修士学位論文

低速中性子散乱を用いた未知短距離力の探索

東京大学大学院 理学系研究科物理学専攻
駒宮研究室

笹山 悦宏

2016 年 1 月 5 日

概要

低速中性子とキセノン原子気体との散乱角度分布を精密に測定し、既知の散乱過程による散乱角度分布からの差を評価することで、湯川型ポテンシャルを持つ未知短距離力の探索を行った。2014 年には冷中性子ビームラインを用いて約 10^7 個の散乱イベントを測定し、0.04 nm から 4 nm の到達距離を持つ湯川型散乱ポテンシャルに対して世界最高の実験感度が得られた。本研究ではこの測定結果を用いて、周囲の環境の物質密度によってその実効質量を変える性質を持つカメレオンと呼ばれる粒子について実験からの制限を設けた。また、カメレオン場は、その非線形性のため宇宙論的観測からその影響を評価することが難しい。本研究ではカメレオン場の従う運動方程式が線形と近似できる条件を求め、その条件の下で理論パラメータに対して制限を求めた。また、中性子ビーム集束用レンズを用いることで、より小さい散乱角に対する感度を高めることを考えた。1nm〜10nm の到達距離持つ湯川ポテンシャルに対して、探索感度の最適化並びにモンテカルロ法を用いたシミュレーションを行い、実験系の最適化後に期待される到達感度を求めた。

目 次

概要 **2**

1 序論 **5**
1.1 背景 5
1.2 本論文の構成 7

2 実験について **8**
2.1 実験のセットアップ 8
2.2 中性子と原子の散乱様式 9
2.2.1 等方散乱項 10
2.2.2 n-e 散乱項 10
2.2.3 Yukawa 散乱項 11
2.2.4 湯川ポテンシャルの影響を含めた形での散乱 11
2.2.5 実験系の影響を含めた形での散乱 12
2.3 実験結果の解析手法 16
2.3.1 推定するパラメータ 16
2.3.2 ビンデータを用いた最尤推定法 17

3 カメレオン粒子の探索 **19**
3.1 カメレオン機構 19
3.2 カメレオン場の従う方程式とカメレオンの質量 19
3.3 運動方程式の線形化とその解 21
3.4 pseudo-linear regime 25
3.5 得られた制限 27
3.6 カメレオンの線形化に関しての議論 35

4 到達感度の改善 **37**
4.1 感度の改善の際の問題点 37
4.2 コリメータの変更 40
4.2.1 飛来中性子数の最大化 40
4.2.2 到達感度 42
4.3 レンズの利用 44
4.3.1 中性子集束用のレンズ 44
4.3.2 飛来中性子数の最大化 46
4.3.3 時間の延長 49

5　まとめ **51**

付録**A (2.4)** における近似について **52**

付録**B (3.18)** の近似について **54**

参考文献 **56**

謝辞 **58**

1 序論

1.1 背景

現在、素粒子標準理論を越える物理が予言する、未知の短距離力についての研究が広く行われている。この短距離力として、質量やバリオン数をチャージとするものが考えられている。これらの力は、短距離での重力法則の修正によって生じると考えられていたり、今までに発見されている 4 つの力とは異なる第 5 の力によるものであると考えられている。包括的な議論は [1],[2] を参照されたい。

未知相互作用の最も典型的なポテンシャルは湯川型であり、次のような形をしている。

$$V_{\rm yukawa}(r) = -g^2 \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r} \tag{1.1}$$

g^2 は結合定数 (の 2 乗)、m は未知短距離力を媒介するボソンの質量であり、Q_1, Q_2 はこの力に対するチャージを表している。チャージとして質量やバリオン数だけでなく、バリオン数とレプトン数の差などが考えられることもある。

チャージを質量に固定したときに、その到達距離 $\bar{\lambda} = \frac{1}{m}$ と結合の強さ g^2 に実験から制限が設けられている。現在課されている制限を [図 1.1] に示した。なお、この図では 95% 信頼区間での排除領域が網掛け部分になっている。ねじり秤などを用いた巨視的手法による実験と [3]〜[6]、中性子と物質の散乱を利用した微視的手法による実験 [10],[11],[12] によって制限が設けられており、この手法の違いによって、$\bar{\lambda} = 10{\rm nm}$ の左右で制限の線の傾きに差が出ている。多くの実験が過去 10 年以内に行われており、現在も精力的に探索が進められている。

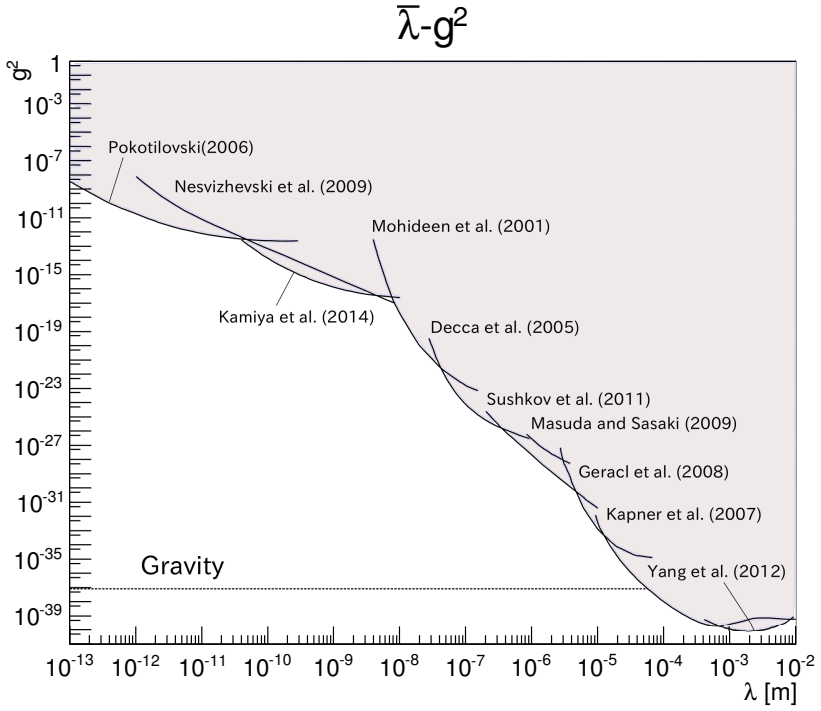

図 1.1: 現在設けられている制限

m_1 を test mass としたとき、湯川ポテンシャル (1.1) によって生じる力による加速度は次のようになる。

$$\boldsymbol{a_1} = -\frac{\nabla V_{\text{yukawa}}}{m_1} = g^2 \frac{Q_1}{m_1}\frac{Q_2}{4\pi}\nabla\frac{e^{-mr}}{r} \tag{1.2}$$

これより、チャージとして質量を考えた場合、$r < \bar{\lambda}$ において、(1.2) が重力の逆二乗則からのズレとして現れることになる。従って、$r_1 < \bar{\lambda} < r_2$ となる 2 点で、1 つの物質に対して (1.2) を測定することで重力の逆二乗則の破れを調べることができる。重力の逆二乗則の破れは余剰次元の存在によってもたらされるものであり、余剰次元の存在によって、余剰次元内でのプランク質量が $M_{pl} \sim 10^{16}$TeV から TeV 程度のスケールに変更されるとする議論もある。逆二乗側の破れに関する研究が、余剰次元の存在や階層性問題の解決の鍵になるかもしれない。また、比 $\dfrac{Q_1}{m_1}$ が物質によって異なるものであると、物質によって加速度が異なることになるため等価原理が破られることになる。従って、$r < \bar{\lambda} = \dfrac{1}{m}$ となる点で、2

種類の物質に対して (1.2) を測定することで等価原理の破れを調べることができる。

未知短距離力をもたらす粒子の候補として、カメレオンと呼ばれる粒子が議論されている。カメレオン場は周囲の環境の密度によってその真空期待値を変え、実効質量を変化させる性質を持っている。また、カメレオン場の従う方程式が非線形であるとき、物体の表面 $\frac{1}{m}$ 程度の部分しか物体の外部の力に寄与しなくなる shell effect と呼ばれる効果が生じる。この効果のためにカメレオンによって生じる力が抑制されてしまうので宇宙論的観測からの制限が付けられていない。カメレオンは、暗黒エネルギーとの関係が議論されていることや [13],[14]、実験からの議論も行われるようになったことから [2],[15]、最近特に注目されている。

1.2 本論文の構成

このような背景の下、本研究では、2014 年に行われた実験データ [12] を用いて、カメレオン場のパラメータに対して制限を設けることを主な目的とする。第 2 章で上記の実験の詳細を示し、解析手法についても述べる。第 3 章でカメレオン場について述べる。ある条件の下でカメレオン場を湯川型ポテンシャルとして近似できることを示し、その条件の下で理論パラメータに対して制限を求める。第 4 章では探索領域を広げるために中性子ビーム集束用レンズを用いた実験設計について議論する。第 5 章で本論文をまとめる。

2　実験について

2.1　実験のセットアップ

2014 年に韓国の原子炉 HANARO にある 40 m の中性子ビームラインを用いて中性子と Xe の散乱実験が行われた。実験装置の概念図を下に示す [図 2.1]。

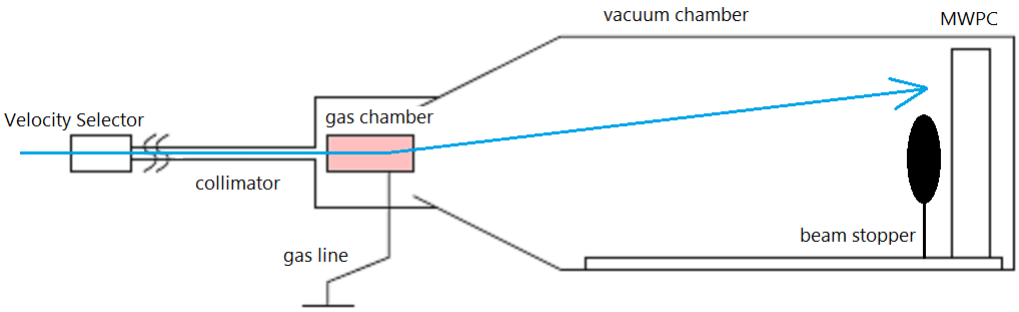

図 2.1: 実験セットアップの概念図

原子炉から引出された低速中性子はドラム回転型のヘリカル波長選別器によって、$\lambda = 5$ Å の波長を持ったビームに単色化される。波長幅 $\Delta\lambda$ は半値全幅で 12% 程である。入射するビームの強度は単色化後に He^3 検出器によって測定される。その後、焼結 B^4C を用いた内径 22 mm のコリメータにより、3 mrad 以下の発散角を持った平行ビームを形成する。コリメータの半径を調整することで、中性子ビームのサイズと強度が調節できるようになっている。ビームラインの中は真空になっており、Xe ガスを封入したサンプル容器を設置する。このサンプル容器に中性子ビームを照射し、散乱した中性子を 3.1 m 下流に置いた二次元位置検出器で観測する。検出器は 5.1 mm のワイヤー間隔の多線式比例係数管を 3 層 (Multi-Wire Provisional Chamber) を用いている。検出器の前面にはビームストッパが設置されており、散乱を経ず直接検出器に向かってくるような中性子はここで止められる。

下表に、主要な実験パラメータをまとめた。

表 2.1: 実験パラメータ

ビーム波長	$\lambda = 5$ Å
ガス容器長さ	250 mm
ガス容器直径	130 mm
Xe ガス圧力	2 atm
Xe ガス温度	293 K
真空チャンバー圧力	~ 0.1 Pa
ガス容器から検出器までの距離 L	3.1 m
コリメータセクションの長さ l	7.8 m
MWPC の検出効率	80%
ビームストッパの直径	75 mm

2.2 中性子と原子の散乱様式

中性子とキセノンの作るポテンシャル V の散乱を考える。このとき、散乱振幅 f はボルン近似を用いて計算することができ、中性子とキセノンの散乱様式を i として表すと散乱振幅は次のようになる。ただし、m_n は中性子の質量、$\boldsymbol{q}$ は運動量移行である。

$$f = \sum_i f_i = -\sum_i \frac{m_n}{2\pi} V_i(\boldsymbol{q}) = -\sum_i \frac{m_n}{2\pi} \int exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) V_i(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} \tag{2.1}$$

ここで、1 つの原子核の位置を $\boldsymbol{R}$ として表したときに、

$$f = \sum_i f_i = -\sum_i b_i exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}) \tag{2.2}$$

と書くことができ、このときの係数 b_i を散乱長と呼ぶ。
スピン平均を $\langle\ \rangle$ と書くとき、微分散乱断面積は以下のように書くことができる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left\langle \left| f \right|^2 \right\rangle = \left\langle \left| b \right|^2 \right\rangle \tag{2.3}$$

中性子とキセノンの散乱長 $b(\boldsymbol{q})$ は、スピン依存性によって以下のように分類することができる [16]。

$$b(\boldsymbol{q}) \ = \ b_c(\boldsymbol{q}) + [I(I+1)]^{-1/2} \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{I} + i b_s(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{2.4}$$

ここで、$b_c(\boldsymbol{q})$ は coherent 散乱の散乱長、$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{q})$ は incoherent 散乱の散乱長テンソル、$b_s(\boldsymbol{q})$ は Schwinger 散乱の散乱長と呼ばれ、$\boldsymbol{I}$ は原子核のスピン、$\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は中性子のスピン、$\hat{\boldsymbol{n}}$ は散乱平面の単位法線である。

$\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{q}) \sim 10^{-3}$ fm, $b_s(\boldsymbol{q}) \sim 10^{-1}$ fm であり、これらは $b_c(\boldsymbol{q}) \sim 5$ fm より十分小さく無視できる [16],[17]。これは付録 A にて詳しく述べる

したがって、既知の散乱過程による散乱長は以下のようになる。

$$b(\boldsymbol{q}) \approx b_c(\boldsymbol{q}) = (b_{N_c} + b_{N_P}) - (b_F + b_I)Z[1 - f(\boldsymbol{q})] \tag{2.5}$$

1 つめの括弧に囲われた項を等方散乱項、後ろの項を n-e 散乱項と呼ぶ。湯川ポテンシャルによる影響を考慮する場合は、ここにさらに湯川ポテンシャルによる散乱長を付け加えればよい。ここで、各項についての説明を以下に述べる。

2.2.1 等方散乱項

b_{N_c} は、中性子と原子核の強い相互作用のうちスピン依存性を持たない相互作用による散乱長であり、現象論的に決定される。
b_{N_P} は、中性子の電気双極子モーメントと原子中の電場の相互作用による散乱長であり、次のように表される。

$$b_{N_P} = -\sqrt{\frac{3}{\pi}} \left(\frac{m_n}{m_e}\right) \frac{\alpha Z^2}{a_0 r_{nuc}}$$

ただしここで、キセノンを標的と考えると、原子番号 $Z = 54$、ボーア半径 $a_0 = 0.529$ Å、中性子の電気分極率 $\alpha = (12.5 \pm 1.7) \times 10^{-4}$ fm^3、原子核半径 $r_{nuc} = 6.09$ fm であり、ここでは $(b_{N_c} + b_{N_P}) = 4.69$ fm となる。

2.2.2 n-e 散乱項

b_F は中性子の磁気双極子モーメントと原子の電荷密度とのスピンに依存しない相互作用による散乱長である。Foldy 散乱長と呼ばれ、次のように表される。

$$b_F = \frac{1}{2}\gamma \frac{m_e}{m_n} r_e = -1.47 \times 10^{-3} \text{ fm}$$

