コライダー実験におけるベル不等式の検証とエンタングルメント測定

陳詩遠 (Shion Chen)

修士論文

2014 年 2 月 26 日

目 次

概要

我々の世界は量子論でしか記述できないのか, あるいは拡張した古典論によって再現されうるか. ベル不等式はその問いに対する最も有用な実験的判別式として知られている. 主に光子を用いた実験においてその破れは既に多数確認されているが, 破れの普遍性という観点から光子以外の様々な系で同様の実験が望まれる. これには技術的な困難が高くまだ例は少ない.

高エネルギーコライダー実験は, 生成される不安定粒子がエンタングル状態のソースとなること, その崩壊の様子からスピンの情報を取得できること, 様々な粒子・相互作用を含むことからベル不等式の破れの普遍性を検証できる系として注目されている. 特にチャーもニウムおよび τ レプトンの崩壊は 1970 年代から理論的に議論されており, 実際の実験での結果が期待されている. 本論文では実験の設計を一通り吟味した上で理論的な基礎にも立ち返り, この実験により適したベル不等式の定式化および現在および将来計画されているコライダー実験における感度を見積もった. 具体的には以下の 5 つの生成・崩壊チャネルを用いて, 量子力学が正しかった場合にベル不等式の破れが確認できるかを調べ,

- $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $Z/\gamma^* \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu\pi^+\bar{\nu}$
- $H \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu_\tau\pi^+\bar{\nu}$

さらに解析の結果, $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ 以外のチャネルでベル不等式は破れ, 潜在的に実験で検証が可能であること, また $\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ の 2 つのチャネルでは既存のコライダー実験のデータで十分感度があり, それぞれ 2σ, 3σ の有意度でベル不等式の破れが確認できるをことを示した.

The eye sees only what the mind is prepared to comprehend.

Henri Bergson

第1章　背景と導入

量子力学は 1920 年代に確立されて以来古典論で記述が困難だったミクロスコピックな現象をことごとく説明し, 今日まで続く大きな発展の一方で反例も確認されていない, 極めて成功している理論体系である. しかしその基礎の成立は、その応用における輝かしい成功ほど straightforward なものではない. 観測するまで本質的に物理量は決まった値を持たないという性質（非実在性）, 観測によってはじめて物理量が確定した状態へと変化するという ad hoc に思える解釈（射影仮説）は当初から正当性を疑われ続けてきた. さらにこの理論は非局所的な性質を予言せざるを得ないことを, A. Einstein らによる EPR 論証を通じて明らかになった. 局所性は, 実在性と同じように直感と経験則によって支えられた概念ではあるが, 我々の自然への理解を積み立てる上で暗に拠ってきた重要な要素の一つである. 量子力学と, この経験的洞察の乖離は決定的である.

この世は本当に非実在的で非局所的な描像でしか理解できないのか, あるいは量子論は現象論にすぎず, 原理的には古典の再定式化で再現されうるものなのか. この問題は長い間もっぱら哲学論争の域を超えなかったが, 1960 年代に J. S. Bell によって発見された不等式によって実証科学の土俵に引っ張り出されることとなった. ベルの不等式は 2 粒子間の相関（特にスピン相関）について, 局所性と実在性の要請から直ちに導かれる不等式である. 一方で量子論ではエンタングル状態などこれを超えた大きな相関を持つ系が存在するが, ベル不等式が素晴しいのはそれが実験でテストできるという点である. つまに量子力学で不等式を破る系を実現し, そこで 2 粒子の相関を測れば白黒がつけられる. そして実験で不等式が破れた暁には, 我々はいよいよ常識的な自然観との決別を覚悟しなければならなくなった.

光子対を用いた実験が多数行われ, 結果はおしなべて量子論を強く示唆し大勢は意外とあっさり決した. 実験の不完全さがある分古典論は完全には死んではいないが, 新しい実験のアイデアや実験技術の進歩によって近年はそれも克服されてきている. さてこの調子ではもうやることがないように思える. しかしこの後に本論が 80 ページ潜んでいることからわかるように, これで終わりということはない. 例えばベル不等式の実験は光子の系では非常によくテストされているが, 質量を持っている粒子の系ではまだ実験例が少なく用いている仮定も多い. 一般的に重い粒子は古典性が強く, そういった系でも量子論を全面的に支持する結果が出るかというのは興味深い問題である. またそれを実現するエンタングル状態の性質など, 量子力学に対する理解を深める文脈の研究は今日においても意義がある. 本研究は, コライダー実験という比較的新しい環境と手法でベル不等式を検証することを通じてこれらのテーマにアプローチするのが目的である.

本論文の全体の構成は以下の通りである. まず本章では以下では背景のより詳細な導入を行う. 用語の定義をはじめ, EPR の議論と隠れた変数理論の考案に至る動機, ベルによる不等式の発見とその後の実験による検証の歴史のレビュー, そしてコライダー実験における新しい実験が何を新たにもたらすのかを説明する. 第 2 章では提案実験の設計を述べる. 粒子の崩壊を通じてスピンを測るメカニズム, 通常の測定との共通点と相違点を議論し, このオモチャがベル不等式の検証にどう使えるかを吟味する. 第 3 章では今回考えている実験系のためのベル不等式を実際に作る. なるべく少ない仮定で簡潔な不等式の定式化を目指した. 第 4 章は前章で作った不等式を, 候補としている系で実際に量子力学で破ることを示す. 最後の 5 章では現有の実験および将来計画を俯瞰し, 不等式を破る系で実験感度が期待できるかを議論する.

1.1　スピン, エンタングルメント, EPR 問題

この節ではまずスピンの性質を, 特に後の議論に使う部分にのみ絞って導入する. また 2 粒子系でのスピンについて議論を拡張してエンタングル状態を定義し, そこで立ちどころに顕われる非局所性を EPR の論証を通じて示す. 最後に量子論 (QM; Quantum Mechanics) に代わって局所性原理守る古典的な描像の隠れた変数理論を導入し, これが EPR パラドックスをどう回避するかを議論する.

1.1.1　量子力学におけるスピンの記述

スピンとは粒子自身が持つ内部角運動量である. QM では軌道角運動量と同様, 量子化された離散的物理量であると同時に方向という連続的な性質も定義できるのが特徴である. 簡単のためスピン 1/2 の例を考えると, 任意の方向 $\boldsymbol{n}$ に対しスピンの状態は必ずそれに対して平行・反平行の 2 つの固有状態; $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$ の重ね合わせで書ける:

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle + c_2 |\downarrow\rangle . \tag{1.1.1}$$

[1] また別の $\boldsymbol{n}$ を取り直しても, 係数 c_1, c_2 は変わるものの, この表式 (1.1.1) は変わらない. スピンは常に取った任意の軸の方向に向いているか, 逆方向かのいずれかである. そしてその状態の表示は軸 $\boldsymbol{n}$ の取り方に依存する. この軸を今後量子化軸と呼ぶことにする.

1 粒子のスピンには偏極ベクトルという特別な方向が定義できる. すなわち

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$

となるような量子化軸が必ず取れ, それがスピンの方向の固有状態, または偏極ベクトルの方向である. スピン演算子 $\boldsymbol{\sigma}$ はそれぞれの成分が非可換

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \qquad (i, j, k = 1, 2, 3)$$

なため, 3 成分同時に値が決定しているわけではないが, こういった固有の方向が取れるのは面白い. 以下"スピンが $\boldsymbol{n}$ の方向を向けている"という表現は偏極ベクトルが $\boldsymbol{n}$ であるという意味で使うことにする. この偏極ベクトルは現象論的には古典スピンに対応していて, 磁気モーメント $\boldsymbol{\mu}$ は $\boldsymbol{n}$ に平行である.

偏極ベクトル $\boldsymbol{n}$ は以下の関係式を満たす方向として決定される.

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) |\psi\rangle = |\psi\rangle$$

$\boldsymbol{\sigma}$ はパウリ行列である. これを解くと (θ, ϕ) という方向に偏極ベクトルがあるスピン状態は, z 軸を量子化軸とした表示では

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle_z + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |\downarrow\rangle_z \tag{1.1.2}$$

となる. 添字はこの $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ が基底として取っている量子化軸の方向を表している.

