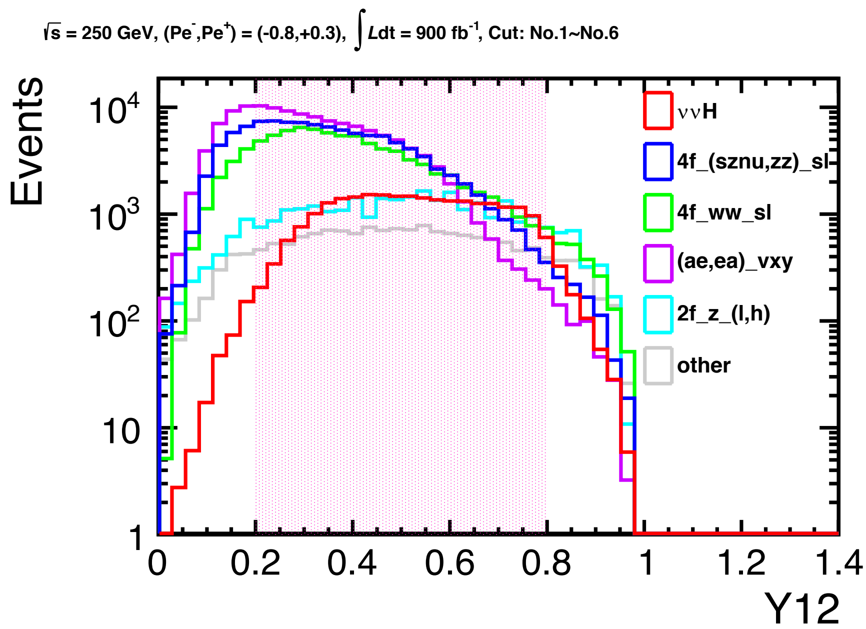


図 A.7: 条件 6 まで

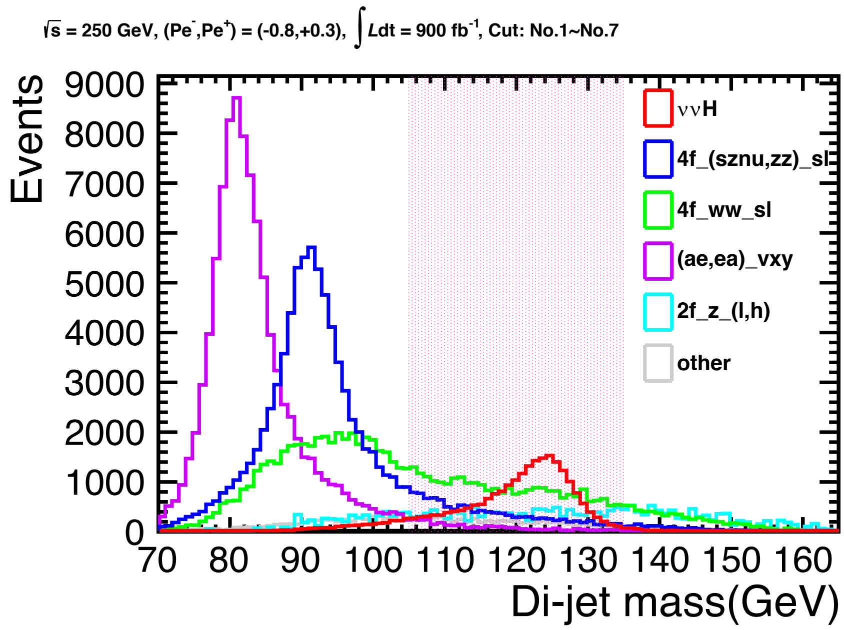


図 A.8: 条件 7 まで

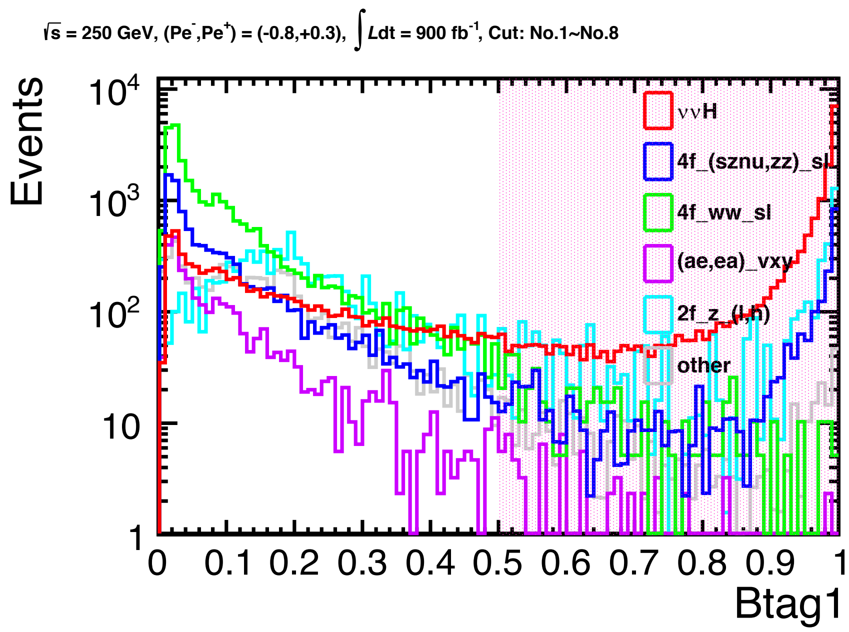


図 A.9: 条件 8(btag1:b クォーク) まで