ただし、中性子の磁気双極子モーメント $\gamma = 1.913$。

b_I は中性子の電荷分布と電子の相互作用による散乱長である。intrinsic neutron-electron scattering length と呼ばれ、次のように表される。

$$b_I = \frac{1}{3} \left(\frac{m_n}{m_e}\right) \frac{\langle r_n^2 \rangle}{a_0} = -1.34 \times 10^{-3} \text{ fm}$$

$\langle r_n^2 \rangle$ は中性子の平均二乗電荷半径である。

b_F は 5 桁ほどの精度で測定されていて、$b_F + b_I$ の誤差はほとんどが b_I の誤差によるものとなっている [16]。b_I の誤差は中性子の平均二乗電荷半径の誤差から生じており、本研究では $\langle r_n^2 \rangle = -0.1161 \pm 0.0022\text{fm}^2$ を用いる [18]。

また、

$$f(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3(\frac{q}{q_0})^2}} \tag{2.6}$$

は atomic form factor で、電子による原子核の電荷の遮蔽の効果を表している。また、Xe に対しては $q_0 = 1.832Z^{1/3}$ である。

2.2.3 Yukawa 散乱項

湯川ポテンシャル 1.1 と中性子の相互作用による散乱長である。本研究では、湯川型の散乱ポテンシャルを持つものを扱っており、未知の力による寄与によってこの項が生じる。散乱長は以下のようになる。

$$\begin{aligned} b_y(\boldsymbol{q}) = f_y(\boldsymbol{q}) &= -\frac{m_n}{2\pi} \int exp(i\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}) V_{\text{yukawa}}(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} \\ &= \frac{m_n}{2\pi} g^2 Q_1 Q_2 \frac{1}{m_c^2 + q^2} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ここで、m_c はこの力を媒介するボソンの質量を、Q_1, Q_2 はチャージを表している。

2.2.4 湯川ポテンシャルの影響を含めた形での散乱

上で述べたように、湯川ポテンシャルによる影響を考慮する場合は既知の散乱長に湯川ポテンシャルによる散乱長を加えたものを考えればよく、それは以下のようになる。

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{q}) &= (b_{N_c} + b_P) - (b_F + b_I) Z[1 - f(\boldsymbol{q})] + \frac{m_n}{2\pi} g^2 Q_1 Q_2 \frac{1}{m_c^2 + q^2} \\ &= (b_{N_c} + b_P) \left\{ 1 + \chi[1 - f(\boldsymbol{q})] + \frac{\chi_y}{1 + (\frac{q}{m_c})^2} \right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \chi &= -\frac{b_F + b_I}{b_{N_c} + b_P} Z \\ \chi_y &= \frac{m_n}{2\pi} g^2 Q_1 Q_2 \frac{1}{(b_{N_c} + b_P) m_c^2} \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで、$\chi \sim 3 \times 10^{-2} \ll 1,\ \chi_y \sim 2 \times 10^{-2} \ll 1$、ただし χ_y は、$Q_1 Q_2 = 131,\ 1/m_c = 10^{-8}$ m, $g^2 \sim 10^{-17}$ に対しての値である。

これにより、湯川ポテンシャルの影響を考慮した際の微分散乱断面積は、χ, χ_y の 2 次以上の項を無視することで次のようになる。

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| b(\boldsymbol{q}) \right|^2 \approx (b_{N_c} + b_P)^2 \left\{ 1 + 2\chi[1 - f(\boldsymbol{q})] + 2\frac{\chi_y}{1 + (\frac{q}{m_c})^2} \right\} \tag{2.10}$$

以下では、1 項目を等方散乱項、2 項目を ne 散乱項、3 項目を Yukawa 散乱項と呼ぶことにする。散乱角度分布で書き直すと次のようになる。θ は検出器上でのビームからの角度表している。

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = 2\pi \sin\theta (b_{N_c} + b_P)^2 \left\{ 1 + 2\chi[1 - f(\boldsymbol{q})] + 2\frac{\chi_y}{1 + (\frac{q}{m_c})^2} \right\} \tag{2.11}$$

ビームからの距離 r による分布で書き直すと次のようになる。

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{\cos^2\theta}{L} \frac{d\sigma}{d\theta} \tag{2.12}$$

2.2.5 実験系の影響を含めた形での散乱

ここで、実験で測定されると期待される散乱角度分布 $\frac{d\tilde{N}}{d\theta}$ は、微分散乱断面積 (2.10) から導かれる散乱角度分布とは異なるものであり、(2.10) に、標的となる Xe 原子の熱運動 (T=293K) の効果や、標的 Xe ガスの入った容器の大きさ、中性子ビーム系の影響を取り入れることで導くことができる。(これらの効果を取り入れた物理量は、以下では ˜ をつけて表す。)

モンテカルロ法を用いてこれらの効果を取り入れた時の確率密度関数 $h(\theta)$ の計算を行った。$h(\theta) \propto \frac{d\tilde{N}}{d\theta}$ となっていて、$h(\theta)$ はアクセプタンスの全範囲で積分して 1 になるように規格化されている。等方散乱、n-e 散

乱、Yukawa 散乱による確率密度関数をそれぞれ h_{iso}、h_{ne}、h_{yu} と書くことにする。

Xe の熱運動が、T=293K での Maxwell-Boltzmann 分布に従うとしたときの、各散乱様式での確率密度関数を以下に示す。[図 2.2, 図 2.3, 図 2.4, 図 2.5] は L=10m での図を用いている。また、それぞれの図において、θ=0.048[rad] 付近から値が小さくなっていくが、これは検出器の大きさが有限であるためである。

等方散乱

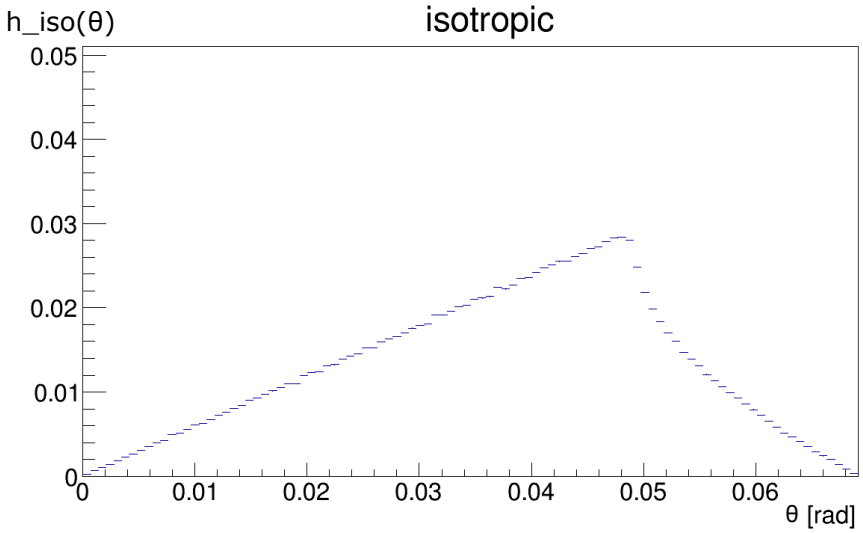

図 2.2: 等方散乱の散乱角度分布 $h_{\mathrm{iso}}(\theta)$

ne 散乱

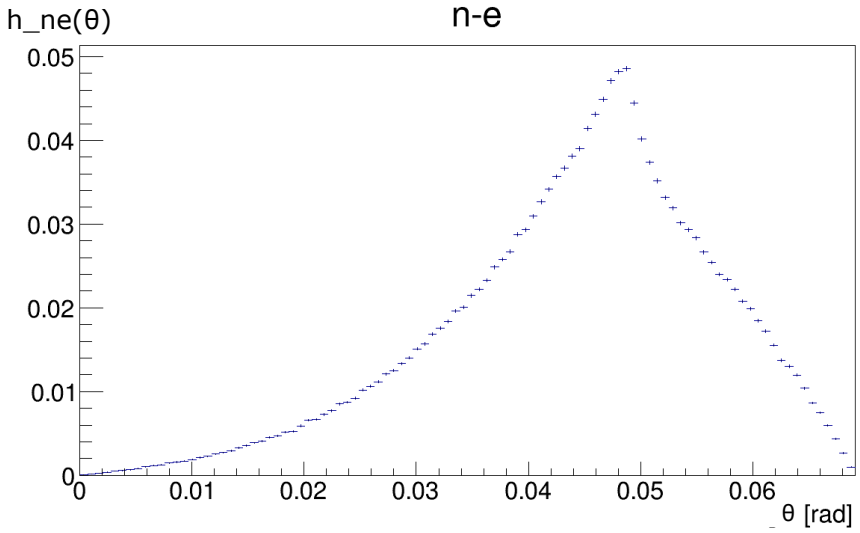

図 2.3: n-e 散乱の散乱角度分布 $h_{\mathrm{ne}}(\theta)$

Yukawa 散乱

媒介粒子の質量が小さければ小さいほど、小角度でピークが立つようになる。以下では $\bar{\lambda} = \frac{1}{m} = 1 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ と $\bar{\lambda} = 9 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ についての図を載せる。

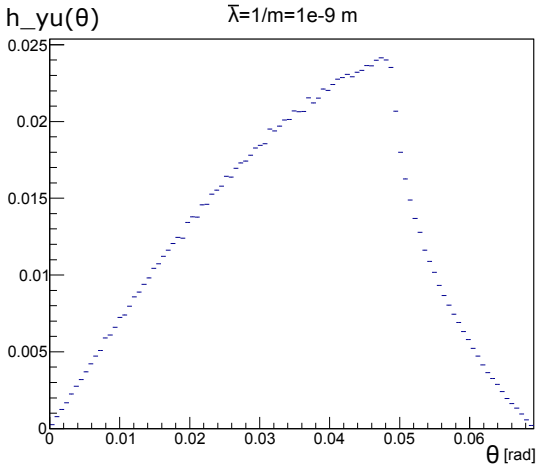

図 2.4: $\bar{\lambda} = 1 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ での湯川散乱の散乱角度分布 $h_{\mathrm{yu}}(\theta)$

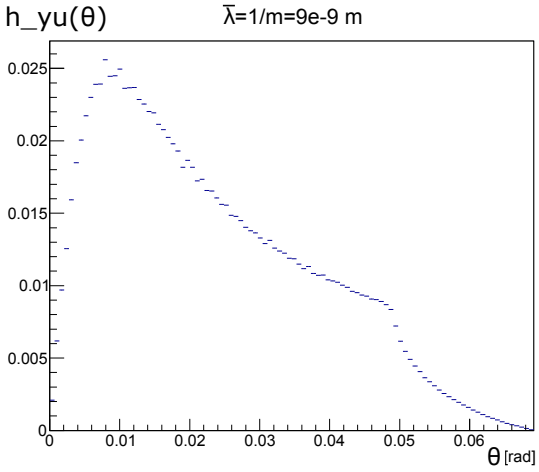

図 2.5: $\bar{\lambda} = 9 \times 10^{-9}\mathrm{m}$ での湯川散乱の散乱角度分布 $h_{\mathrm{yu}}(\theta)$

2.3 実験結果の解析手法

2.3.1 推定するパラメータ

測定結果から得られる確率密度関数 $h_{\rm exp}$ は、先述の $h_{\rm iso}$、$h_{\rm ne}$、$h_{\rm yu}$ を用いて次のように書くことができる。

$$h_{exp} = (1-b)[(1-a)h_{\rm iso} + ah_{\rm ne}] + bh_{\rm yu} \tag{2.13}$$

等方散乱項と ne 散乱項の散乱角度分布への寄与は $1-a:a$ であり、既知の散乱項と未知力の散乱項の散乱角度分布への寄与は $1-b:b$ である。a は検出器のアクセプタンスが決まると 1 つに定めることができる。従って、実験結果から係数 b を推定して湯川ポテンシャルのパラメータの制限を求めることになる。

ここで、各散乱様式での全断面積をそれぞれ $\sigma_{iso}, \sigma_{ne}, \sigma_{yukawa}$、検出器の作る立体角を $\Omega_{\rm acceptance}$ と表し、x,y,z を次のように定める。

$$x = \frac{\int d\Omega_{acceptance} \dfrac{d\tilde{\sigma}_{\rm iso}}{d\Omega}}{\sigma_{\rm iso}} \tag{2.14}$$

$$y = \frac{\int d\Omega_{acceptance} \dfrac{d\tilde{\sigma}_{\rm ne}}{d\Omega}}{\sigma_{\rm ne}} \tag{2.15}$$

$$z = \frac{\int d\Omega_{acceptance} \dfrac{d\tilde{\sigma}_{\rm yu}}{d\Omega}}{\sigma_{\rm yu}} \tag{2.16}$$

これらは、各散乱様式において散乱をした中性子の数に対する、散乱を経て acceptance に入ってくる中性子の数の比を表している。ただしここで、$\sigma_{\rm iso}, \sigma_{\rm ne}, \sigma_{\rm yu}$ はそれぞれ、等方散乱、ne 散乱、Yukawa 散乱の散乱断面積を表しており、(2.11) の各項を全立体角で積分したものである。

$h(r) \propto \dfrac{d\tilde{\sigma}}{dr}$, $h(\theta) \propto \dfrac{d\tilde{\sigma}}{d\theta}$ であるため、(2.13) により

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d\tilde{\sigma}_{\rm iso}}{d\Omega} d\Omega_{acceptance} \quad : \quad \int \frac{d\tilde{\sigma}_{\rm ne}}{d\Omega} d\Omega_{acceptance} \\
= \quad & (1-a)\int h(\theta)_{\rm iso} d\theta_{acceptance} \quad : \quad a\int h(\theta)_{\rm ne} d\theta_{acceptance} \\
(= \quad & (1-a)\int h(r)_{\rm iso} dr_{acceptance} \quad : \quad a\int h(r)_{\rm ne} dr_{acceptance}) \\
= \quad & 1-a \quad : \quad a
\end{aligned}$$

したがって

$$x\sigma_{\rm iso} : y\sigma_{\rm ne} = 1-a : a$$
$$a = \frac{y\sigma_{\rm ne}}{x\sigma_{\rm iso} + y\sigma_{\rm ne}} \tag{2.17}$$

$\sigma_{\rm iso}$,$\sigma_{\rm ne}$ は既知であるので、モンテカルロ法を用いて x, y の値を求めることで、a の値を求めることができる。L=10m に対しては $a = 5.08 \times 10^{-5}$ である。

同様にして

$$\begin{aligned}
\int \frac{d\tilde{\sigma}_{\rm iso}}{d\Omega} d\Omega_{acceptance} &: \int \frac{d\tilde{\sigma}_{\rm yu}}{d\Omega} d\Omega_{acceptance} \\
= \quad (1-a)(1-b)\int h(\theta)_{\rm iso} d\theta_{acceptance} &: b\int h(\theta)_{\rm yu} d\theta_{acceptance} \\
(= \quad (1-a)(1-b)\int h(r)_{\rm iso} dr_{acceptance} &: b\int h(r)_{\rm yu} dr_{acceptance}) \\
= \quad (1-a)(1-b) &: b
\end{aligned}$$

したがって

$$x\sigma_{\rm iso} : z\sigma_{\rm yu} = (1-a)(1-b) : b$$
$$b = \frac{(1-a)z\sigma_{\rm yu}}{x\sigma_{\rm iso} + (1-a)z\sigma_{\rm yu}} \tag{2.18}$$