[1] スピン 1 以上の場合は, "スピンの $\boldsymbol{n}$ 成分が $\boldsymbol{n}$ に平行, および反平行な状態" となる

次に測定について簡単に導入を行う．まず QM における測定は通常以下で述べるような “射影測定” という枠組みで定式化される．測定する物理量 A とそれに対応する線形演算子 $\hat{A}$ を考える．被測定系は一般に A の値について重ね合わさった状態:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle$$

である．a_i は A の取れる値 ($\hat{A}$ の固有値) であり離散的でも連続的でも構わない．$|a_i\rangle$ は固有値 $a = a_i$ に対応する固有状態である．この状態に対して測定を行って測定値 $a = a_0$ を得たとする．このとき測定を通じて状態は以下のように射影される:

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \quad \rightarrow \quad c_0 |a_0\rangle .$$

これは, ”測定された値の結果と consistent になる状態成分のみ残り, それ以外の状態成分が消える” ということである．書き換えると

$$|\psi\rangle \rightarrow \langle a_0|\psi\rangle |a_0\rangle .$$

この射影のメカニズム自体には QM は説明せず単に要請している [1] [2].

$a = a_0$ という測定値が得られた場合の状態の変化は記述できたが測定値はどう決まるのか．これについても QM は説明する機構を提供しない．代わりに $A = a_0, a_1, \ldots$ が出る確率は Born の確率規則 [2]

$$P(a_i) = |c_i|^2$$

として通常の量子力学の構成においては要請される．このような”測定するまで物理量は決まった値を持たず, 測定すると状態が射影され物理量の値が決まる” という解釈は通常” コペンハーゲン解釈” と呼ばれる．これと対比をなす解釈として多世界解釈 [3] が知られているが, 現段階ではこれらは等価だと考えられている．

スピン測定は粒子の性質に応じて色々なものが考えられるが, Stern-Gerlach 装置 (SG 装置) [4] を用いたものが思考実験において想定される最も代表的な方法である．本章でも特に断りがない限りこのスピン測定法を常に念頭に置くことにする．不均一磁場とスピンの磁気モーメントの相互作用によって入射粒子の運動方向を曲げ, その軌道がスピンに依存していることを利用している測定法である (図 1.1)．磁気モーメントと磁場の相互作用ポテンシャルは

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$$

であり, スピンを持つ粒子が受ける力は偏極ベクトル $\boldsymbol{s}$ を用いると

$$F_z = \boldsymbol{\mu} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z} \propto \boldsymbol{s} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial z}$$

と書ける．したがって磁場の方向 z に対して勾配を持っている不均一磁場を使えば軌道を曲げることができる．[3] 歴史的にはこの実験で入射した銀原子の軌跡が連続ではなく 2 つのルートに分裂していることが確認され, スピンが量子化されていることが発見された．これを射影測定の言語で記述すると以下のようになる．

入射したスピン 1/2 の粒子は任意の方向にスピンを向けている．ここで量子化軸を磁場 $\boldsymbol{B}$ の方向に取ると

$$|\psi\rangle = c_1 |\uparrow\rangle_{\boldsymbol{B}} + c_2 |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{B}} .$$

[2] この状態ベクトルが射影される現象は他にも”波束の収縮””状態の収縮” など様々な呼び方があるが本論文では”状態の射影” という表現を用いる．

[3] 粒子の”軌跡” という描像はやや古典論的ではあるが, 用意する粒子のビームをコリメートし, 位置の広がりを装置の大きさに比べて十分小さくすれば議論に支障はない [5].

この状態 $|\psi\rangle$ は磁場との相互作用 (測定) を通じて

$$|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{B}} \qquad\qquad |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{B}}$$

のどちらかに射影される．特筆すべきは, これらの偏極ベクトルは磁場の方向 (逆方向) を向いているということである．磁場をどの方向に変えてもこの性質は同じである．つまりスピンを測定方向に倒すことができるということになる．この性質が次節で 2 粒子系に拡張した際に大変なことを予言することになる．なお今後 SG 装置における議論ではこの測定の方向を今後”測定軸” と呼ぶことにする．測定でスピンが測定軸の方向かその逆方向になるかは観測者にはコントロールできない．それらは Born の確率規則に従ってそれぞれ

$$|c_1|^2, \qquad |c_2|^2$$

の確率で起こる．

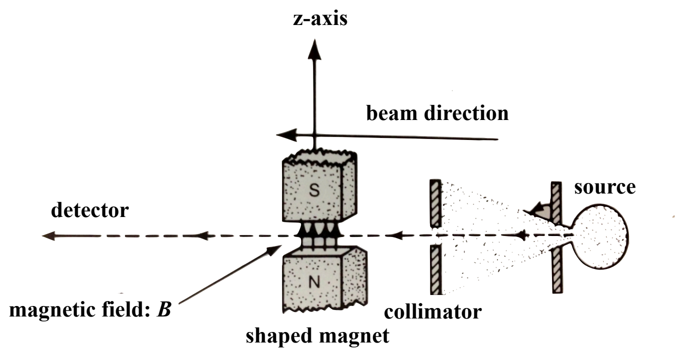

図 1.1: Stern-Gerlach 装置とその実験 [5]．磁石の片方の極を尖らせることによって磁場の方向に勾配を作り, 粒子はこの磁場との相互作用を通じて自身のスピンをはっきりさせる．

1.1.2　エンタングルメントと遠隔作用

さてスピン 1/2 の粒子が 2 つあるケースを考えてみる．まず 2 粒子状態は

$$|\psi\rangle^1 |\phi\rangle^2 \tag{1.1.3}$$

のような, それぞれの粒子についてのヒルベルト空間の直積空間の元として定義する．ケットの上付き添字はそれぞれ粒子 1, 2 の状態空間の元であることを表すが, 特に混乱がない場合は今後省略することにする．すなわち直積は常に左が粒子 1, 右が粒子 2 のケットと約束する．

これらの粒子が合成スピン 0 の状態を組んでいる場合を考える．そのときのスピン状態は, 前節の表記法を延用すると

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1.1.4}$$

である．この状態を以降はスピン 1 重項状態と呼ぶことにする．この状態は色々な意味で面白い．まず量子化軸をどの方向に取ってもどう取っても状態は (1.1.4) という表示を保つ．これはスピン 0 状態は特別な方向を持たず, 状態が回転不変性を有していることの表れである．さらにこの状態では各々の粒子について偏極ベクトルを定義できない．量子化軸をどの方向に取っても状態の表示は $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ を両方を必ず含むため, ある方向の

固有状態にはできないからである．またこの状態は上の (1.1.3) のように, それぞれの粒子についてのケットの直積には分解できない．このいわゆる直積分解不可能状態が"エンタングル状態"である．一方 (1.1.3) のように直積分解ができる状態を積状態と呼ぶ．

状態がそれぞれの粒子のケットの積に分解できないという性質は現象論的には何を意味するか．ここで以下のような思考実験を考える．スピン 1 重項状態の 2 粒子 (1, 2) がある場所に発生し, それぞれが反対方向 ("back-to-back") に自由空間の中を飛んで行く．お互いのスピンの飛んで行く方向に 2 人の観測者 Alice と Bob を置き SG 装置を 1 台ずつ分け与える．Alice と Bob は空間的に非常に離れた場所にいるとする (図 1.2)．まず Alice が粒子 1 のスピンを, SG 装置の磁場を $\boldsymbol{n}$ 方向にして測定する．その結果を↑としたとき 2 粒子のスピン状態は

$$|\Psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad \to \quad \frac{|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}}|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}}}{\sqrt{2}}$$

という射影を受ける．Alice が測った粒子 1 のスピンが $\boldsymbol{n}$ の方向を向くのは上で議論した通り射影仮説の帰結である．しかし粒子 2 のスピンはどうだろう．決まっていなかった粒子 2 の方向が, Alice の測定を通じて $-\boldsymbol{n}$ 方向に確定している．この直接測定を行っていない粒子の状態も射影するというのが, エンタングル状態の最大の特徴である．つまり Alice は磁場の方向 $\boldsymbol{n}$ を変えることによって, 意のままに遠く離れた粒子 2 のスピンを瞬間的に操ることができる．Bob は磁場を Alice と同じ $\boldsymbol{n}$ 方向にしてその後測定すると結果は必ず↓である．逆の場合も然りで Alice の結果が↓のときは Bob の結果は↑であり, 1.1.4 で表されるような完全相関を再現する．