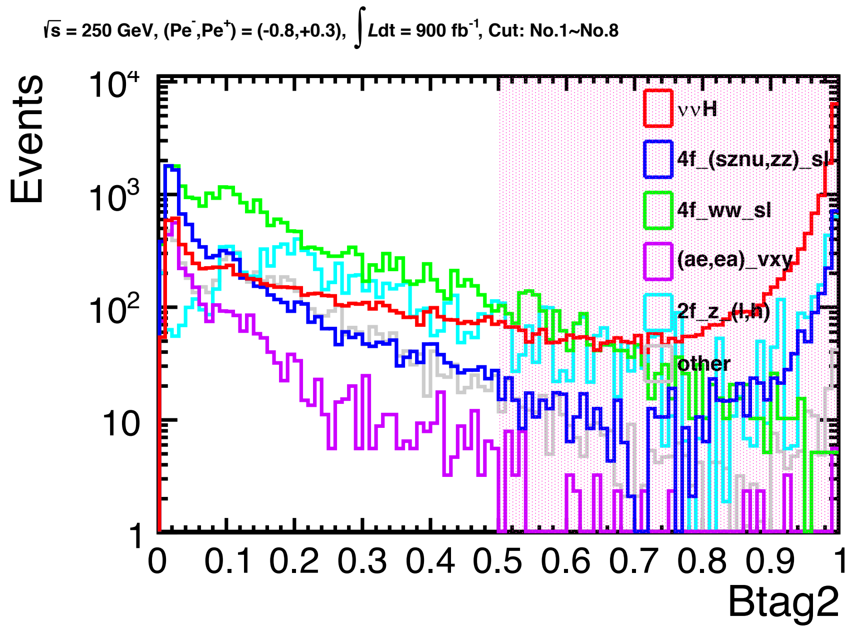


図 A.10: 条件 8(btag2:反 b クォーク) まで

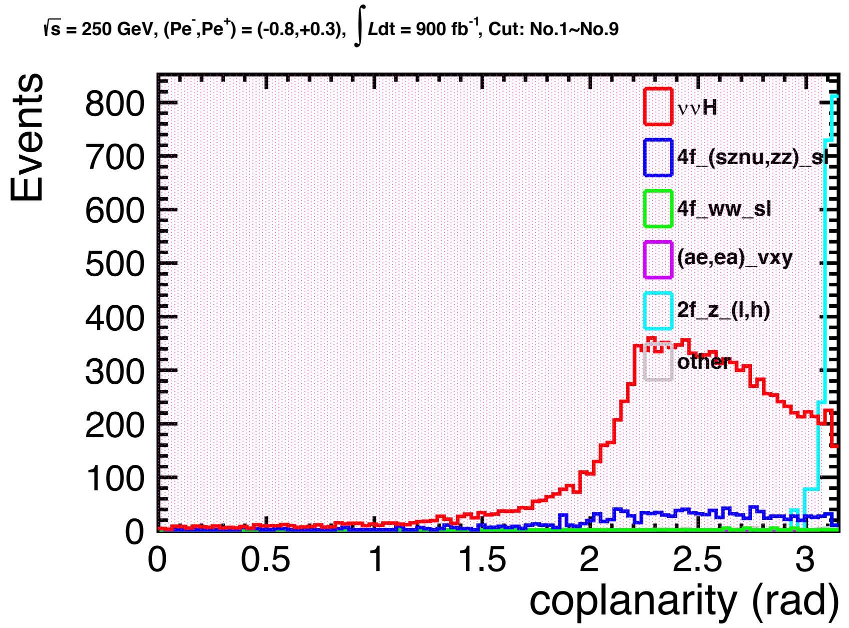


図 A.11: 条件 9 まで

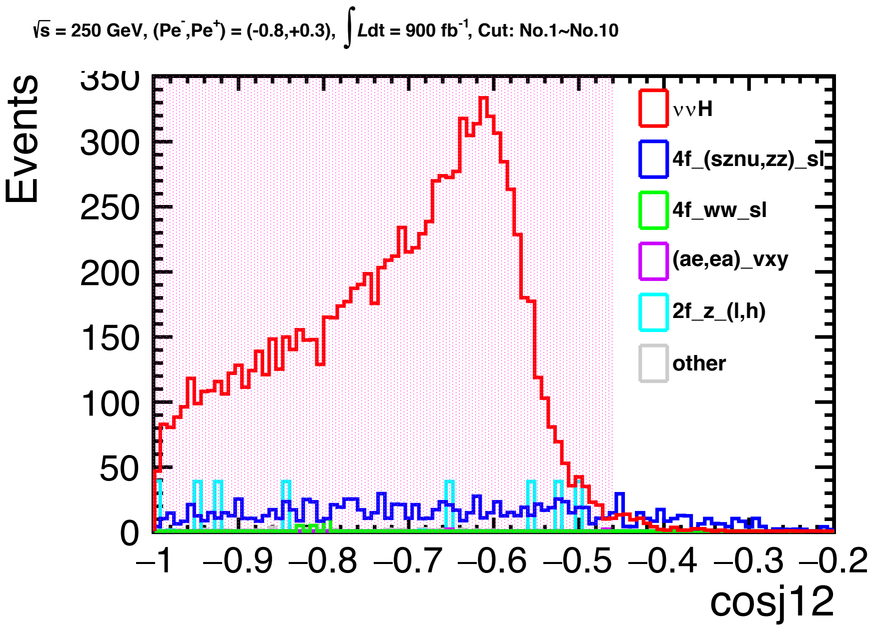

√s = 250 GeV, (Pe-,Pe+) = (-0.8,+0.3), ∫Ldt = 900 fb-1, Cut: No.1~No.10
Events
350
300
250
200
150
100
50
0
−1
−0.9
−0.8
−0.7
−0.6
−0.5
−0.4
−0.3
−0.2
cosj12
ννH
4f_(sznu,zz)_sl
4f_ww_sl
(ae,ea)_vxy
2f_z_(l,h)
other