ここで、(2.9) を用いることにより、推定によって得られたパラメータ b と結合強度 g^2 の関係は次のように与えられる。ただし k は入射中性子の運動量を表す。

$$g^2 = \frac{2\pi(b_{N_c} + b_{N_p})2k^2}{m_n Q_1 Q_2} \frac{xb}{z\log(1+\frac{4k^2}{m^2})(1-a)(1-b)} \tag{2.19}$$

2.3.2 ビンデータを用いた最尤推定法

(2.13) のようにして実験データを推定する。以下ではビンに入れられたデータを使った最尤法について述べる。

未知のパラメータを b とする。確率密度関数 $f(r;b)$ に従う測定を $n_{\rm tot}$ 回行い、N 個のビンを持つヒストグラムを作ることを考える。このとき、第 i のビンのエントリーの数を n_i と書く。第 i ビンでのエントリー数の期待値 ν_i は次のように書くことができる。

$$\nu_i = n_{\rm tot} \int_{r_i^{\rm min}}^{r_i^{\rm max}} f(r;b) dr \tag{2.20}$$

したがって、各ビンのエントリー数が $(n_1, n_2, ..., n_N)$ となる確率は

$$\frac{n_{\rm tot}!}{n_1!n_2!...n_N!}\prod_i \left(\frac{\nu_i}{n_{\rm tot}}\right)^{n_i} \tag{2.21}$$

これは n_i についての確率分布関数とも言えるので、これの対数をとり、b に依存しない部分を取り除いたものを最尤関数とする。

$$\log L = \sum_i n_i \log \nu_i \tag{2.22}$$

これを最大にするような b が推定値 $\hat{b}$ として採用されることになる。またパラメータ b の誤差の推定値は次のように与えられる

$$\hat{\sigma}^2_{\hat{b}} = -\frac{1}{\dfrac{\partial^2 \log L}{\partial b^2}}\ \Big|_{b=\hat{b}} \tag{2.23}$$

3　カメレオン粒子の探索

3.1　カメレオン機構

負の圧力を持ったダークエネルギーのために宇宙が加速膨張している。このダークエネルギーを説明するために、宇宙定数や新しいスカラー場が考えられている。スカラー場については、クインテッセンスと呼ばれる、時間と共にゆっくりと変化する場が考えられている [26]。このような場が宇宙論的な時間スケールで変化するためには、$\frac{1}{H_0}$(H_0 はハッブル定数) 程度の質量を持っていなければならない [13]。また、ひも理論ではこのようなスカラーは物質と重力程度の強さで結合するとされている。一方、0.1mm〜10^2AU 程度の大きさのスケールでは等価原理の破れ（或いは逆二乗則の破れ）について実験から制限が設けられており、このスカラーと物質が重力程度の強さで結合することはできない [22]。そこで、周囲の環境の密度によって自身の質量を変化させる機構（カメレオン機構）が考えられた。地球のような密度の高い環境では、カメレオン場の質量は大きくなり、このスカラー場によって生じる力の到達距離が短くなる。結果として、ある程度の大きさのスケールで重力程度の強さで物質と結合することが許されるようになる。また、宇宙空間のような低密度の環境では、質量が $\frac{1}{H_0}$ 程度の値をとることができるようなる [13]。この機構が導入されたことで、物質と重力程度の強さでの結合する、質量 $\frac{1}{H_0}$ 程度のスカラー場が考えられるようになった。

3.2　カメレオン場の従う方程式とカメレオンの質量

以下では、カメレオン場の従う方程式とそこから導かれるカメレオンの質量について述べる。静的な場について考える。カメレオン場を ϕ、カメレオンの質量を m_ϕ、M, ξ をパラメータとして、ラグランジアンは以下のように与えられる [21]。

$$L = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{\xi}{4!}M^4\left(\frac{M}{\phi}\right)^n - \sum_i \frac{\beta_i}{M_{pl}}\rho_i\phi \tag{3.1}$$

$M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ である。(3.1) において考える物質を 1 種類とすると、カメレオン場 ϕ の従う方程式は次のような非線形なものになる。

$$\nabla^2\phi = m_\phi^2\phi - n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi}\right)^{n+1} + \frac{\beta}{M_{pl}}\rho(r) \tag{3.2}$$

Xe 原子核の半径を $R = 131^{\frac{1}{3}} \times 1.2 \text{ fm} = 6.09 \text{ fm}$、Xe 原子核の密度を $\rho_p = 2.29 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3$、chamber 中の気体の密度を $\rho_c = 10.6 \text{ kg/m}^3$ として、

$$\nabla^2\phi = m_\phi^2\phi - n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi}\right)^{n+1} + \frac{\beta}{M_{pl}}\rho_p \quad (r < R) \tag{3.3}$$

$$\nabla^2\phi = m_\phi^2\phi - n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi}\right)^{n+1} + \frac{\beta}{M_{pl}}\rho_c \quad (R < r) \tag{3.4}$$

とすることができる。M は長さ $^{-1}$ の次元を持つパラメータである。[25] によれば、$M \sim (0.1\text{mm})^{-1}$ であると、カメレオンはダークエネルギーとして働く可能性がある。また、(3.3) と (3.3) で、$r < R$ と $r > R$ のそれぞれにおいて密度が定数であるとしたが、対象となる長さのスケールより（例えば原子核半径 R や原子の平均的な間隔 D）よりもカメレオンの長さスケール m_{eff}^{-1} が十分長い場合、密度 $\rho(r)$ は一様とみなすことができる [22]。この近似が妥当であることは (3.13) の下で述べる。

ここで実効的なポテンシャル V_{eff} を次のように定める。

$$V_{eff}(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \frac{\xi}{4!}M^4\left(\frac{M}{\phi}\right)^n + \frac{\beta}{M_{pl}}\rho\phi \tag{3.5}$$

ここからはカメレオンの質量を $m_\phi = 0$ として考える。
ϕ_{min} は V_{eff} の最小値を与える ϕ で、以下を満たすため環境の密度 ρ に依存する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{eff}}{\partial\phi} &= -n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi_{min}}\right)^{n+1} + \frac{\beta}{M_{pl}}\rho = 0 \\ \rightarrow \phi_{min} &= M\left(\frac{\beta\rho}{n\frac{\xi}{4!}M_{pl}M^3}\right)^{-\frac{1}{n+1}} \end{aligned} \tag{3.6}$$

実効的なカメレオンの質量 $m_{eff}(\phi)$ は次で与えられる。

$$m_{eff}^2 = \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial\phi^2}\Big|_{\phi_{min}} = n(n+1)\frac{\xi}{4!}M^2\left(\frac{M}{\phi_{min}}\right)^{n+2} \tag{3.7}$$

(3.6),(3.7) より

$$m_{eff} = \sqrt{|n+1|}\left(\frac{1}{|n|\frac{\xi}{4!}M^{n+4}}\right)^{\frac{1}{2(n+1)}}\left(\frac{\beta\rho}{M_{pl}}\right)^{\frac{n+2}{2(n+1)}} \tag{3.8}$$

ここから、$m_{eff} \propto \rho^{\frac{n+2}{2(n+1)}}$ となり、密度によってカメレオンの質量が変化することがわかる。
ここでカメレオンの質量の 2 乗は正であり、カメレオンの質量が環境の密度に依存しなくなる $n = 0, -1, -2$ の場合は考えない。また、n が負のときは偶数のみが許される。

3.3 運動方程式の線形化とその解

(3.3),(3.4) を線形化することを考える [23]。(3.6),(3.7) において、$\rho = \rho_p,\ \rho_c$ としたものをそれぞれ以下のようにする

$$\begin{aligned}
\phi_p &= M\left(\frac{\beta\rho_p}{n\frac{\xi}{4!}M_{pl}M^3}\right)^{-\frac{1}{n+1}} \\
m_p^2 &= n(n+1)\frac{\xi}{4!}M^2\left(\frac{M}{\phi_p}\right)^{n+2} \\
\phi_c &= M\left(\frac{\beta\rho_c}{n\frac{\xi}{4!}M_{pl}M^3}\right)^{-\frac{1}{n+1}} \\
m_c^2 &= n(n+1)\frac{\xi}{4!}M^2\left(\frac{M}{\phi_c}\right)^{n+2}
\end{aligned}$$

境界条件として、$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=0} = 0,\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=\infty} = 0$ を課す。2 つ目の条件は無限遠で ϕ が定数に収束することを意味している。ここで、(3.4) において $\phi \to \phi_{infty}(rrightarrow\infty)$ となるとすると (3.9) から $\phi_\infty = \phi_c$ となる。従って、無限遠点で $\phi = \phi_c$ になるとして、$\phi = \phi_c + \phi_1$ と書くことにする。すなわち $\phi_1 \to 0\ \ (r \to \infty)$。

ここで、(3.3),(3.4) を ϕ_1 の一次までとる。$\left|(n+1)\frac{\phi_1}{\phi_c}\right| < 1$ が満たされるとき、以下のように線形化できる。

$$\begin{aligned}
\nabla^2\phi_1 &= -n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi_c+\phi_1}\right)^{n+1} + \frac{\beta(\rho_p-\rho_c)}{M_{pl}}H(R-r) + \frac{\beta\rho_c}{M_{pl}} \\
&\approx -n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi_c}\right)^{n+1}[1-(n+1)\frac{\phi_1}{\phi_c}] + \frac{\beta(\rho_p-\rho_c)}{M_{pl}}H(R-r) + \frac{\beta\rho_c}{M_{pl}} \\
&= -n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi_c}\right)^{n+1} + n(n+1)\frac{\xi}{4!}M^2\left(\frac{M}{\phi_c}\right)^{n+2}\phi_1 + \frac{\beta(\rho_p-\rho_c)}{M_{pl}}H(R-r) + \frac{\beta\rho_c}{M_{pl}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -n\frac{\xi}{4!}M^3\left(\frac{M}{\phi_c}\right)^{n+1} + m_c^2\phi_1 + \frac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}}H(R-r) + \frac{\beta\rho_c}{M_{pl}} \\
&= m_c^2\phi_1 + \frac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}}H(R-r)
\end{aligned} \tag{3.9}
$$

ただしここで、$H(r) = 1(r > 0), H(r) = 0(\text{otherwise})$、$\Delta\rho = \rho_p - \rho_c \approx \rho_p$ である。

この方程式を解くと

$$
\phi_1 = \begin{cases}
-\dfrac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}m_c^2}\dfrac{m_cR - \tanh(m_cR)}{1+\tanh(m_cR)}\dfrac{\exp[-m_c(r-R)]}{m_cr} & (r > R) \\
\dfrac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}m_c^2}\left(-1 + \dfrac{(1+m_cR)\exp(-m_cR)\sinh(m_cr)}{m_cr}\right) & (r < R)
\end{cases} \tag{3.10}
$$

$|\phi_1|$ を $\beta = 6\times10^{-11}, m_c = 10^8[1/\text{m}]$ に対して図示すると下のようになる [図 3.1]。緑線が $(r < R)$ での解を表しており、赤線が $(R < r)$ での解を表している

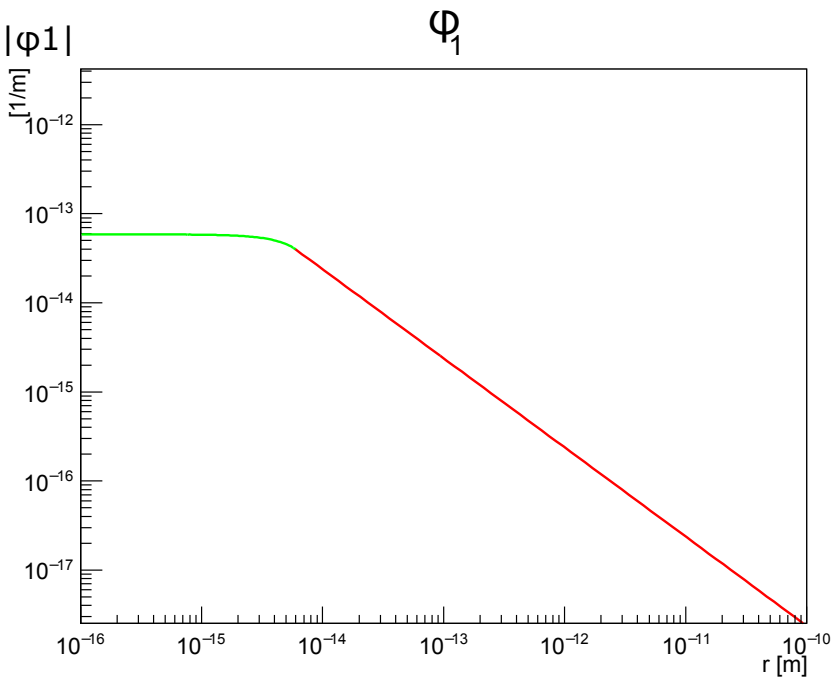

図 3.1: (3.10)

線形化が妥当であるための条件は次の通りであった。

$$\left|(n+1)\frac{\phi_1}{\phi_c}\right| < 1 \tag{3.11}$$

$\left|\frac{\phi_1}{\phi_c}\right|$ は r=0 にて最大値をとるので、(3.11) は次のようになる

$$\left|(1+m_cR)\exp\left(-m_cR\right)-1\right|\frac{\Delta\rho}{\rho_c} < 1 \tag{3.12}$$

(3.12) は n に依存しないことがわかる。これを解いて以下の条件を得る。

$$\begin{aligned} & m_cR &<& \ 9.62\times10^{-9} \\ \leftrightarrow \quad & 6.32\times10^{-7}\mathrm{m} &<& \ \frac{1}{m_c} \end{aligned} \tag{3.13}$$

(3.13) と実験のパラメータから $D \ll m_c^{-1}, R \ll m_p^{-1}$ を満足するので、キセノンガスやキセノン原子核の密度を一様と考える近似も妥当であるといえる。

$n=-4$ の場合に、パラメータで (3.12) を書き直すと以下のようになる。

$$\xi\beta^2 < 5.79\times10^{17} \tag{3.14}$$

それ以外の n に対して、パラメータで (3.12) を書き直すと以下のようになる。

$$\left|\frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{n\frac{\xi}{4!}M^{n+4}}\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{\beta\rho_b}{M_{pl}}\right)^{\frac{n+2}{n+1}}R^2\right|\frac{\Delta\rho}{\rho_c} < 1 \tag{3.15}$$

(3.12) が満たされる場合、$m_cR \ll 1$ であるので、$\phi_1(r>R)$ について

$$\phi_1 \ \approx \ -\frac{\beta m_{Xe}}{4\pi M_{pl}}\frac{exp(-m_cr)}{r} \tag{3.16}$$

従って、カメレオンによる原子核と中性子の散乱ポテンシャルは次のようにあたえられる。

$$V = -\frac{\beta^2 m_{Xe}m_n}{4\pi M_{pl}^2}\frac{exp(-m_cr)}{r} \tag{3.17}$$

(1.1) と比較すると $g^2 \to \beta^2, Q_1Q_2 \to \frac{m_{Xe}m_n}{M_{pl}}$ になっている。原子核によって作られるカメレオン場 ϕ は湯川型となると言えるので、2.3 で述べた手法を用いてその質量と結合強度に対して制限を設けることができる。