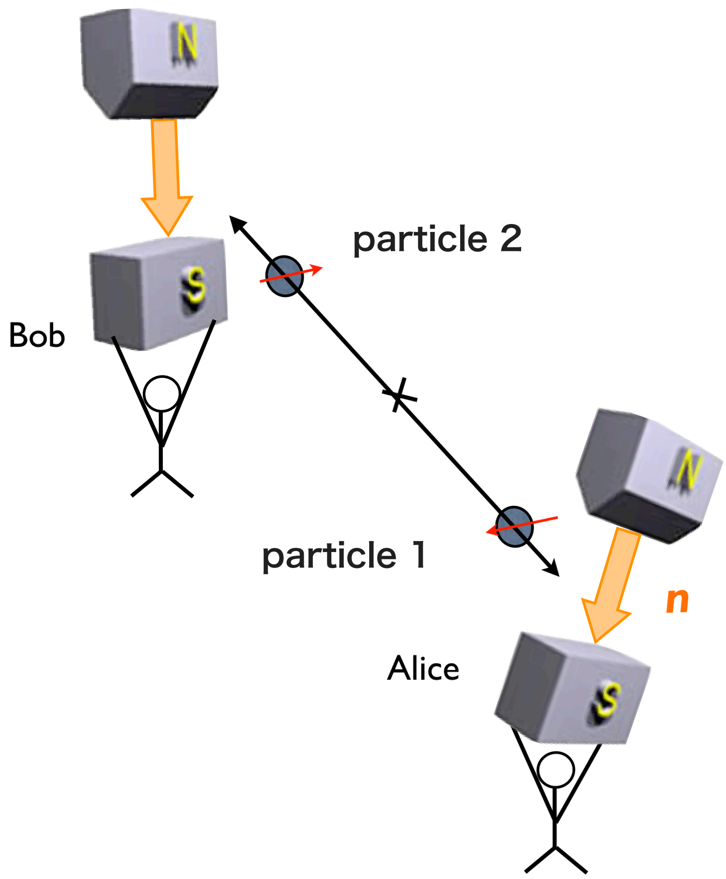

図 1.2: 2 粒子のスピンを測る思考実験．測定者 Alice と Bob はそれぞれ SG 装置を文字通り持っている．Alice が磁場を $\boldsymbol{n}$ の方向に定めてまず粒子 1 のスピンを測る．またこの図は一部 [6] を転用している．

この"瞬間的な作用"というのが大問題である. つまりこの"粒子 2 のスピンを確定させる"作用は, 2 粒子がどれだけ離れていても時間差 0 で起こる. これがいわゆる非局所的な作用であり, 明らかに我々の通常の物理の描像 - 以下で述べるような, 局所性を持っている物理を通じた物事の理解に反している.

局所性原理

ある空間点における要素は, それから空間上で遠く隔たった点における変化によって即時的に影響されない

つまり局所性を満たす物理では, 物事は全てその近傍とのみ相互作用し影響を及ぼし合う. そして空間上で隔てられたものへの影響は必ず"伝搬"という形で, 有限の時間をもって連続的に与えられる. 決して隔たった 2 点が直接作用することはない. これはいわゆる遠隔作用に対する"近接作用"の反論, 哲学そのものである. 局所性およびそれに支えられた近接作用が, 非局所性や遠隔作用を許した物理観より優れている点はおおまかに以下のようなものが挙げられる.

- "物体は接触によってのみ作用し合う"という見方は物事の直感的な可能にする. この"接触理論"というものはあくまで経験則にすぎないが, この複雑な世界を単純化する上で非常に有用な指導原理である.
- 系をどのように制限しても, その外部の要素との直接の相互作用が原理的に可能となる. つまり真の意味で孤立系を定義することが不可能であり, well-define な理論・実験の可能性が脅かされることになる.
- 瞬間的な長距離相互作用があると, 単純で予測可能な世界のモデルを構築することがはるかに困難になる. 例えば局所性がある物理は, 各点の一瞬先の状態はその近傍の状態で決まるが, 非局所性を許すと全ての空間点の状態に依るので, 依存性のパターンは極めて複雑になる. そのような無限にあり得る依存性のパターン中から必然性の高いものを選択することはほぼ不可能である.

歴史的にもこのような背景からニュートン力学に代表される遠隔作用的な相互作用の記述から, ファラデー的な場の伝搬を用いた近接作用の記述への転換が大きな努力を持って成し遂げられた. 以降の場の理論の成功と発展は, 局所性原理が単なる「わかりやすさ」による要請以上のものであることを示唆している.

この局所性原理の相対論的な拡張は容易である.

ある空間点における要素は, それと時空間上で隔たった点における変化によって影響されない

3 次元実空間を 4 次元的時空間に焼き変えただけであり, つまりは space-like な時空点の要素は互いに影響しないということである. Alice の測定で space-like に離れた時空点にいる粒子 2 の状態が変化するという上で考えた現象は明らかに局所性を破っている. 注目すべきはこれはエンタングル状態と射影仮説のみから導かれる結果であり, 他の物理的ダイナミクスが原因となる余地がないということである. 例えばここでの議論は粒子 1 と粒子 2 の間の相互作用を考えなくとも成立するのでそれは原因にはならない. 一方でエンタングルメントと非局所性という 2 つの概念はしばしば混同して扱われることがある. 通常エンタングルメントは積に分解できないという代数的な構造のみを指し, 非局所性は (1.1.4) のようなエンタングル状態の干渉が, 互いに space-like になっていても保持されるという物理的な解釈であり, これらは概念のレベルで相違がある. 通常の QM では「エンタングル状態は非局所性を示す」 という命題は正しい. またこのスピン・エンタングル状態の干渉性は, 位置についての干渉, すなわち波動関数の重なりではないというところが面白い. つまり粒子の自由度は完全に局在していてもこのような重ね合わせが生じ, 粒子間に非局所的な不気味なリンク ("spooky link") が発生するのである.

1.1.3 非局所性と因果律

非局所性は一見すると因果律に反しているように見える．事実”光速を超えた相互作用”とみなされることがしばしばあるが, この糾弾はあまり的を得たものではない。このような超光速伝達は”作用は必ず局所的に起こり, その影響が有限時間をかけて伝搬する” という近接作用の物理の考え方であり, 非局所性というのはそうではなく遠隔作用のようなものである．つまり Alice の測定器は粒子 2 に向かってジワジワと影響を伝えるのではなく, 直接粒子 2 に影響を与えているという描像である．

ただしこの非局所性は遠隔作用と直ちに決めつけることはできないことも指摘せねばならない．ここまでは Alice が先に粒子 1 を測定し, 粒子 2 のスピンが瞬時に決まるという順序であったが, これを相対論的に考えた場合どうなるだろうか．もし Alice と Bob の測定が, 時空間的に離れた, 互いに測定したという情報を交換できないタイミングで行われた場合 (space-like), 別の適切な慣性系を選ぶことによってその時間順序を逆にすることができる (図 1.3)．そのような系では Bob が先に粒子 2 を測定し, 粒子 1 のスピンが瞬時に射影されることになる．したがってこの射影を, ある対象同士の相互作用として考えた場合 (図 1.4 左), 物理のローレンツ不変性と矛盾する可能性がある．これを回避するには, 粒子それぞれの物理自由度を認めず一つの系としてまとめて扱い, 射影もかどちらかの測定器との相互作用ではなく, 両方の測定器からなる系との相互作用を通じて起こるという描像が適切だと考えられる (図 1.4 右)．この場合も局所性は破れている．