図 A.12: 条件 10 まで

謝辞

本研究にあたり、田辺友彦特任助教や加藤悠先輩の弛まぬ努力、ご理解、ご指導がありました。今回は加藤悠先輩、藤井一毅先輩と私 3 代の研究でまだ途上ではありますが、新しい kinematic fit の開発の糸口を掴むに至りました。研究にあたっては私のご無理を聞いてくださり、実装と日々のご指導をいただいた田辺助教にまず感謝申し上げます。加藤悠先輩には、ご自身がお忙しい中で、私との議論に何十時間も費やしてくださり、実装の面やで大きく貢献いただきました。山下教授には就活で心が折れそうになっていた時から毎週温かい言葉と正確なご指摘をいただき、私の研究のやる気を大きく高めていただきました。同期の茂木駿紀氏は私の性格など受け止めていただき本当に感謝しております。本研究は国際リニアコライダー実験を対象としたものですが、今後の加速器実験にこの手法が役立てられることを願って止みません。

参考文献

[1] 高エネルギー加速器研究機構.https://www.kek.jp/ja/newsroom/2012/08/31/1800/

[2] 林　青司. 素粒子の標準模型を超えて

[3] the Linear Collider Collaboration. https://ilchome.web.cern.ch/ilc/facts-and-figures

[4] Chris Adolphsen, Maura Barone, Barry Barish, Karsten Buesser, Phil Burrows, John Carwadine et al. The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 3. II: Accelerator Baseline Design

[5] Ties Behnke, James E.Brau, Philip Burrows, Juan Fuster, Michael Peskin, Marcel Stanitzki, Yasuhiro Sugimoto, Sakue Yamada, Hitoshi Yamamoto. The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 4: Detectors

[6] Katsushige Kotera, Daniel Jeans, Akiya Miyamoto, Tohrru Takeshita: A novel strip energy splitting algorithm for the fine granular readout of a scintillator strip electromagnetic calorimeter.http://inspirehep.net/record/1297051

[7] Daniel Schulte. Beam-Beam Effects in Linear Colliders, ICFA Beam Dyn.Newslett. 69 (2016) 237-245

[8] Summary plots from the ATLAS Higgs physics group.https://atlas.web.cern.ch/Atlas/GROUPS/PHYSICS/CombinedSummaryPlots/HIGGS/

[9] Jorge Nocedal and Stephen J. Wright. Numerical Optimization

[10] O. Behnke, K. Kröninger, G. Schott and T. Schörner-Sadenius. Data Analysis in High Energy Physics

[11] Stefano Moretti, Leif Lönnblad, Torbjörn Sjöstrand. New and Old Jet Clustering Algorithms for Electron-Positron Events

[12] F. Halzen, Alan D. Martin. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics

[13] Mark Thomson. Modern Particle Physics

[14] Taikan Suehara, Tomohiko Tanabe. LCFIPlus: A Framework for Jet Analysis in Linear Collider Studies

[15] GNU Scientific Library (GSL) 2.6 documentation. `https://www.gnu.org/software/gsl/doc/html/index.html`

[16] iLCSoft. `https://github.com/iLCSoft`

[17] Benno List and Jenny List. MarlinKinfit. `https://github.com/iLCSoft/MarlinKinfit`

[18] Uli Einhaus, Uwe Krämer, Paul Malek. Studies on Particle Identification with dE/dx for the ILD TPC

[19] J. S. Marshall, M. A. Thomson. Pandora Particle Flow Algorithm

[20] `http://techtipshoge.blogspot.com/2016/07/blog-post.html`

[21] Shin-ichi Kawada, Keisuke Fujii, Taikan Suehara, Tohru Takahashi, Tomohiko Tanabe. A study of the measurement precision of the Higgs boson decaying into tau pairs at the ILC

[22] DBD samples`https://ilcsoft.desy.de/dbd/generated/`

[23] Ono Hiroaki, Akiya Miyamoto. A study of measurement precision of the Higgs boson branching ratios at the International Linear Collider. EPJ C73 (2013) no.3, 2343

[24] Masao Kuriki. ILC Accelerator Overview. ILC summer camp 2019. `https://agenda.linearcollider.org/event/8237/contributions/44011/attachments/34672/53509/ILCSS2019.pdf`