ここで、(3.10) による散乱振幅は次のように近似することができる (付録 B にて後述)。

$$
\begin{aligned}
f_{yukawa} &= \frac{-2m_n}{q}\int_0^R \mathrm{d}r\frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(r<R) + \frac{-2m_n}{q}\int_R^\infty \mathrm{d}r\frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r) \\
&\approx \frac{-2m_n}{q}\int_0^\infty \mathrm{d}r\frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r) \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

これはつまり、原子核の内側での散乱の影響はほとんど無視できるということである。

現在、ξ, β に対して設けられている制限は次の [図 3.2] のようになっている [24]。

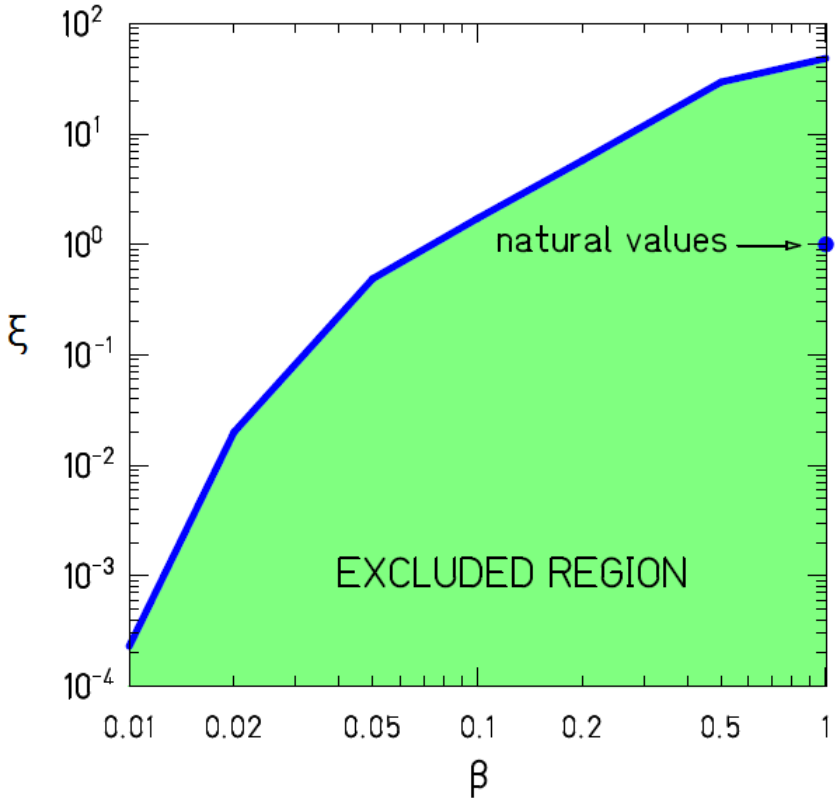

図 3.2: ξ, β について現在設けられている制限 [24]

3.4 pseudo-linear regime

原子核の内側の ϕ に対して、次の条件を課すことにする。

$$\left(\frac{\phi_p}{\phi}\right)^{n+1} < 1 \tag{3.19}$$

このとき、微分方程式は次のようになる。

$$\nabla^2\phi = \frac{\beta\rho_p}{M_{pl}}$$

この方程式を解くと次のようになる。

$$\phi_{in} = \phi_0 + \frac{\beta\rho_p r^2}{6M_{pl}} \tag{3.20}$$

さらに、原子核のすぐ外側での解は、$r = R$ での ϕ の連続性から次のようになる。

$$\phi_{mid} = \phi_0 + \frac{\beta\rho_p R^2}{2M_{pl}} - \frac{\beta\rho_p R^3}{3M_{pl}r} \tag{3.21}$$

(3.11) ではなく、(3.19) を仮定することで (3.20),(3.21) が得られたことになる。詳細な議論は [23] を参照。

次に、原子核から十分遠いところの ϕ について考える。$\phi \to \phi_c$ であることと、(3.11) を課しておく。このとき、原子核の十分外側での解は次のようになる。

$$\phi_{ex} = \phi_c - \frac{A\exp(-m_c r)}{r} \tag{3.22}$$

ただし、$n = -4$ の場合は外側の ϕ はもはや湯川型ではなくなってしまうので考えないことにする。

ここで、原子核のすぐ外側の解と十分外側の解が一致する r が存在するとした上で、(3.21),(3.22) が $m_c r$ の 1 次の項で一致することを要求して定数 ϕ_0, A を決定すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_c - \frac{\beta\rho_p R^2}{2M_{pl}} + \frac{\beta\rho_p m_c R^3}{3M_{pl}} \\ A &= \frac{\beta\rho_p R^3}{3M_{pl}} \end{aligned} \tag{3.23}$$

$n = -6$, $\beta = 10^{10}$, $m_b = 1.9\times10^8$ 1/m の場合について (3.20),(3.21),(3.22) と ϕ_b の比を以下に示した。

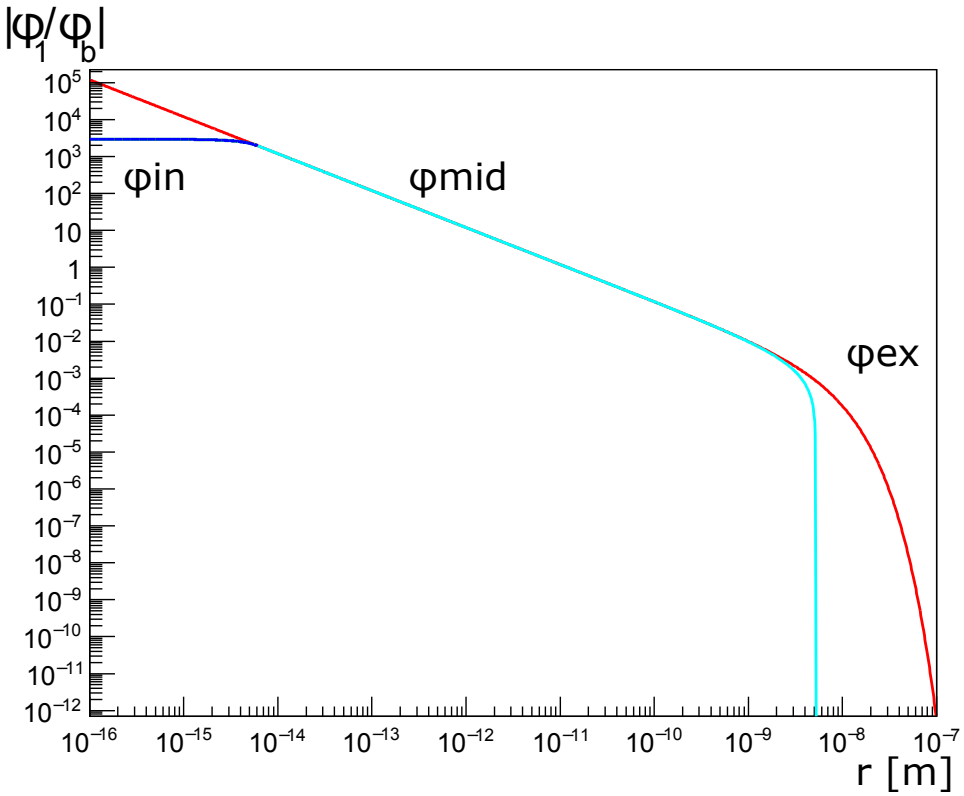

図 3.3: pseudo linear regime での解の振る舞い

この図を見てもわかるとおり、$R < r < 10^{-10}[m]$ では (3.11) で要求された条件を満たしていないが、湯川型とみなすことができる。つまり、(3.11) と比べて弱い条件でも湯川型ポテンシャルを仮定する近似を用いることができることになる。3.3 では r の全域に対して (3.11) を課していたのに対し、3.4 では原子核から十分遠いところでこの条件を満たせばよいとしたことが原因である。

さて、このような近似が正当化できる条件は、$n < -4, n > 0$ の場合についてそれぞれ次のようになる。

$$m_p R \ll min(18^{1/6}\left(\frac{m_p}{m_c}\right)^{\frac{n+4}{3(n+2)}}, \sqrt{2|n+1|}\left|\frac{m_c}{m_p}^{\frac{2}{|n+2|}} - 1\right|) \quad (3.24)$$

$$m_p R \ll min(\sqrt{3}\left(\frac{m_p}{m_c}\right)^{\frac{n+4}{3(n+2)}}, \sqrt{2|n+1|}\left|\frac{m_c}{m_p}^{\frac{2}{|n+2|}} - 1\right|) \quad (3.25)$$

これらの条件を各 n について計算してまとめたものを下に示す。

n	$\bar{\lambda} = \dfrac{1}{m_c}$ に対する条件
-8	1.63×10^{-8} m $< \bar{\lambda}$
-6	6.58×10^{-9} m $< \bar{\lambda}$
-4	湯川型から外れるので考えない
1	4.47×10^{-7} m $< \bar{\lambda}$
4	2.83×10^{-7} m $< \bar{\lambda}$
6	2.39×10^{-7} m $< \bar{\lambda}$

線形化が施された ϕ、つまり (3.10) に対して (3.20) を書き直すと次のようになる。

$$\frac{\rho_c}{\rho_p}\left(1-\frac{\rho_p}{\rho_c}\frac{m_c^2R^2}{2(n+1)}\right)^{-(n+1)} < 1 \tag{3.26}$$

この条件は $n > 0$ に対しては常に成立するが $n \leq -6$ では成立しないため、この近似を用いることで $n \leq -6$ において湯川型を使ってよい $\bar{\lambda}$ の範囲が広くなることになる。

3.5 得られた制限

[12] で得られた測定データを 2.3 に述べた方法に従って解析を行い β^2 を推定する。測定データは次のような手順で求められた。

ビームのバックグラウンドの測定を 3 時間、ターゲット容器をからにした場合の測定を 36 時間、ターゲット容器に Xe ガスを満たした場合の測定を 72 時間行った。バックグラウンド測定で得られた角度分布を $g_{bg}(r)$、容器を空にしたときの角度分布を $g_{emp}(r)$、ターゲット容器に Xe を満たしたときの角度分布を $g_{sam}(r)$、Xe ガスの透過率を γ_{tr} とし、それぞれの測定でのガス容器への入射中性子の数を M_{bg}, M_{emp}, M_{sam} とすると、Xe ガスによる散乱角度分布 $g_{exp}(r)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} g_{exp}(r) &= \left(g_{sam}(r)-\frac{M_{sam}}{M_{bg}}g_{bg}(r)\right)-\gamma_{tr}\left(\frac{M_{sam}}{M_{emp}}g_{emp}(r)-\frac{M_{sam}}{M_{bg}}g_{bg}(r)\right) \\ &= g_{sam}(r)-\gamma\frac{M_{sam}}{M_{emp}}g_{emp}(r)-(1-\gamma_{tr})\frac{M_{sam}}{M_{bg}}g_{bg}(r) \end{aligned} \tag{3.27}$$

h_{exp} を g_{exp} の確率密度関数として、得られた散乱角度分布 h_{exp} を以下に示す [図 3.4]。

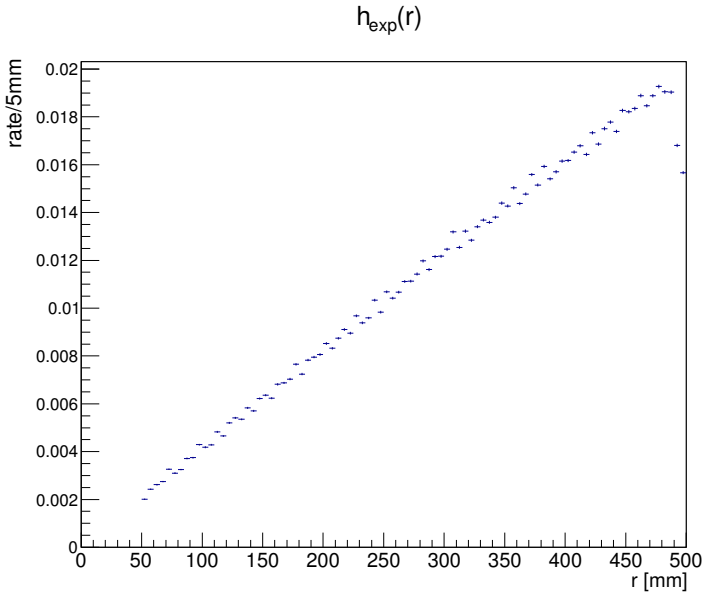

図 3.4: 実験で得られた散乱角度分布

3.3、3.4 で求めた、ポテンシャルが湯川型とみなせる m_c に対して β^2 を推定していく。以下に、$\bar{\lambda} = 7 \times 10^{-9}$[m] に対して推定を行ったときの結果 [図 3.5] と、測定データとフィッティングの差を示した [図 3.7]。ここで、実験データとフィッティングデータでのグラフの微細構造が同様になっているが、このグラフの微細構造は統計的ふらつきによって生じるのではなく、その半径内 $(r \sim r + \Delta r)$ に含まれるピクセル中心の数 [図 3.6] によって生じていることに注意が必要である。

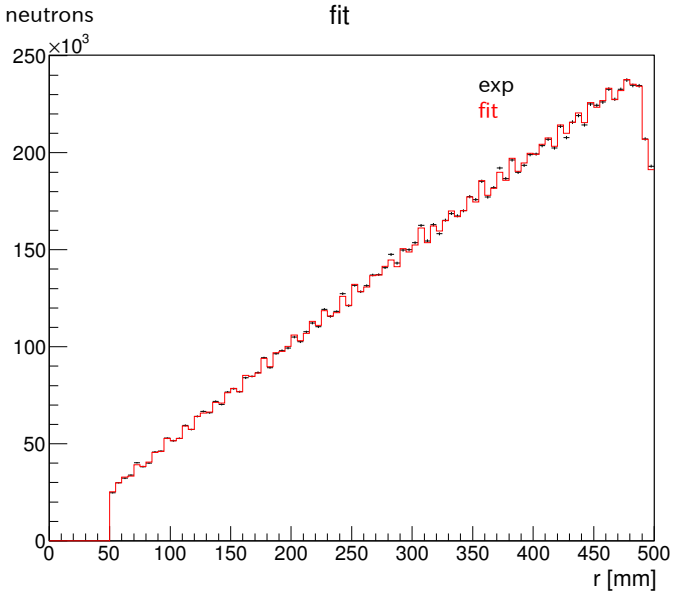

図 3.5: 測定データとフィッティング結果

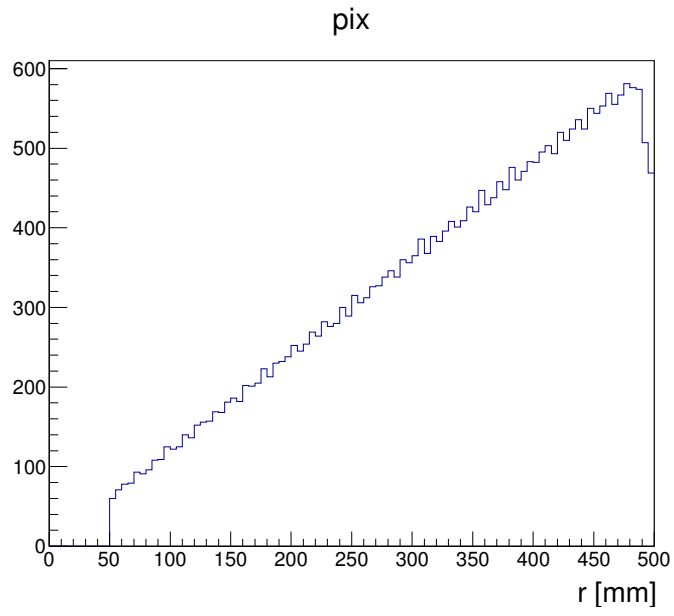

図 3.6: 各ビンに含まれるピクセルの数

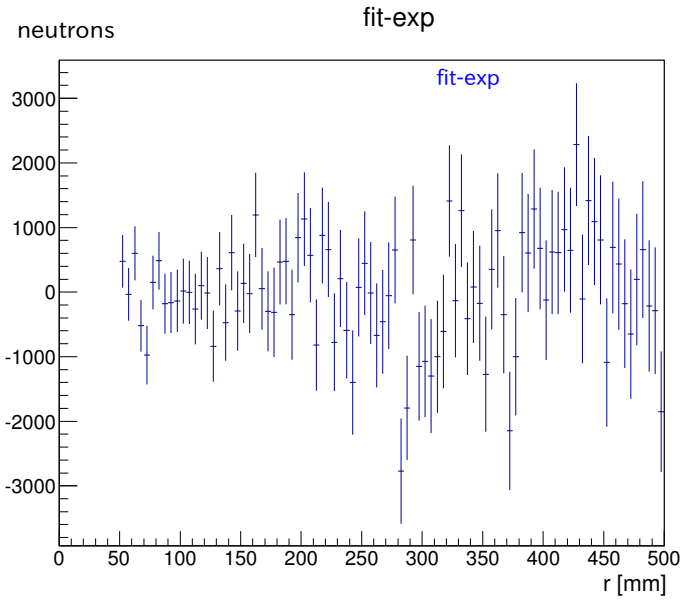

図 3.7: フィッティング結果と測定データの差

また、β^2 を変化させた場合に得られる散乱角度分布を以下に示した [図 3.8]。ここでは、グラフは検出される中性子数が等しくなるように規格化されている。青色の線で書かれているのがフィッティングから得られた曲線である。