以上のようにローレンツ不変性と両立するためにはエンタングル状態の非局所性について可能な解釈に制限が加わる．我々もこのような遠隔作用を認めないスタンスを採用するが, 説明の便宜上, 一つの慣性系に立って”先に粒子 1 が測定されて粒子 2 のスピン状態が変わる”という言い回しの方が簡便なので引き続きこの表現を用いる．しかしこれは粒子 1 の測定が原因で粒子 2 の状態が変わるという描像を意識しているのではなく, 粒子 1 の測定が引き金になって 2 粒子系全体の状態が射影されるという意味で用いるということを, ここで約束しておく．

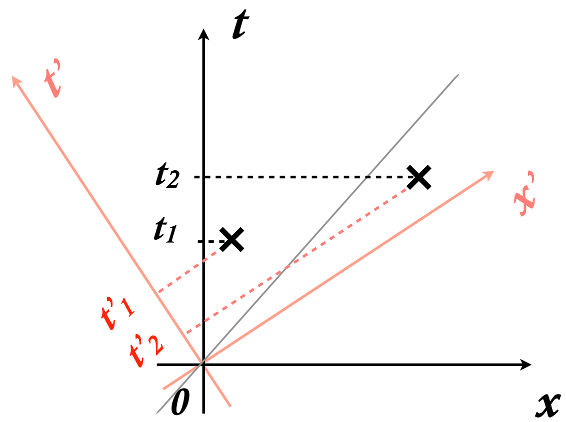

図 1.3: ある系（黒）で t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) という順番で起こっていた space-like な 2 事象は, 適切なローレンツ変換を行うことによって, 別の系（赤）では発生時刻がそれぞれ t'_1, t'_2 ($t'_1 > t'_2$) と時間が逆順となる．

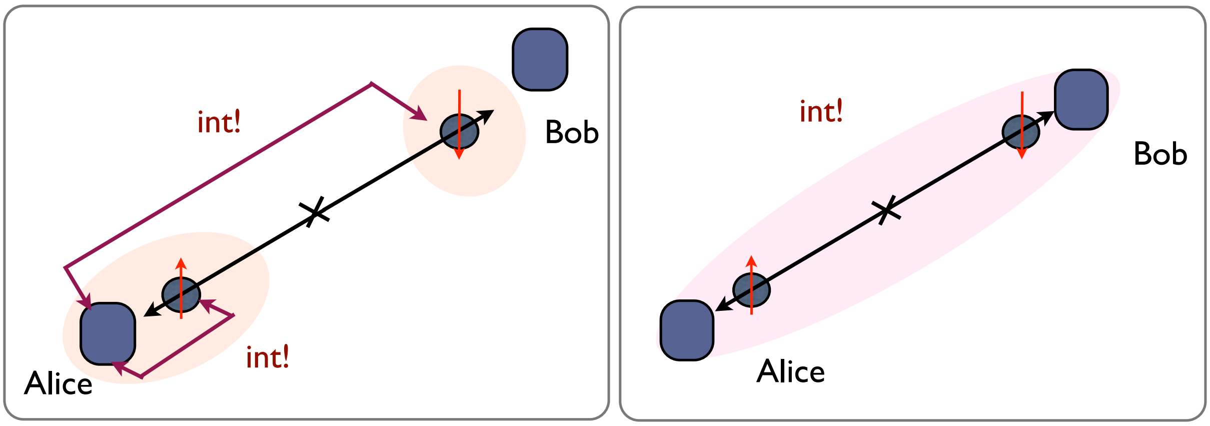

図 1.4: SG 装置の測定によって 2 つスピン状態が射影されるという現象を, 遠隔作用の描像で理解した場合 (左) と 粒子 2 つを一つの系とみなして全体が測定器系を相互作用するという描像で理解した場合 (右). 遠隔作用では測定器と各粒子が直接作用するという解釈になるが, 適切なローレンツ変換によって先に測定を行う測定器が変わるためローレンツ不変な記述になっていない可能性がある. 一方で右の描像では全体の波束がいっぺんに収縮するだけなのでローレンツ不変性との齟齬なないと思われる.

1.1.4　EPR 問題と Local Hidden Variable Theories

以上のように QM と局所性が共存しないことを最初に指摘したのはかの有名な Einstein-Podolski-Rosen (1935) [10] である. 正確には, 彼らの議論ではスピンの代わりに位置と運動量のエンタングル状態を考え[4], 上のような思考実験を用いて, 局所性と QM を仮定すると QM に内部矛盾（”不完全性”）が発生することを示したが本質的には同じである. 今後 1.1.2 章で述べた思考実験を EPR 思考実験と呼ぶことにする.

EPR 論証を通じて, 実在性に続いて QM は局所性まで失ったことが示され, これを機に QM の解釈を見直す動きがでてきた. 具体的には QM の論理構造を使用するが (”最小道具主義”; QM を, 測定値の量子化プロセスと Born の確率規則からなるアルゴリズムとして使う態度 [9]), 異なる解釈を採用することによって理論の実在性と局所性をまとめて回復することはできないかという試みである. 特に, 測定前の物理量の値について何が言えるかという, 実在性にまつわる点が主な争点となった. 今後の議論をはっきりさせるため, ここまで曖昧に使ってきた”実在”という概念をここで以下のように定義する. またこの節の以降の議論は文献 [9] を参考としている.

”実在”の要素

時刻 t における物理量の測定結果を, 確実に, あるいは, 確率 1 で予測できるならば, 時刻 t において物理量に対応する”実在の要素が存在する”と定義する. またそれは予測された測定結果に等しい値を持っている.

”実在性”を有する理論

測定可能な物理量が任意の時刻で, 全て実在の要素であるような理論を”実在性”のある理論, もしくは”実在的”な理論と定義する. ”実在”という概念は”実在性を有する理論”よりは大分広いものであり, 例えば QM でも, ある物理量 A の固有状態であるときは A が実在していると言ってよい. 当然実在性のある理論の方が常識に沿っていてありがたい.

[4] 歴史的にはこれが先であり, 後に D. Bohm(1952) [11] がスピンにおける同様の思考実験を考案して問題の本質を先鋭化させた.

QM の最小道具主義解釈において, 測定前の物理量の値 Q についての解釈には, 以下の 3 通りが考えられる.

A). Q は確定した, しかし, 知られていない値を持っている.
すなわち物理量はいかなる場合も実在の要素であり, QM アルゴリズムにおける Q の測定値のふらつきは我々の”無知”を反映したものであるという立場. この無知を特徴づける変数として隠れた変数 λ を導入し, この λ がランダムに分布すると考える. すなわち我々が毎回同じ系に対して測定を行って Q がふらついていると思っていたものは, λ が分布することによって系自体が毎回異なっていたにすぎない.

B). Q は確定はしていないが, ぼやけた値, 潜在性あるいは傾向性を持っている.
Q は確定していなくとも, Q の固有状態 $|q_i\rangle$ を基底として状態を展開したとき

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |q_i\rangle$$

係数 c_i から, どの q_i の潜在性が大きいかが読み取れる.

C). Q は定義できない, 無意味である.
これはいわゆる相補性という概念であり, B との違いは, $|c_i|^2$ の値は q_i が測定で出る頻度を表しても, 測定前の Q が q_i に近いということは意味しないということである.

B と C が QM の主流の解釈であり, 一般に物理量の実在性はないと考える. B と C の違いは, C では非実在性を苦し紛れの末出てきてしまった性質というニュアンスではなくより本質的な原理として採用するという立場で, ボーアをはじめとして支持されている.

A がほかでもない”隠れた変数理論”である. このアイデアは統計力学と全く同じであり, QM の Born の確率規則をそのまま対応させたものとなる. つまり Q は隠れた変数 λ によって決まる ($Q = Q(\lambda)$). 理想的な測定では測定前の Q と Q の測定値は同じである. したがって測定値の期待値は

$$\langle Q \rangle = \int d\lambda\, \rho(\lambda) Q(\lambda)$$

である. 系の状態は隠れた変数の確率分布 $\rho(\lambda)$ で特徴でけられる.

ではこの隠れた変数理論の立場で先ほどの思考実験を再評価してみる. すると今度は非局所性に頼ることなく現象を説明できることがわかる. つまり Alice が測定軸 $\boldsymbol{n}$ で粒子 1 のスピンを測定し, 粒子 2 のスピンが瞬時に変わったのではなく, 最初から 2 つのスピンがそれぞれ $\boldsymbol{n}$, $-\boldsymbol{n}$, もしくは $-\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ の方向を向いていると考えればよい.