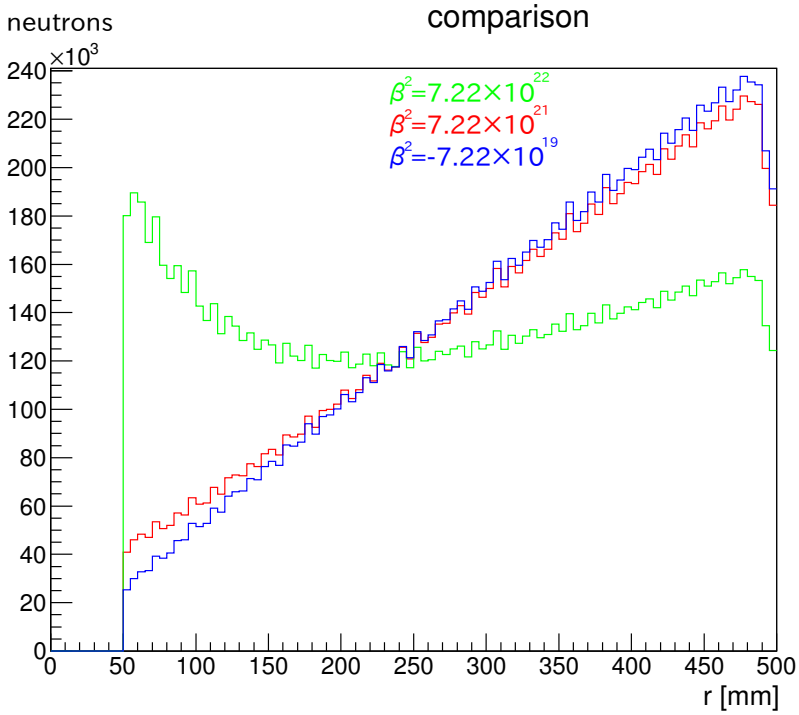

図 3.8: β^2 を変化させた場合の散乱角度分布

こうして $\bar{\lambda} - \beta^2$ に対して得られた制限を以下に示し、次に様々な n に対して理論パラメータ空間での制限を示す。網掛け部分が本研究で排除された領域である。また、実線はポテンシャルが湯川型であるとみなせる領域の境界線を表しており、$n \neq 4$ に対しては (3.24),(3.25) から、$n = -4$ に対しては、(3.14) から決められている。

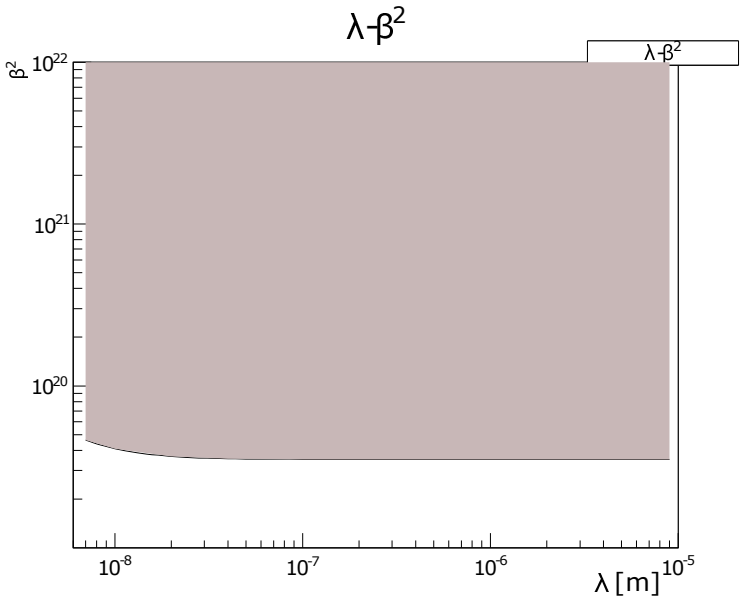

図 3.9: $\lambda - \beta^2$ に対して得られた制限

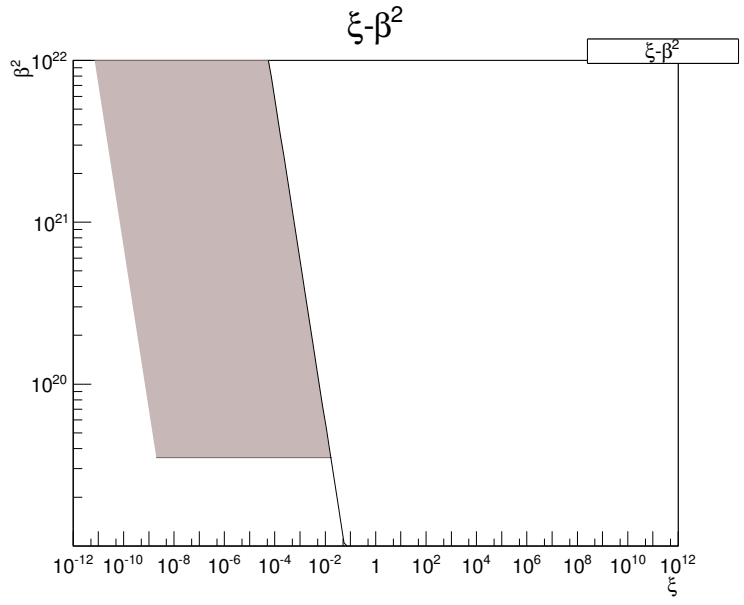

図 3.10: n=-4 に対して得られた制限

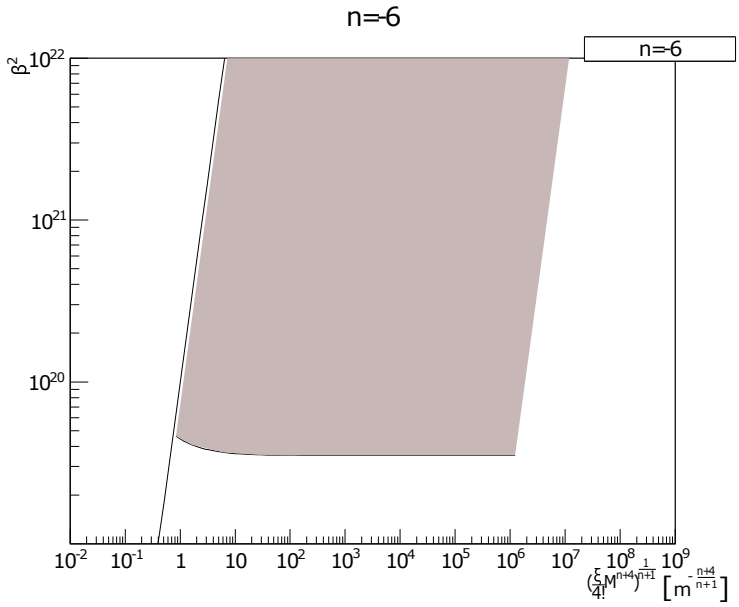

図 3.11: n=-6 に対して得られた制限

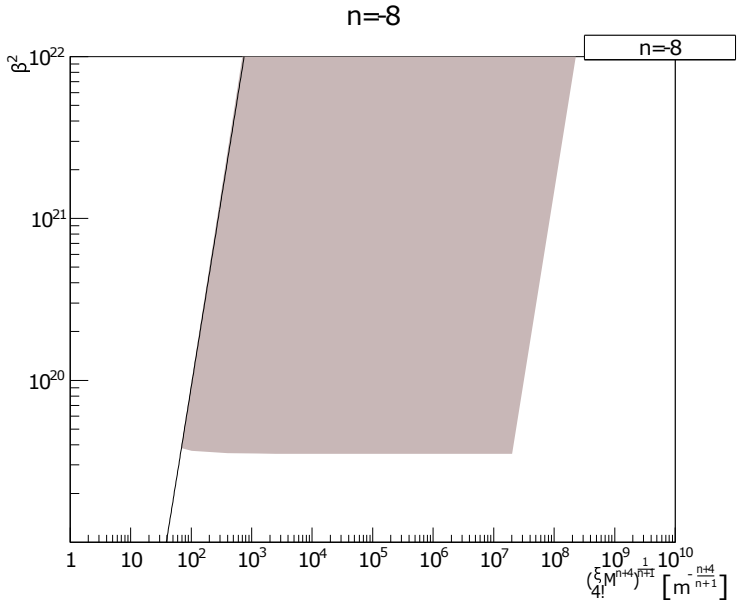

図 3.12: n=-8 に対して得られた制限

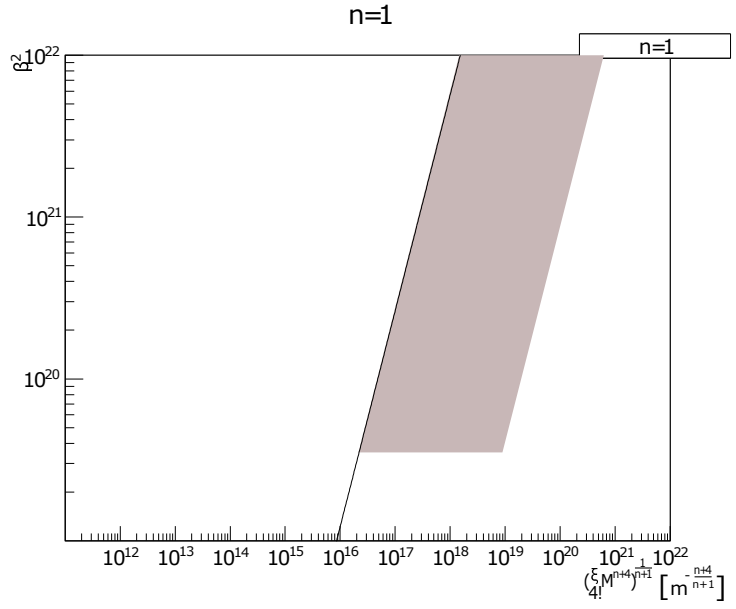

図 3.13: n=1 に対して得られた制限

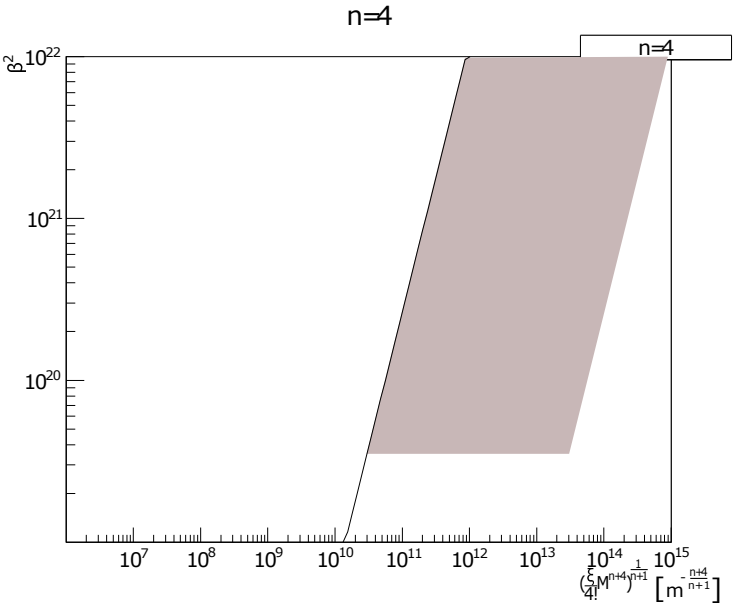

図 3.14: n=4 に対して得られた制限

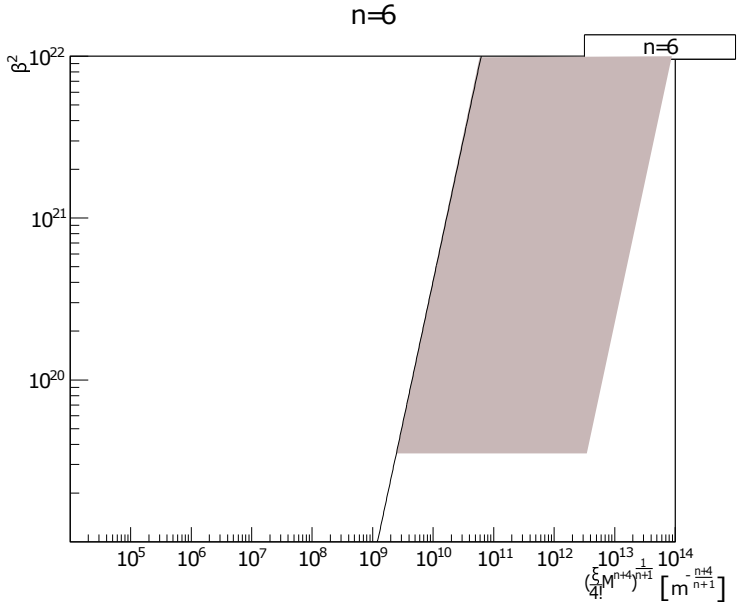

図 3.15: n=6 に対して得られた制限

3.6 カメレオンの線形化に関しての議論

今回の実験の条件で線形化が許される領域は $6 \times 10^{-7}[m] < \frac{1}{m_c}$ であった。以下では線形化が許される領域の下限がどの程度まで小さくなるかについて考える。

密度が一様であるとみなせるための条件は

$$m_c D < 1 \leftrightarrow D < \frac{1}{m_c} \tag{3.28}$$

典型的には、固体では $D \sim$ Å、気体では $D \sim$ nm である。次に、線形化が許される条件として

$$m_c R < \sqrt{\frac{2\rho_c}{\rho_p}} \leftrightarrow R\sqrt{\frac{\rho_p}{2\rho_c}} < \frac{1}{m_c} \tag{3.29}$$