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}} |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}} \qquad \text{or} \qquad |\psi\rangle = |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}} |\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}} \tag{1.1.5}$$

”事前に決まっていれば非局所性は発生しない”というのがこの隠れた変数理論の主張するところである. これで QM の結果は再現できるだろうか. スピン 1 重項状態 (1.1.4) では Alice はどの方向 $\boldsymbol{n}$ で測定しても $\uparrow$ と $\downarrow$ を等しい頻度で得るということを踏まえて, (1.1.5) でそれぞれが半々になるような混合状態を用意すればよい. 無理なく局所性を保ったまま QM の結果を再現できていることがわかる.

このように隠れた変数理論は局所性と実在性を回復できるポテンシャルがある. 実際に理論として QM と等価になるためにはこの他に色々なことを考える必要があるが（干渉現象の再現や, 交換しない物理量が同時に分散 0 の状態を持てない機構の用意など）技術的な問題だと認識されていた. このように局所性原理を満たした隠れた変数理論を LHVT (Local Hidden Variable Theories) と呼び, 上の立場 B (C) に代表される QM と異なるが, 潜在的に可能な解釈である.

1.2　ベル不等式

上の EPR 思考実験の考察の末, QM の最小道具主義的解釈において 2 つの立場; LHVT の立場と, コペンハーゲン解釈とはじめとする通常の QM の立場が取れることがわかった. LHVT の強みはなんといっても局所実在性という直感的な物理の描像を完全に取り戻している点である. しかし既存の実験を説明できるだけの具体的なモデルがない. 一方 QM は土台部分の理解が困難な代わり, それさえ認めれば全てがうまくいく.
J. S. Bell (1964) [12] はこれらが現象論的な違いがあること, 局所実在性は QM を再現し得ないことを示した. この節ではその定式化と現象レベルで本質的な違いが何かについて議論する. またここではベルのオリジナルの不等式ではなく, それを拡張した CHSH (Clauser-Horne-Shimony-Holt) 不等式 [13] を用いて説明する. 一部参考文献 [15] を参考にした.

再び EPR 思考実験に戻って, 今度はスピン測定値の相関について LHVT と QM はどういう記述をするかを考える. まず Alice が $\boldsymbol{a}$, Bob が $\boldsymbol{b}$ という方向に測定軸 (SG 装置の磁場) を設定したとしよう. そしてそれぞれその方向で測ったスピンの値を $A(\boldsymbol{a}), B(\boldsymbol{b}) = \pm 1$ とする. （± 1 はそれぞれ上の $\uparrow, \downarrow$ に対応する）相関はこれらの積の期待値であり

$$E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \langle\psi|A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b})|\psi\rangle = \langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})^1 \otimes (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})^2|\psi\rangle$$

スピン状態 $|\psi\rangle$ として 1 重項状態 (1.1.4) を考えると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})\,|\psi\rangle &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})^1 \otimes (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})^2 \left(|\uparrow\rangle^1_{\boldsymbol{b}}\,|\downarrow\rangle^2_{\boldsymbol{b}} - |\downarrow\rangle^1_{\boldsymbol{b}}\,|\uparrow\rangle^2_{\boldsymbol{b}}\right)/\sqrt{2} \\ &= (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a})^1 \left(-|\uparrow\rangle^1_{\boldsymbol{b}}\,|\downarrow\rangle^2_{\boldsymbol{b}} - |\downarrow\rangle^1_{\boldsymbol{b}}\,|\uparrow\rangle^2_{\boldsymbol{b}}\right)/\sqrt{2}\end{aligned}$$

上付き添字は粒子のラベル, 下付き添字は $\uparrow, \downarrow$ が表す量子化軸の方向を示している. $|\psi\rangle^\dagger = (|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{b}}\,|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{b}} - |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{b}}\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{b}})^\dagger\,\sqrt{2}$ を左からかけて

$$\langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})|\psi\rangle = -\frac{1}{2}\left(\langle\uparrow|\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{b}} + \langle\downarrow|\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{b}}\right)$$

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすると (1.1.1) より

$$|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{b}} = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{a}} + \sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{a}} \qquad |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{b}} = -\sin\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{a}} + \cos\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{a}}$$

よって

$$\langle\psi|(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{a}) \otimes (\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{b})|\psi\rangle = -\cos\theta = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.2.1}$$

一方 LHVT での基本戦略は QM と同じ予言をするということをあらゆる現象で証明することである. この場合は $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の関数形 (1.2.1) がそれにあたる. LHVT における $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は隠れた変数 λ とそれが従う確率分布 $\rho(\lambda)$ を用いて

$$E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \int d\lambda\,\rho(\lambda)A(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\lambda)B(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\lambda)$$

と書ける. これは最も一般的な形である. λ は複数あってもよいし, A や B の片方のみに含まれるものがあってもよい. ここで Alice と Bob は非常に遠く離れていて (図 1.5), 粒子 1, 2 の測定は space-like なタイミングを行われ, 互いに影響を及ぼさないことを仮定する (局所性原理). すると $A = A(\boldsymbol{a},\lambda)$, $B = B(\boldsymbol{b},\lambda)$.
1 つの $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ の組み合わせで測定した QM の $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 結果は, 前節の最後の議論したように LHVT でも再現できる. 従って別の軸の組み合わせ $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}), E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}), E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ についても測定を行い,

$$S = |E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})|$$

という量を考えてみる．まず任意の $-1 \leq x, y, x', y' \leq 1$ を満たす実数 x, y, x', y' に対して以下の代数不等式が成立する．

$$-2 \leq x(x'+y') + y(x'-y') \leq 2 \tag{1.2.2}$$

これの証明は簡単である．

$$\begin{aligned}
|x(x'+y') + y(x'-y')| &= \leq |x(x'+y')| + |y(x'-y')| \\
&= |x||x'+y'| + |y||x'-y'| \\
&\leq |x'+y'| + |x'-y'| \\
&= \pm 2x' \quad \text{or} \quad \pm 2y' \\
&\leq 2
\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

(1.2.2) に $x = A(\boldsymbol{a}, \lambda), y = A(\boldsymbol{c}, \lambda), x' = A(\boldsymbol{b}, \lambda), y' = B(\boldsymbol{d}, \lambda)$ を代入し，$\int d\lambda$ で積分すると

$$-2 \leq E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) \leq 2$$

すなわち

$$S = |E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})| \leq 2. \tag{1.2.4}$$

これがベル不等式を拡張した CHSH 不等式である．LHVT では S の値が 2 に制限される一方で, QM では一般にこれを破る．例えば (1.2.1) を代入し，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = 0$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c})/\sqrt{2}$, $\boldsymbol{d} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})/\sqrt{2}$ を満たすように取った場合,

$$S = 2\sqrt{2}$$

となる．同時にこれは量子力学で取れる最大値 (量子限界) でもある．

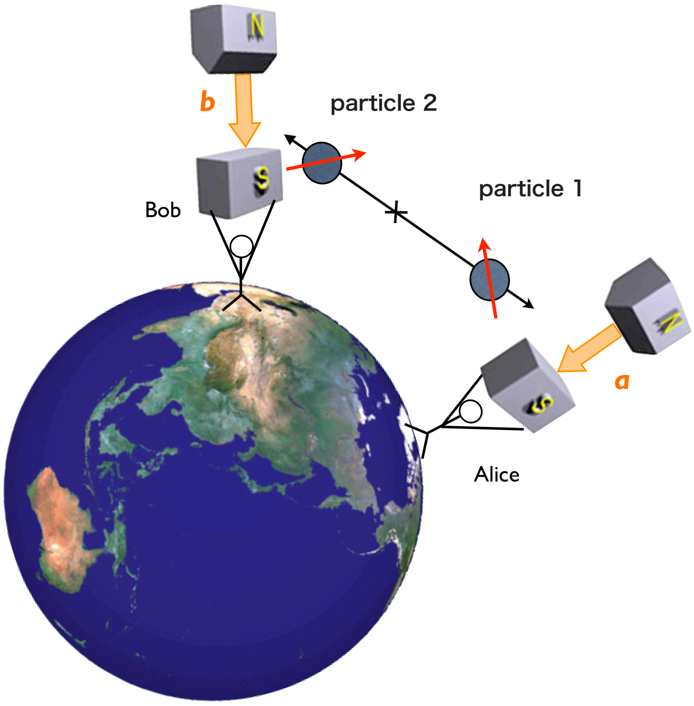

図 1.5: ベル不等式の定式化で想定している思考実験のイメージ．([6, 14] の一部を転用) 両測定者は局所性条件を保証するために十分離れた場所で測定を行う．この図で Alice はグリーンランド, Bob はアフガニスタン付近, スピンは宇宙空間を飛んでいるが, 両測定が space-like ならばどういう設定でも構わない．