ρ_p は原子の種類に依らずほぼ一定であるので、ρ_c が大きいほどこの条件に関しては有利になる。例えばタングステン (質量数 183.8, 密度 $19.25[\mathrm{g/cm^3}]$) についてこの条件を考えると以下のようになる。

$$1.66 \times 10^{-8}[\mathrm{m}] < \frac{1}{m_c} \tag{3.30}$$

従って、標的をキセノンガスからタングステンに変更することで、線形化が許される領域の下限が$6 \times 10^{-7}[m] < \frac{1}{m_c}$から$1.66 \times 10^{-8}[\mathrm{m}] < \frac{1}{m_c}$に変更されることになる。これより短いスケールでは通常の物質では線形化の条件を満足することが難しくなるため、$\frac{1}{m_c} < 1.66 \times 10^{-8}[\mathrm{m}]$となる領域でのカメレオンの探索は、線形化以外の手法を用いて行う必要があるだろう。

4　到達感度の改善

ここからは2014年に行われた実験 [図 1.1] から感度を改善するための研究について述べる。本研究では $\bar{\lambda} \sim 10^{-8}m$ での感度の改善を目指し、モンテカルロシミュレーションを行った。

今回考える散乱ポテンシャルはスカラーボソンによる湯川型のポテンシャルであり、以下のようなものになる。

$$V_{\mathrm{yukawa}} = -g^2 \frac{Q_1 Q_2}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}$$

チャージはバリオン数であるとしていて、Q_1, Q_2 はそれぞれ Xe のバリオン数と中性子のバリオン数である。

4.1　感度の改善の際の問題点

Yukawa 散乱について、2.2.5 から、力を媒介するボソンの質量が軽ければ軽いほど小角度にピークが立つことがわかる。したがって、小さい質量に対して感度を持たせるには小角度の散乱を測定する必要があり、本研究ではサンプル容器から検出器までの距離 L を 2014 年の L=3.1m から L=10m にすることで、より小さい角度での散乱角度分布を観測することを考えた。

このとき、問題になることが 3 つある。まず一つ目は、ビームサイズの問題である。ダイレクトビームの影響を避けるため、検出器上でのビームサイズがビームストッパのサイズより小さくならなければならない。そして二つ目は、統計の問題である。この実験の感度は観測される中性子の数で決められているので、なるべく多くの中性子を検出器上に届けなければならない。そして三つ目は、これらの問題はトレードオフの関係にあるということである。ビームサイズを小さくするためにコリメータを絞ると飛来する中性子の数が減ってしまうし、中性子の数を増やすためにコリメータを広げるとビーム半径が大きくなってしまう。したがって、今回考えるべき問題は、ビームサイズがビームストッパより小さくなるという条件の下、飛来する中性子の数を最大化することになる。

ここで、コリメータの上流側での中性子ビームの構造の大きさよりコリメータの開口部が十分小さいと考え、空間的に十分一様とみなせるビームがコリメータに入射すると考える。このとき、散乱を経て検出器に飛

来する中性子の数 N は以下のように表される。

$$\begin{aligned} N &\approx C \times T \times \pi a_1^2 \times j(l,\lambda) \times \int_{\text{detector}} \frac{d\sigma_{\text{iso}}}{d\Omega} d\Omega \times \pi a_2^2 \times d \times \rho_{\text{gas}} \\ &\propto a_1^2 a_2^2 j(l,\lambda) \end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし、T は中性子の照射時間でここでは 72 時間に固定した。C は L^{-2} の次元を持った定数である。a_1 はコリメータの上流側の半径、$j(l,\lambda)$ はサンプル上での中性子ビームフラックスで、コリメータの長さ l と入射中性子の波長 λ に依存する。a_2 はコリメータの下流側の半径、d はサンプル容器の長さ、ρ_{gas} はキセノンガスの密度である [図 4.1]。

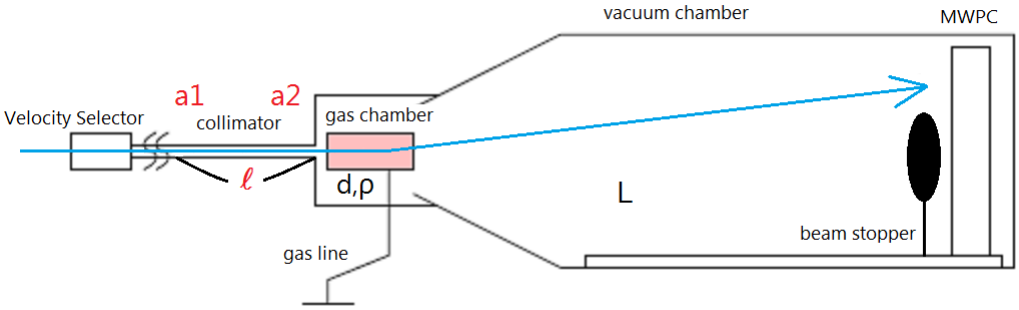

図 4.1: 実験セットアップ概念図

中性子ビームフラックス j は、サンプル上でのフラックスを表しており、[図 4.2] に示された値は、$l = 18\text{m}$ 以下のところでは $a_1 = 25\text{mm}, a_2 = 6\text{mm}$、$l = 18\text{m}$ 以上のところでは $a_1 = 12\text{mm}, a_2 = 6\text{mm}$ のときの値のである [19]。これによって C が決まっている。

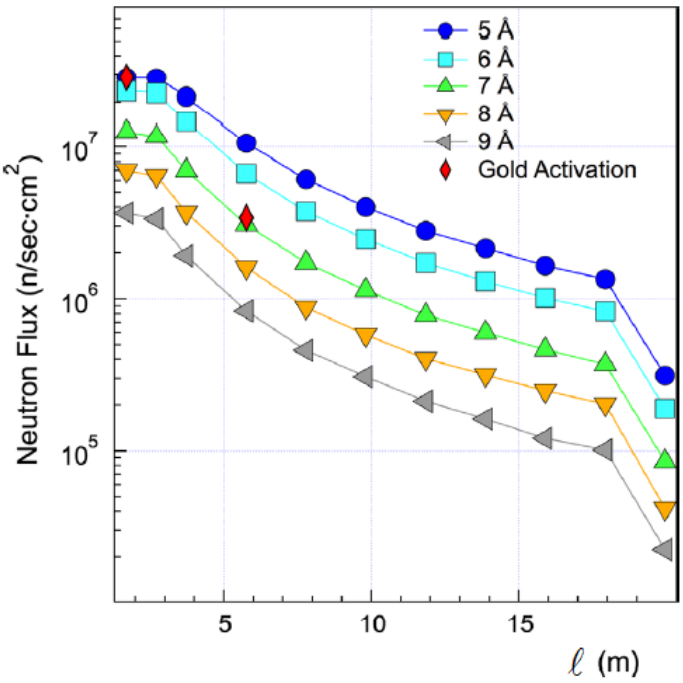

図 4.2: サンプル上での中性子ビームフラックス [19]

散乱断面積や d, ρ_{gas} は固定されているので、$a_1^2 \times a_2^2 \times j(l, \lambda)$ が飛来中性子の数を決定していると言える。従って、飛来する中性子を最大化するためには、検出器上でのビームサイズが 20mm 以下となる条件の下で $a_1^2 \times a_2^2 \times j(l, \lambda)$ を最大化すればよいことになる。

また、2014 年の実験の結果から、検出器上でのビームサイズが 20mm 以下であれば、ビームストッパでダイレクトビームの影響を十分除くことができるとした。

4.2 コリメータの変更

4.2.1 飛来中性子数の最大化

まず、コリメータセクションを変更することによって目的の達成を目指した。つまり、a_1、a_2、l、λを変更していって、ビームサイズの条件を満たすものを探していく。a_1, a_2はそれぞれ1 mm〜25 mmまで動かすことができ、lは5 m〜18 m、λは5 Å〜9 Åまで変更することができる。

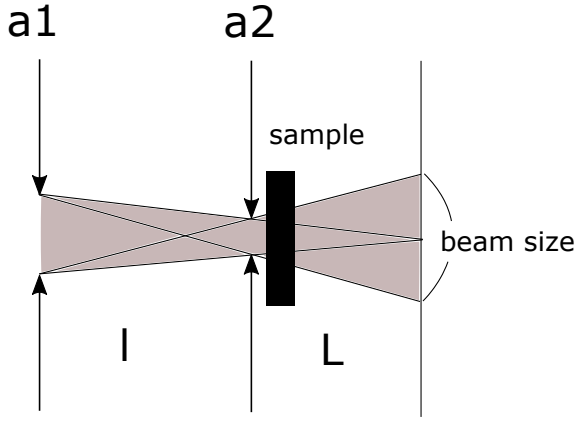

図 4.3: コリメータセクション概念図

ここで、コリメータの上流側の開口部の中心を原点として中性子ビーム方向にz軸を取る。コリメータの上流側開口部で$(a, b, 0)$, 下流側開口部で(p, q, l)を通過した中性子が検出器上で$(X, Y, l + L)$に達するとすると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ L+l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-a \\ q-b \\ l \end{pmatrix} \frac{L+l}{l} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

(a, b),(p, q)をそれぞれ半径a_1, a_2の円からランダムに選び、(4.2)に基づいてビームサイズを求めるモンテカルロシミュレーションを行った。検出器上にやってくる中性子ビームの検出器上での2次元分布をx軸に射影したときに、最大値をとるビンの$\frac{1}{20}$の値をとる位置でビーム半径を定義し、それが20を超えないものをビームサイズの条件を満たすものとした。中性子ビームの検出器上での2次元分布をx軸に射影した図を以下

に示すが、[図 4.4] は条件を満たすものの一例、[図 4.5] は条件を満たさないものの一例となる。

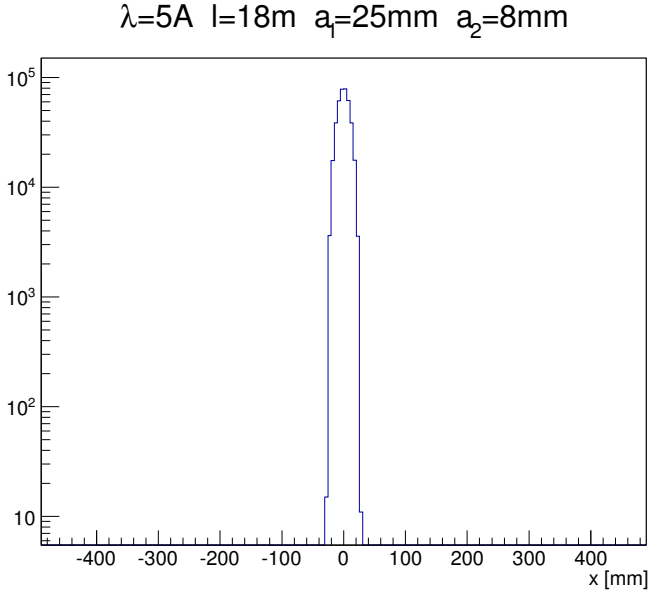

図 4.4: ビームサイズの条件を満たすビーム

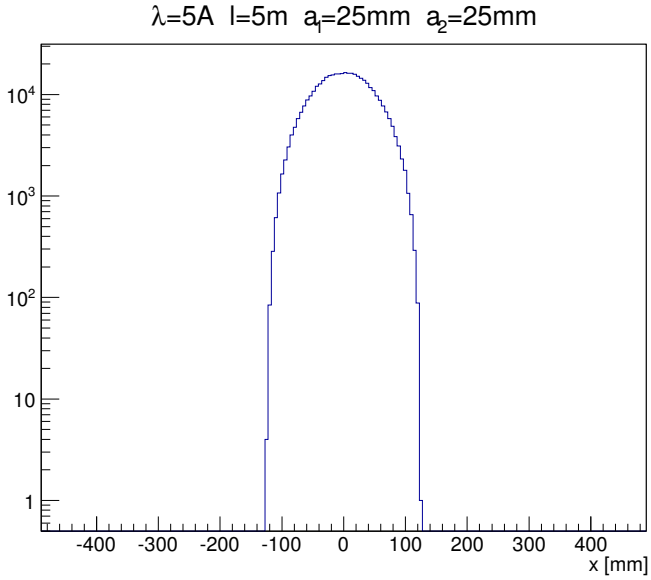

図 4.5: ビームサイズの条件を満たさないビーム

ビームサイズの条件を満たすものの中で (4.1) を最大にするものを探したところ

$$L = 10\text{m},\ \lambda = 5\ \text{Å},\ l = 18\ \text{m},\ a1 = 25\ \text{mm},\ a2 = 8\ \text{mm} \tag{4.3}$$

$$L = 20\text{m},\ \lambda = 5\ \text{Å},\ l = 18\ \text{m},\ a1 = 12\ \text{mm},\ a2 = 6\ \text{mm} \tag{4.4}$$

が求める条件であることがわかった。

4.2.2 到達感度

pseudo experiment を行い、その結果をフィッティングすることでパラメータの推定を行った。pseudo experiment の元になる確率分布分布関数 f_{pseudo} は次のようにして作成した。ここで a は (2.18) で与えられているものである。

$$f_{\text{pseudo}} = (1-a)f_{\text{iso}} + af_{\text{ne}} \tag{4.5}$$

(4.3),(4.4) の条件の下で (4.5) に基いて pseudo experiment を多数回行い、パラメータの推定を行った。g^2 の推定値の分布と g^2 に対する pull plot の一例を以下に示す。