1.3　これまでの実験

決着は実験に委ねられることになった．この節では代表的な光子の偏極のエンタングルメントを使った実験と, スピン 1/2 粒子を使ったより EPR の思考実験に忠実な陽子対の実験, コライダーにおける不等式検証実験の前例である $K^0\overline{K}^0$, $B^0\overline{B}^0$ 振動の実験を紹介する．なお一部 [16, 17] を参考にした．

1.3.1　光学実験

スピンのもっとも身近なソースは光子であり, 偏光という非常に測定のしやすい形でスピンを持っているためこれまで盛んにテストが行われてきた．Crauser, Horne, Shimony and Holt (1969) [13] が最初に実験デザインを確立し, 以降 Freedman and Clauser (1972) [19], A. Aspect *et. al.* (1982) [20, 21, 22], Y. H. Shih and C. O. Alley (1988) [23] など著名なものが多数ある．ここでは A. Aspect *et. al.* (1982) [21] の例で紹介する．

まずここでも用意する状態は 1 重項のエンタングル状態であるが, カルシウム原子のカスケード遷移で放出する 2 光子を用いた．これは高い純度のエンタングルメントを実現する光源である．図 1.6 は実験のセットアップを表している．光源の右側, 左側にそれぞれ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ の方向に偏光軸を置いた偏光フィルターを置き, それぞれの方向に飛んできた光子を方解石結晶のスイッチを用いて各偏光フィルターに誘導し, 透過した光子をその先に置いた PMT (光電子増倍管) で検出する．偏光フィルターでの透過・反射は SG 装置でのスピン測定

$\uparrow, \downarrow$ に対応するので, 左右の PMT の同期信号の頻度 $N(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とベル不等式の相関項 $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ に比例する. 上の CHSH の不等式

$$S = |E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})| \leq 2$$

は上限が 2 なので $N(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ と $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ の比例係数も正確に評価する必要があるため, こういった同期信号のレートを測定するタイプの実験ではあまり好まれない. 代わりに上限が 0 の CH74 型の不等式 [18]

$$\begin{aligned} S &:= E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}) - E(\boldsymbol{a}) - E(\boldsymbol{b}) \\ -1 &\leq S \leq 0 \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

を用いることが多い. これもまた CHSH 不等式と等価なベル不等式である. 実験の結果は

$$S = 0.101 \pm 0.020$$

で, 不等式 (1.3.1) の破れを 5σ の有意度で確認した.

このように光学の実験では統計量が桁違いに多いため大きな感度が出るのが特徴である. 一方でこういった原子のカスケード遷移で生じる光子は検出効率が低い. PMT の量子効率は約 20% であり, それの同期信号となると約 4% であり, さらに検出器のアクセプタンスなどの要因もあって, 検出される光子の割合は極めて低い. これが後で述べるような実験の穴となる.

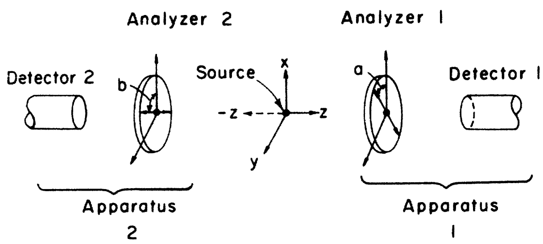

図 1.6: フォトン対実験の典型的なセットアップ [18]. 光源 (中央) から出たフォトン対は偏極がエンタングルしている. それぞれの方向の先に偏極フィルター (polarizer) と検出器がある.

1.3.2 実験不完全性 (“Loopholes”)

ベル不等式の破れを確認したと発表した実験は今日まで数えきれないほど多い. しかしベルの定理で仮定している実験条件を厳密に再現して不等式を破った例は存在しない. これらはみな何かしらの実験的な不完全さを抱えており, loophole と呼ばれる. つまり理想的な実験では LHVT は QM を再現し得ないが, 不完全な実験の下では再現できる”抜け穴的”LHVT が存在するため, これまでの実験は LHVT のサブグループを棄却したにすぎないということである. loophole は大きく分けて (i) efficiency loophole と (ii) locality loophole の 2 つに大別される.

Efficiency loophole
実験では偏光フィルターを通過する全ての光子を検出することは不可能なので, 通常は把握している範囲でバイアスを修正した上で, あとは検出されたイベントサンプルは全体のサンプルを代表していると仮定 (”homogeneous assumption”もしくは”no enhancement assumption” [18]) して解析せざるを得ない. しかし, これは一般には

反例があり, 検出されたイベントが非検出のイベントより系統的に相関 S が大きくなる LHVT のモデルは簡単に作ることができる. [25, 26] もっともこれらは今までに確認されたことのない相互作用などを仮定していて, 物理としては不可解なモデルであるが, あくまで homogeneous assumption の反例が存在するということを示す目的で提示されているものである. 大事なことなのでこういった揚げ足取りも意味があるということだ.

一般に有限の検出効率では, homogeneous assumption を課さなかった場合の CHSH 型ベル不等式 (1.2.4) は検出効率 ϵ を用いて以下のように修正される.

$$S = |E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})| \leq \frac{4}{\epsilon} - 2$$

量子限界が $2\sqrt{2}$ であることを考えると, $\epsilon > 2/(\sqrt{2}+1) = 0.83$ が少なくとも要求される. 不等式をさらに拡張し, 定式化に工夫を施すことによってこの限界は下げられる. 例えば Eberhard (1993) [27] の不等式の場合, 検出効率に要求される必要条件は, バックグラウンドが十分低い場合 $\epsilon > 0.67$ である.

偏光がエンタングルしたフォトンは通常エネルギーが低いため, この efficiency loophole はフォトン対実験が長年苦手とする分野であった. しかし近年に至るまでの実験技術や検出装置の発展によってこれらは少しずつ克服されてきており, 最近では効率 75% でベル不等式の破れを確認した例もある [28].

一方次章で紹介するような粒子を使った実験は検出効率が高い. 特にイオンを使った Rowe (2001) [29] が著名な例であり, 検出効率は 100% である.

Locality loophole

ベル不等式の定式化において, 最も大事な仮定は局所性条件

$$A = A(\boldsymbol{a}, \lambda) \qquad B = B(\boldsymbol{b}, \lambda)$$

である. 実験でこれを厳密に実現するには主に以下の 2 つの条件を満たさなければならない. (i) A, B の測定が時空間上で space-like な関係にあることが保証されていること (ii) 軸 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の向きの情報が粒子に伝わらないことを保証することである.

(i) は主に測定器と粒子の相互作用が反対側の粒子に伝わることがないということを保証する. 例えば SG 装置での測定では Alice が測った粒子 1 のスピンの向きが, Bob に測られる前に粒子 2 に伝わることができれば, QM において非局所的とみなされていた効果は原理的に LHVT によって再現できる.

(ii) の条件を満たさなければならないのは, LHVT が EPR 論証において強みを発揮する"事前に決まっていれば非局所性は発生しない"というコンセプトと関係がある. つまり粒子 1,2 が測られる前に軸 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ の方向がわかっていれば, QM の結果は常に再現できる. QM の非局所性が生み出す大きな相関は, LHVT では事前に状態を"準備"することによって説明されるということである. 実験においてこれを回避するには, 軸の決定を遅らせて両方の粒子にその情報が到達する前に測定を行えばよい. これは"遅延選択"と呼ばれている概念であり, これによって粒子の"準備作業"が整わない帰結としての弱い相関をあぶり出すことができる.
またこれに関連して軸設定の際に観測者の自由意志も保証されねばならない. なぜならもし $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の設定が独立ではなく, あるパラメータ ϕ を通じてお互いが関数関係

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\phi), \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}(\phi)$$
$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}(\phi(\boldsymbol{b})) \tag{1.3.2}$$

を持っていた場合は, 不等式の証明が成立しないことが容易に導ける [15].

フォトンの実験でこの条件をほぼ完全に[5] 実現した例は多数ある. Weihs (1998) [30] や Tittel (1998) [31] などが知られている. これらはそれぞれ光ファイバーを使って 2 つの検出位置を 400m, 10km 以上離して測定している. 近年では 144km のさらに長い距離をおいた実験も行われており [32], フォトン対実験の locality loophole に対する見通しは後から述べる粒子の実験よりははるかによい.

1.3.3 陽子対実験

質量のある粒子を用いた実験例は概ね 2 つのファミリーに分類される. 一つがスピンがエンタングした陽子対を用いたもの, もう一つが $K^0\overline{K}^0$ や $B^0\overline{B}^0$ のフレーバー振動を用いたものである. 前者はこれまでに M. M. Lamehi and W. Mitting (1972) [34] や H. Sakai (2006) [35] などの実験があるが, H. Sakai (2006) の実験をここでは例に説明する.

重水素をから生じた ^{2}He から自発分裂して生じる陽子対が純度の高いスピン 1 重項状態である. これを図 1.7 のように, イベント選択装置を通し, グラファイトのターゲットに散乱させる. 散乱する方向は陽子の偏極ベクトルに依るという性質があるので, 散乱方向からスピンの情報を読み取る. 検出器はターゲットの後ろに用意したホドスコープで, 通過した位置から陽子の方向を 3 次元的に測ることができる. この実験で使用したベルの不等式は CHSH 型 (1.2.4) のベル不等式である.

$$S = |E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{d}) + E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}) - E(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})| \leq 2 \tag{1.3.3}$$

$\boldsymbol{a} \sim \boldsymbol{d}$ はこれまでの議論と同じ測定軸だが（SG 装置での測定における磁場), 今回はそれに対応するものがないので仮想的な軸を設定する. 各陽子に対して軸の左側を通ったイベントを $+1$, 右側を通ったイベント -1 とするような測定量 A, B を考える. A, B はそれぞれ陽子 1,2 に対する測定量で, これは SG 装置でのスピンの測定値 ± 1 にそのまま対応する. この軸は仮想的に設置したものなので, 陽子散乱のデータを取り終えた後から決めることも可能である. これは陽子の飛跡情報が 3 次元的に取得でき, その陽子が任意の軸に対して左側を通るか右側と通るかが一意に決まるためであり, 従って一連のデータ取得で $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ の $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対する関数形が完全に決まる. つまりフォトン対実験のように軸設定ごとにデータを取り直す必要がなく, 全ての $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対し全イベントを適用することができる.

A と B の相関を

$$E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \frac{1}{P^2}\frac{N_{++}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - N_{+-}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) - N_{-+}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + N_{--}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{N_{++}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + N_{+-}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + N_{-+}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + N_{--}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}$$

で定義する. $N_{ij}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は仮想軸を $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ に置いたときの $A=i, B=j$ $(i,j=\pm 1)$ となったイベントの頻度である. P は偏極させた陽子を 1 つずつターゲットに入射させた際の偏極効率で,

$$P_+(\boldsymbol{a}) = 1 + P\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a} \tag{1.3.4}$$

で定義される. $P_+(\boldsymbol{a})$ は仮想軸を $\boldsymbol{a}$ の方向にとった場合に測定値として $+$ を得る確率, つまりスピン方向に対して陽子の散乱方向がどれほど偏るかを表している. (1.3.4) は QM の計算から導くことができるものであるが, ここでは LHVT のテストが目的なので実験事実として要請することにする. 実験でこの値は $P = 0.16 \sim 0.24$ とわかっており, 陽子のエネルギーによって異なる. locality に関する補助的な仮定を用いると, 陽子対がスピン 1 重項のときは (1.3.4) を使って

$$E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = -P^2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{1.3.5}$$

[5] "ほぼ" としたのは, 自由意志に関する議論が完全でないという意味である. 測定者に自由意志は存在するかという根本的な部分から議論の余地がある.

が導ける．これを P^2 で割ったものを $E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ として定義し直すと，$|E(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|$ の上限がちょうど 1 となり，上の不等式 (1.3.3) が成立する．

結果は $S = 2.83 \pm 0.24(stat.) \pm 0.07(syst.)$ で不等式を 99.93% の有意度で破り，また各仮想軸の方向設定 Φ に対する $S(\Phi)$ の関数形 (図 1.8) も QM を全面的に支持している．

この仮想軸の扱いには注意が必要である．軸をどう取るかの選択は測定者の意志で測定の後に行えるが，これはベル不等式検証で通常想定している遅延選択にはならない．なぜならこの軸は散乱の方向を変えることができないという意味で，SG 装置がスピンを磁場の方向に向かせるという能動的な役割がないのである．遅延選択の本質的な意味は，スピンが軸の方向次第で事前に用意する測定結果のパターンを変更して QM と結果を再現してくることがないこと保証するということである．この実験のセットアップでは事前に散乱される方向が決まっているような LHVT では QM の結果を再現できる，すなわち free-will loophole が発生する．

このような”軸の受動性”の問題は，フレーバー振動を用いたものや本論文が提案する実験のような粒子崩壊を利用した実験にも共通する弱点である．これに関しては 2.3.1 で議論する．さらに質量の重い粒子の実験は一般的にビームの生成が難しく，統計量はフォトンの実験に比べて圧倒的に少ないというネックを抱えている．一方で一般的に（特に荷電粒子では）検出がフォトンより容易なので効率が高いので efficiency loophole に対しては強い．例えばこの Sakai (2006) の実験では 96% 以上を達成している．

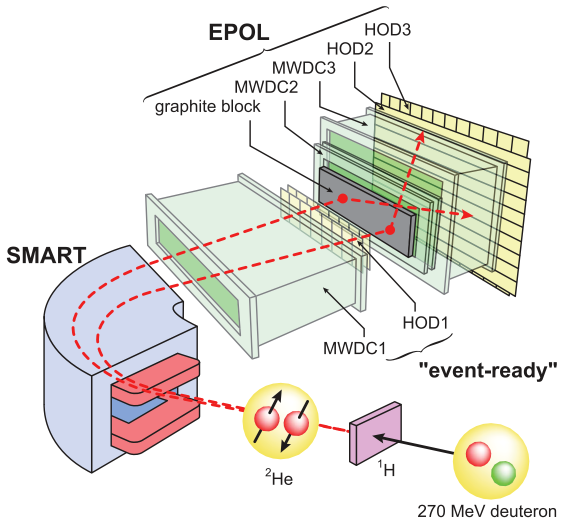

図 1.7: H. Sakai (2006) [35] の実験のセットアップ．$(d,^2\mathrm{He})$ 反応で ^{2}He を生成し，そこから自発的に分裂した陽子のペアを測定器系に通す．まずスペクトロメータで特定の運動量を選択し (SMART)，イベント選択測定器を通す．そしてターゲットと散乱させ，散乱陽子の軌跡をホドスコープで記録する．

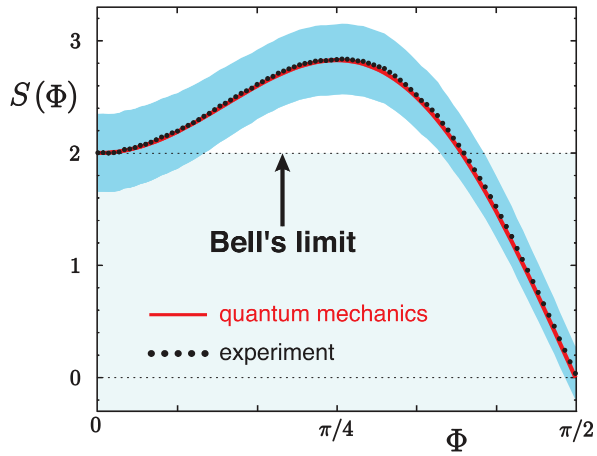

図 1.8: H. Sakai (2006) [35] の結果. $\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{d}$ は S を最大にするような設定で固定し, $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の角度 Φ を S の関数としている. 赤線は QM の理論線であるが, 実験のフィットではない. 実験と QM が完全に一致していることがわかる.