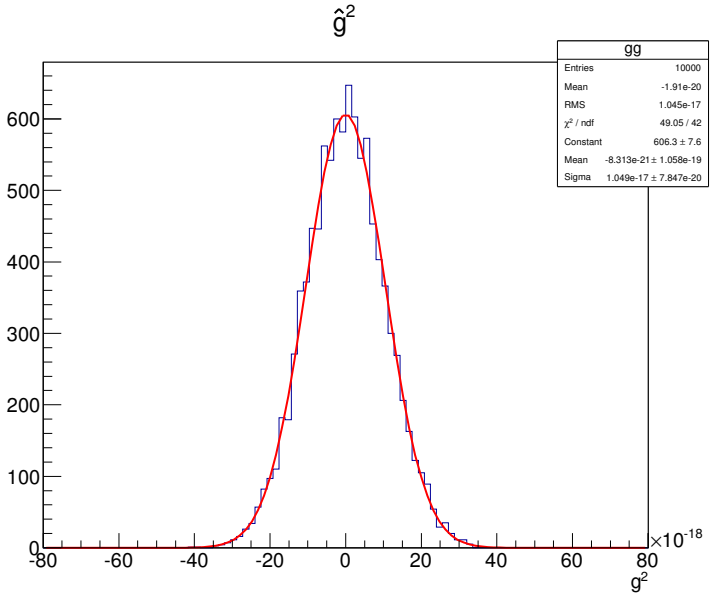

図 4.6: $\bar{\lambda} = 510^{-9}$ m に対する g^2 の推定値の分布

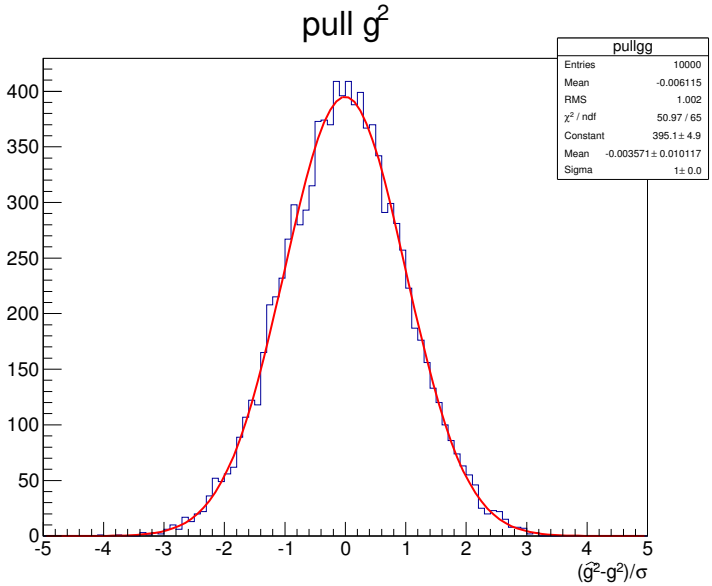

図 4.7: $\bar{\lambda} = 510^{-9}$ m に対する pull plot

L=10m と L=20m で、それぞれ期待される感度は次の [図 4.8] に示すと

おりである。

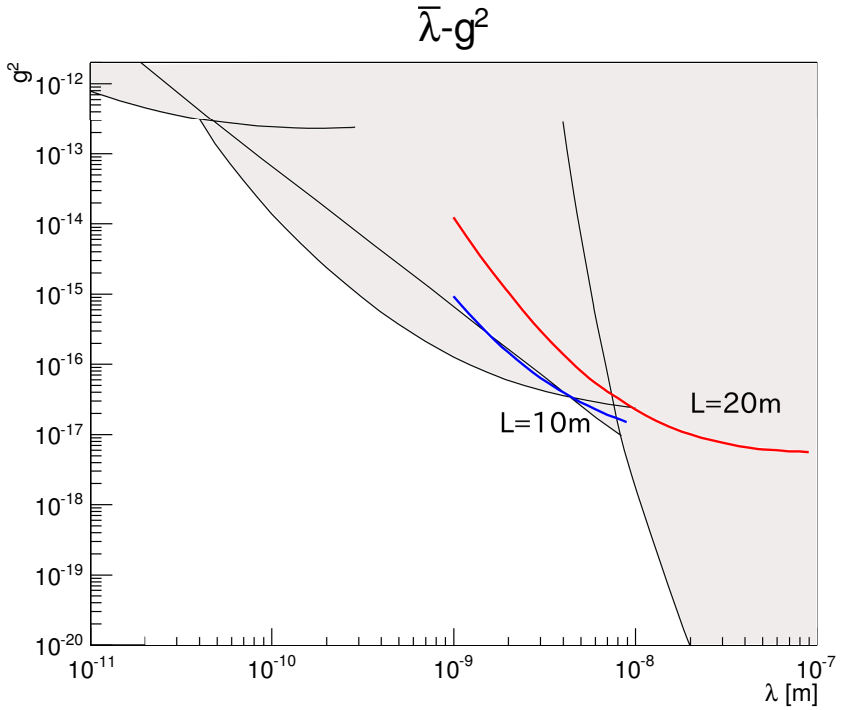

図 4.8: コリメータを変更したときの到達予想感度

[図 4.8] からわかるように、コリメータを変更しただけでは十分な感度の改善が見られないことがわかる。

4.3 レンズの利用

4.3.1 中性子集束用のレンズ

コリメータだけでは十分な感度の改善が見られないことがわかったため、中性子集束用のレンズを用いて感度の改善が見られるかを考える。つまり、焦点距離 $f[m]$ のレンズを用いた上で a_1、a_2、l、λ を変更していって、ビームサイズの条件を満たすものを探し、感度の改善が見られるかを考える。

HANARO では中性子集束用のレンズを用いることができる。このレンズは MgF_2 で出来ている。多くの物質に対して、中性子の屈折率は 1 よ

りも小さく、凹レンズで集束、凸レンズで発散させることができる。レンズは、[図 4.9] のようにコリメータの下流側開口部の直前に設置して用いる。

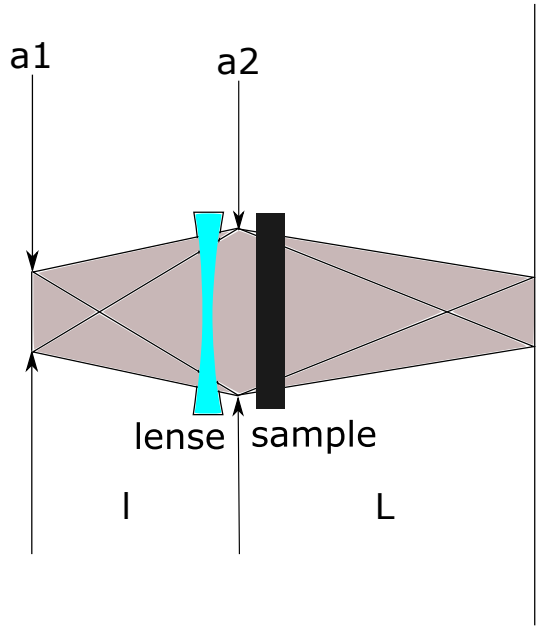

図 4.9: レンズ概念図

両凹レンズの焦点距離 f_0 は次のように決まっている。[20]

$$f_0 = \frac{R}{2(1-n)} = \frac{R}{\rho b_c}\frac{\pi}{\lambda^2} \tag{4.6}$$

ただし、ここで、R はレンズの曲率半径、ρ は原子の個数密度、λ は入射中性子の波長を表している。曲率半径 R に比例し、λ^2 に反比例している。また、N 枚の両凹レンズをつなげて用いると、焦点距離 f は次のようになる。

$$f = \frac{f_0}{N} \tag{4.7}$$

従って、中性子の波長とレンズの物質を固定して焦点距離を縮めるなら、曲率半径を小さくするか、レンズの枚数を増やす必要がある。現存する使用可能なレンズの焦点距離は次のようになっている。

$$f = \frac{f_0}{28} = \frac{1}{28}\frac{2.5}{1.6}\left(\frac{10[\text{Å}]}{\lambda[\text{Å}]}\right)^2 \times 10^2[m] \tag{4.8}$$

また、中性子集束用レンズはレンズの公式に従っており、中性子源からレンズまでの距離を L_1、レンズから結像点までの距離を L_2 とすると以下が成り立つ。

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \tag{4.9}$$

4.3.2 飛来中性子数の最大化

コリメータの上流側の開口部の中心を原点として中性子ビーム方向に z 軸を取る。コリメータの上流側開口部で (a,b,0), 下流側開口部 (レンズ上) で (p,q,l) を通過した中性子が検出器上で (X,Y,l+L) に達するとすると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} (\frac{L}{l} - \frac{L}{f} + 1) - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \frac{L}{l} \tag{4.10}$$

4.2.1 と同様にして、(a, b),(p, q) をそれぞれ半径 a_1, a_2 の円からランダムに選び、(4.10) に基づいてビームサイズを求めるモンテカルロシミュレーションを行った。また、このとき、入射中性子の波長は $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 12\%$ の幅を持ったガウシアンに従うと仮定して収差の効果も考慮した。

その結果得られたビームサイズの条件を満たす領域 (l, a_1, a_2) を、いくつかの焦点距離 f に対して、$L = 10$ m, $l = 10$m と $L = 20$ m, $l = 18$ m の場合について示す。

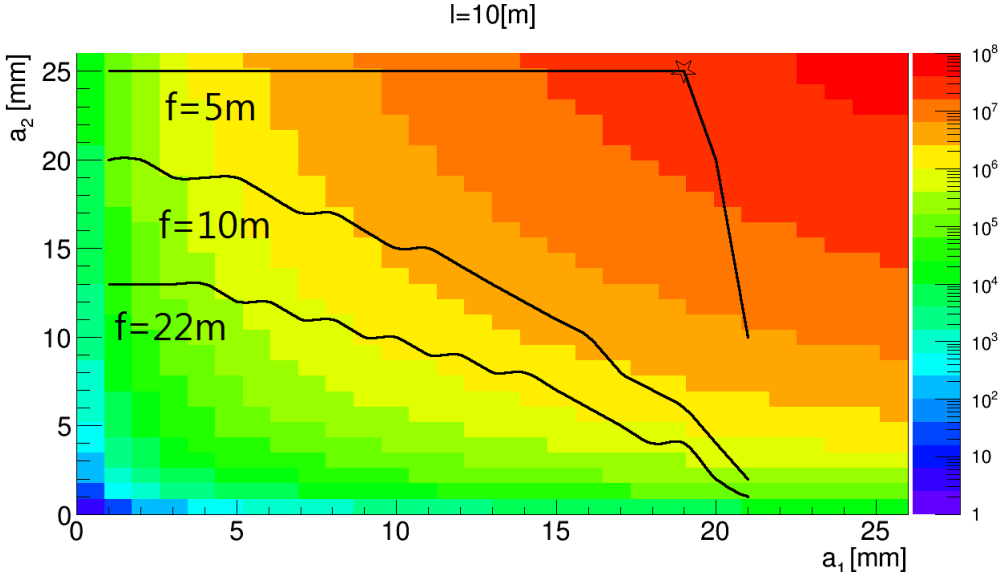

図 4.10: L=10 m, l=18 m でのビームサイズ条件を満たす領域。☆で示した点が飛来中性子数が最大になる点である。

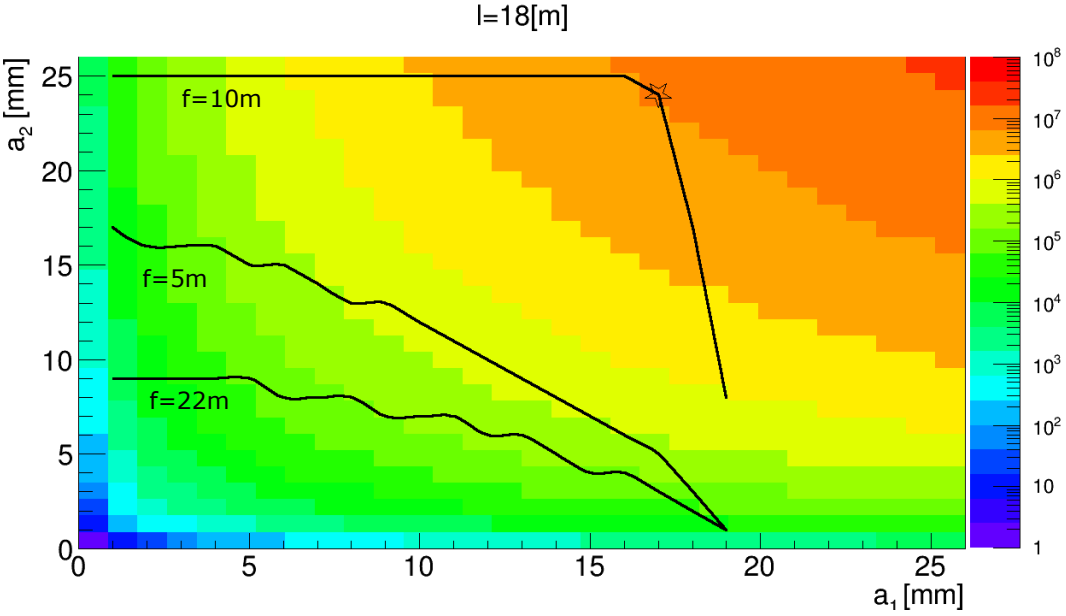

図 4.11: L=20 m, l=18 m でのビームサイズ条件を満たす領域。☆で示した点が飛来中性子数が最大になる点である。

L=10m,L=20m において、飛来中性子が最大となる点はそれぞれ

$$L = 10\ \mathrm{m},\ \lambda = 5\ \text{Å},\ f = 5\ \mathrm{m},\ l = 10\ \mathrm{m},\ a1 = 19\ \mathrm{mm},\ a2 = 25\ \mathrm{mm} \tag{4.11}$$

$$L = 20\ \mathrm{m}, \lambda = 5\ \text{Å},\ f = 10\ \mathrm{m},\ l = 18\ \mathrm{m},\ a1 = 17\ \mathrm{mm},\ a2 = 24\ \mathrm{mm} \tag{4.12}$$

これらの点に対して得られる制限は次のようになる。

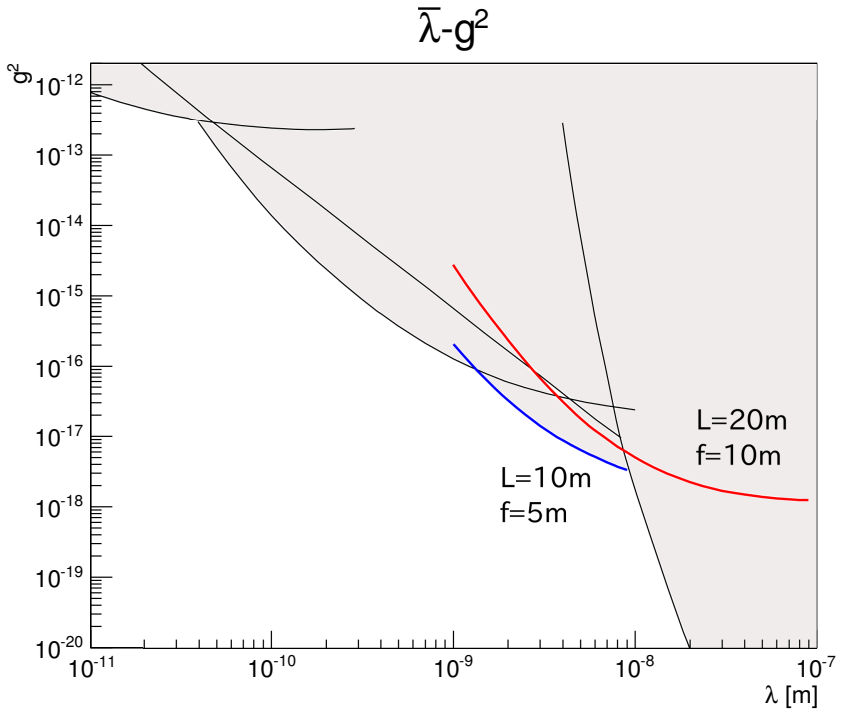

図 4.12: L=10,L=20 において最良の到達感度を示したもの

この結果、$\bar{\lambda} = 1 \times 10^{-8}$ m 程度の領域で 5 倍程度の感度の改善をするためには、$f = 5$ m が必要となることがわかった。(4.7) によると、既存のレンズを 125 枚重ねれば $f = 5$m は達成することができる。

しかしながら、レンズによる減衰などを考えると 125 枚のレンズを用いることは現実的ではなく、レンズを用いることにこだわるのであれば焦点距離の短いレンズの開発が必要である。

4.3.3 時間の延長

次に、既存のレンズを用いることにして、ビームタイムを延長することを考えた。既存のレンズを用いた条件の下で、2014 年の実験と同じく 72 時間のビームタイムを仮定したときの予想感度と、2160 時間のビームタイムを仮定したときの予想感度を以下に示す [図 4.13]。この図から、2160 時間のビームタイムがあれば 5 倍強の感度の改善が見込まれる。

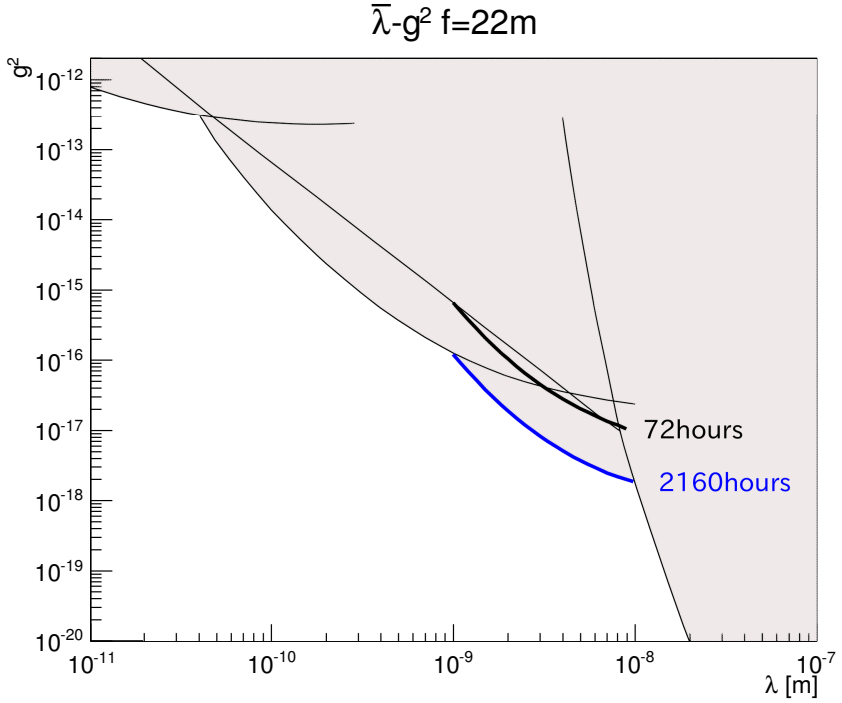

図 4.13: 既存のレンズを用いてビームタイムを変更したときの到達予想感度

5　まとめ

第2章で実験の詳細を示し、中性子とキセノンの散乱について述べた後、解析手法を説明した。第3章でカメレオン場について述べた。ある条件の下でカメレオン場を湯川型ポテンシャルとして近似できることを示し、その条件の下で理論パラメータに対して制限を設けた。また、湯川型ポテンシャルとして近似できる条件が標的を変えたときにどのように変わるかを論じた。第4章では探索領域を広げるための実験設計について議論した。コリメータだけでの実験設計では探査領域が広げられないことが示されたので、中性子ビーム集束用レンズを用いた場合について議論した。焦点距離 $f = 5$ m の中性子集束用のレンズを用いると、$1\ \mathrm{nm} \leq \bar{\lambda} \leq 10\ \mathrm{nm}$ の領域で最大5倍程度の感度の改善が期待できることが示された。しかしながら125枚のレンズを使うことは現実的ではなく、焦点距離の短いレンズの開発が必要となる。また、既存のレンズを用いた条件の下で、2160時間程度のビームタイムを仮定すれば5倍強の感度改善が見込まれる。

付録 A　　(2.4) における近似について

(2.4) を再び書く。

$$b(\boldsymbol{q}) \;=\; b_c(\boldsymbol{q}) + [I(I+1)]^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{q}) \cdot \boldsymbol{I} + ib_s(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$$

1 項目については 2.2 にて述べたので、残りの 2 項について述べる。

第二項は以下のように書きなおすことができる。

$$\begin{aligned} 2\text{項目} &= [I(I+1)]^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{I} \\ &= [I(I+1)]^{-1/2}\boldsymbol{\sigma}\cdot[b_{N_i}\mathbf{1} - \sqrt{I(I+1)}gb_F(\mathbf{1}-\hat{\boldsymbol{q}}\hat{\boldsymbol{q}}^t)]\cdot I \end{aligned}$$

ここで [17] より、$b_{N_i} = 0\text{fm}$、$b_F = -1.47\times10^{-3}\text{fm}$、g〜0.9 であることから

$$2\text{項目} \le -2gb_F I = 2.64I\times10^{-3}\text{fm}$$

となる。これは $b_s \sim 10^{-1}\text{fm}$ と比べても十分小さいのではじめから無視することにする。

第 2 項目を無視し、第 1 項目、第 3 項目を詳しく書くと、(2.4) は次のように書くことができる

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{q}) &\approx b_c(\boldsymbol{q}) + ib_s(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}} \\ &= (b_{N_c}+b_P) - (b_F+b_I)Z[1-f(\boldsymbol{q})] \\ &\quad + ib_F Z[1-f(\boldsymbol{q})]\cot\frac{\theta}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

ここで、(2.9) に加え η を次のように定める

$$\eta = \frac{b_F Z}{b_{N_c}+b_P} \sim 1.7\times10^{-2} \qquad \text{(A.2)}$$

この (A.1) の 2 乗に対してスピン平均を取ると次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left\langle \left|b\right|^2 \right\rangle \\ &= (b_{N_c}+b_P)^2\{1+2\chi[1-f(\boldsymbol{q})] + [\chi^2+\eta^2\cot^2\frac{\theta}{2}](1-f(\boldsymbol{q}))^2\} \end{aligned}$$

1 項目は等方散乱による寄与、2 項目は ne 散乱の 1 次の寄与、3 項目の χ^2 の項は ne 散乱の 2 次の寄与であり η^2 の項は Schwinger 散乱による寄与で

ある。これらの強度比を示したものが以下の図である。ただし、等方散乱による寄与が 1 になるように規格化してある。

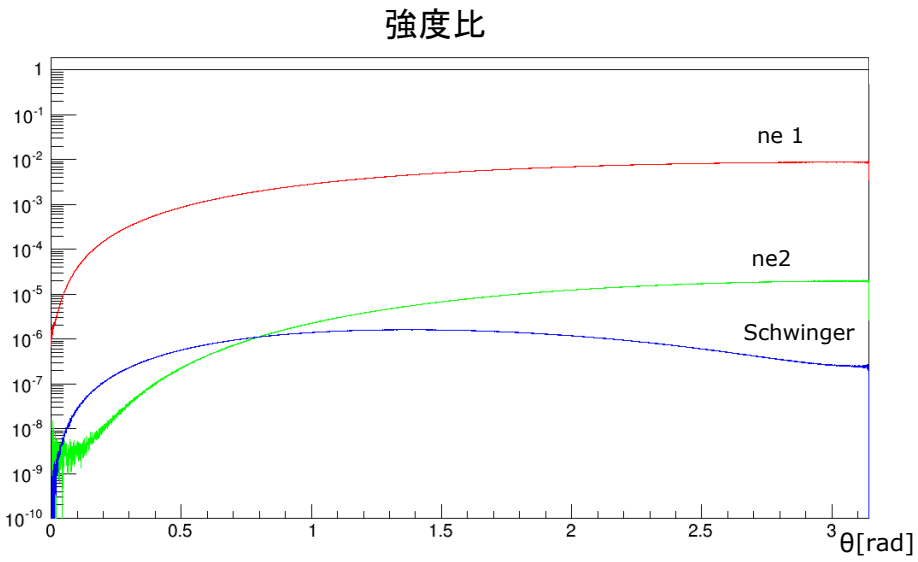

図 1.1: 各散乱様式の強度比

この図に示されたとおり、ne 散乱の 2 次の寄与及び Schwinger 散乱による寄与は、ne 散乱の 1 次の寄与と比較しても十分小さいといえるので無視できる。

付録B　　(3.18) の近似について

$$
\begin{aligned}
&\frac{\text{原子核の内側の影響を考えたもの}}{\text{原子核の内側の影響を無視したもの}} \\
= \;& \frac{\dfrac{-2m_n}{q}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r)}{\dfrac{-2m_n}{q}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r)} \\
+ \;& \frac{-\dfrac{-2m_n}{q}\displaystyle\int_0^R \frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r) + \dfrac{-2m_n}{q}\displaystyle\int_0^R \frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(r<R)}{\dfrac{-2m_n}{q}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\beta m_n}{M_{pl}} r\sin qr\phi_1(R<r)} \approx 1
\end{aligned}
$$

つまり、

$$
\frac{\displaystyle\int_0^R r\sin qr\phi_1(R<r) - \int_0^R r\sin qr\phi_1(r<R)}{\displaystyle\int_0^\infty r\sin qr\phi_1(R<r)} \ll 1 \qquad \text{(B.1)}
$$

であれば (3.18) は妥当であるといえるので、これを示す。まず、分母は
次のようになる。

$$
\int_0^\infty r\sin qr\phi_1(R<r) = -\frac{\beta m_{Xe}}{4\pi M_{pl}}\frac{q}{m_c^2+q^2}
$$

分子は次のようになる。ここで、$m_cR \ll 1, m_cr \ll 1$ であることに注意。

$$
\begin{aligned}
& \int_0^R r\sin qr[\phi_1(R<r) - \phi_1(r<R)] \\
= \;& \int_0^R r\sin qr\frac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}m_c^2}[\frac{e^{m_c(R-r)}}{m_cr}(\frac{\tanh m_cR - m_cR}{1+\tanh m_cR}) - \frac{(1+m_cR)e^{-m_cR}\sinh m_cr}{m_cr} + 1] \\
\approx \;& \int_0^R r\sin qr\frac{\beta\Delta\rho}{M_{pl}m_c^2}[(\frac{1}{m_cr} - 1 + \frac{m_cr}{2})(-\frac{m_c^3R^3}{3} - \frac{m_c^5R^5}{30}) - (1-\frac{m_c^2R^2}{2})(1+\frac{m_c^2r^2}{6}) + 1] \\
\approx \;& \int_0^R r\sin qr\frac{\beta\rho_p}{M_{pl}}[\frac{r^2}{2} - \frac{R^3}{3r} - \frac{R^2}{6}] \\
= \;& \frac{\beta\rho_p}{M_{pl}}\frac{-q^3R^3 + (4q^2R^2-9)\sin qR + 9qR\cos qR}{3q^4}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
qR = 2kR\sin\frac{\theta}{2} \le 2kR = 2\frac{2\pi}{5[\text{Å}]}6.09[\text{fm}] \ll 1
$$

であることに注意して、(B.1) の左辺について考えると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\dfrac{\beta\rho_p}{M_{pl}}\dfrac{-q^3R^3+(4q^2R^2-9)\sin qR+9qR\cos qR}{3q^4}}{-\dfrac{\beta m_{Xe}}{4\pi M_{pl}}\dfrac{q}{m_c^2+q^2}} \\
&= -\frac{(m_c^2+q^2)[-q^3R^3+(4q^2R^2-9)\sin qR+9qR\cos qR]}{R^3q^5} \\
&\to 0 \quad (qR\to 0)
\end{aligned}
$$

従って、(B.1) が成立しているといえるので (3.18) は妥当であるといえる。

参考文献

[1] E.G. Adelberger, B.R. Heckel, and A.E Nelson, Annu. ReV. Nucl. Part. Sci. 2003. 53. 77-121

[2] E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, B.R.Heckel,S. Hoedl, S. Schlamminger, Progress in Particle and Nuclear Physics 62 (2009) 102-134

[3] M.Bordag, U. Mohideen, V.M. Mostepanenko, Physics Reports 353 (2001) 1-205

[4] R.S. Decca, D. Lpez, H.B. Chan, E. Fischbach, D.E. Krause, and C.R. Jamell, Phys. Rev. Lett. 94, 240401 (2005)

[5] A.O. Sushkov, W.J. Kim, D.A.R. Dalvit, and S.K. Lamoreaux, Phys. Rev. Lett. 107, 171101 (2011)

[6] M. Masuda and M. Sasaki, Phys. Rev. Lett. 102, 171101 (2009)

[7] Andrew A. Geraci, Sylvia J. Smullin, David M. Weld, John Chiaverini, and Aharon Kapitulnik, Phys. Rev. D 78, 022002 (2008)

[8] D.J. Kapner, T.S. Cook, E.G. Adlberger, J.H. Gundlach, B.R. Heckel, C.D. Hoyle, and H.E. Swanson, Phys. Rev. Lett. 98, 021101 (2007)

[9] Shan-Qing Yang, Bi-Fu Zhan, Qing-Lan Wang, Cheng-Gang Shao, Liang-Cheng Tu, Wen-Hai Tan, and Jun Luo, Phys. Rev. Lett. 108, 081101 (2012)

[10] Yu.N.Pokotilovski, Physics of Atomic Nuclei, 2006, vol.69,924-931

[11] V.V.Nesvizhevsky, Phys. Rev. D77, 034020 (2008)

[12] Y. Kamiya, K. Itagaki, M. Tani, G.N. Kim, and S. Komamiya, Phys. Rev. Lett. 114, 161101 (2015)

[13] Justin Khoury and Amanda Weltman, Phys. Rev. D69, 044026 (2004)

[14] W M Snow, M Arif, B Heacock, M Huber, K Li, D Pushin, V Skavysh and A R Young, Journal of Physics: Conference Series 578 (2015) 012009

[15] T. Jenke, G. Cronenberg, J. Burgdrfer, L.A. Chizhova, P. Geltenbort, A.N. Ivanov, T. Lauer, T. Lins, S. Rotter, H. Saul, U. Schmidt, and H. Abele, Phys. Rev. Lett, 112, 151105(2014)

[16] V.F. SEARS,Physics Report 141, No.5(1986) 281-317

[17] Albert-Jose Dianoux and Gerry Lander, "NAUTRON DATA BOOKLET SECOND EDITION", OCP science (2003)

[18] K.A. Olive (Particle Data Group), Chinese Physics. C38, 090001(2014)

[19] Young-Soo Han, Sung-Min Choi, Tae-Hwan Kim, Chang-Hee Lee, Sang-Jin Cho, Baek-Seok Seong, NuclearInstruments and Methods in Physics Research A 721(2013)17-20

[20] S.M. Choi, J.G. Barker, C.J. Glinka, Y.T. Cheng and P.L. Gammel, J. Appl. Cryst. (2000). 33, 793-796

[21] S. Gubser and J. Khoury, Phys. Rev. D70, 104001 (2004)

[22] Amol Upadhye, Steven S. Gubser, and Justin Khoury, Phys. Rev. D74, 104024 (2006)

[23] D.F. Monta and D.J. Shaw, Phys. Rev. D75, 063501 (2007)

[24] E.G. Adelberger, B.R. Heckel, S.Hoedl, C.D Hoyle, and D.J. Kapner, Phys. Rev. Lett. 98, 131104 (2007)

[25] David F. Mota and Douglas J. Shaw, Phys. Rev. Lett. 97, 151102 (2006)

[26] Ivaylo Zlatev, Limin Wang, and Paul J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 82, 896 (1999)

謝辞

たくさんの方の協力があって本研究を行うことができました。指導教官の駒宮幸男教授には、丁寧かつ熱心な指導を賜りました。不真面目な学生ではありましたが丁寧にご指導いただいたことに感謝します。神谷好郎助教には、研究についてはじめから丁寧にご指導をいただきました。右も左も分からなかった自分に丁寧なご指導を頂いたことに感謝します。駒宮研究室の加納勇也さんには、物理についての議論などに付き合っていただきました。関わりの薄いテーマを研究しているにもかかわらず、議論に付き合っていただいたことに感謝します。駒宮研究室の皆さんにはミーティングなどで助言や質問を頂くなど、その他毎日の研究室生活で大変お世話になり、感謝しています。最後に、本研究に関わったすべての方々に感謝御礼申し上げます。