1.3.4 $K_0\overline{K}_0$ および $B_0\overline{B}_0$ のフレーバー振動

ベル不等式でのテスト変数 A, B は必ずしもスピンである必要はない. いかなる物理量にも拡張が可能であり, 運動量でもエネルギーでもアイソスピンでも CP number でも構わない. 不等式が破れていること確認をしたければ, 可干渉なオブザーバブルを考え, それらのエンタングル状態が用意すればよい.

アイソスピンやストレンジネスといったフレーバー量子数はスピンと同じ SU(2) の代数を持つため quasi-spin と呼ばれ, スピンとのアナロジーが非常によいのでベル不等式および LHVT の検証に使えることが期待されてきた. 例えば $\phi \to K^0\overline{K}^0$ という反応で生成された $K^0\overline{K}^0$ は以下のようなフレーバー 1 重項状態である.

$$|\psi\rangle = \frac{|K_0\rangle\,|\bar{K}_0\rangle - |\bar{K}_0\rangle\,|K_0\rangle}{\sqrt{2}}$$

どちらが K_0 もしくは $\bar{K}_0$ かは崩壊したときに決定する. 例えば $K_0 \to \pi l \nu$ という崩壊に注目したとき, これらは

$$K_0 \to \pi^+ l^- \bar{\nu} \qquad \bar{K}_0 \to \pi^- l^+ \nu$$

という風にそれぞれ異なる符号のレプトン l を出すため, 片方が崩壊した際に本人のみならず存命している方の K_0 のフレーバーも確定する. このダイナミクスはある測定軸に対してスピンを測定したときと同じである.

しかしこのフレーバーの測定はスピンと違って基底の取り方が任意ではない. 測定結果は K_0 か $\bar{K}_0$ の二択のみであり, 例えば $(|K_0\rangle + \sqrt{3}\,|\bar{K}_0\rangle)/2$ と $(\sqrt{3}\,|K_0\rangle - |\bar{K}_0\rangle)/2$ といったような任意の状態に射影して測定することはできない. いうなれば測定軸がある特定の方向にしか向けないスピン測定のようなものである. QM と LHVT は 2 種類以上の測定軸のペア ((1.3.1) における $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$) における測定で初めて違いが出るのでこのままでは LHVT の検証にならないが, ここでフレーバー振動が事態を打開してくれる. 超レア現象が思ってもいなかった形で応用された例である.

$B^0\overline{B}^0$ も $K^0\overline{K}^0$ と全く同じ原理で $\Upsilon(4S) \to B^0\overline{B}^0$ 反応によってフレーバー 1 重項状態を形成し, 図**??**の過程を介してフレーバー振動を行う. ただ $K^0\overline{K}^0$ と $B^0\overline{B}^0$ の現象論的な違いは大きい. 例えば $B^0\overline{B}^0$ の場合は質量固有状態 B_S, B_L の質量差が小さく, 考えているスケールに対して寿命の差がほぼ無視できるため上で述べたような"確率の逃げ"の問題は小さいというメリットがある.

1.4 何がまだ面白いのか

このように光子を使った実験は今日も進化を続けており, efficiency loophole と locality loophole が同時に塞がるのも時間の問題と思われる. QM の完全勝利は近い. では我々がこの消化試合感漂う時代においてやるべきことはどういうことだろうか. 本論文で考えてることに限らず, 一般的には以下が代表的なテーマに挙げられている.

局所性と実在性は両方破れているのか - より広い古典論のテスト 局所性と実在性を同時に満たす理論および解釈がベル不等式のテストによって棄却されたことは, 典型的な古典論の可能性を排除したという意味で大きな意味を持つ. では局所性と実在性どちらがまずかったのか, もしくは QM のいうように両方破れるのか. これが次の関心である. つまり局所実在論は QM が不足なく説明するこの世の現象を再現することができなかったが, より条件の緩い, 非局所的なものも含めた実在論ではどうなのか. これに関しては理論実験双方から既に大きい成果がある.
Cohen-Specker の定理 [42] は, QM と矛盾しない実在性の形は, 状況依存という非常に奇妙なものでしかありえないことを導いた. 事実これにより実在論で一部の実験結果を説明するためには状況依存性を認めなければならないことも示され, 古典的な直感的な物理の描像という文脈での実在性はこれで実質否定された. またそれとは独立に A. Leggett はベル不等式を拡張して, 非局所実在論一般が満たすべき不等式を導き, 実在論は QM を完全に再現できないことを示した [43]. この不等式はいくつかの補助的な仮定を課した状況下で破れが実験で確かめられた [44]. 実在性という概念は今やかなり旗色の悪い状況であり, "物理量は決まっている" という常識的な観念がここまでの反証を導くということ, それが自然科学の手法で実証できたという事実は純粋な驚きである.

局所性を持つ QM のテスト 一方局所性は単独で破れているだろうか. 局所非実在性論というグループは一般に QM のサブグループに位置づけられることが多い. よって QM の検証という方が正しい. 局所性を持つ QM のモデルとして代表的な例は Bohm-Aharanov 仮説 [45] であり, 多体系のコヒーレンス（干渉）はお互い空間上で十分に離れた場合は消失するという, シンプルだが合理的な仮説である. コヒーレンスがどこまでも保たれるというのは常識的には考えておかしいということである.
EPR 思考実験のにおいて, 2 粒子が遠く隔たっている場合はスピン 1 重項が解消され, お互いの偏極ベクトルはランダムに任意の方向を向くという具体的なモデルも彼らによって提示されている. これもベル不等式のテストによって通常の QM との区別が実験的に可能である. また定式化や実験において一般の QM の性質を仮定として使えるため loophole が少なく, ベル不等式が表す上限よりも一般的に相関が小さいので LHVT を全部排除するより大分簡単である. (LHVT の棄却が Bohm-Aharanov 仮説の棄却も兼ねている可能性がある.) LEP における実験の提案が Privitera (1992) [63] によってなされている.

質量の大きい粒子を使ったベル不等式検証 一般に質量の大きい粒子はコヒーレント長が短く, 波動関数の広がりが大きい光子より干渉性が悪いため古典的な粒子の性質がより備わっている. フォトンは質量がないため, これらの系でもベル不等式が QM を破るかは大きな興味の対象である. 古典的な物理の描像の棄却と QM の正当性の普遍性を検証するという文脈からも興味深い.

また不等式を破ったときの意味合いもフォトンの場合と異なってくる. フォトンはコヒーレント長が長いのでベル不等式の破れの原因に干渉性で説明がついてしまう可能性があるため非局所性が関係しているかは全くわからない. 一方コヒーレント長が短い重い粒子の場合は相対的に非局所性をより示唆することになるという点で質的に違うテストを行うことができる. 実験例はフォトン対実験に比べると非常に少ないが, 前の節で紹介した陽子対を用いたもの, イオンを用いたもの [29], またコライダーでのフレーバー振動 ($K^0\overline{K}^0$, $B^0\overline{B}^0$ 振動)

を用いたもの [36, 37] がある.

本研究の動機 我々の実験提案も基本的に, 質量のある粒子での実験例を行い, LHVT の可能性をさらに限定するとともに QM の普遍性・非局所性に対してヒントを提供することが目的であるが, 検証系の多様性と検証例の数を増やすという点により重きを置く. 現在コライダー実験は 1GeV – 1000GeV と広いエネルギースケールで実験を行うことができ, さらにそこで生じる粒子の性質のバラエティは非常に豊富で（フェルミオン/ボソン, レプトン/ハドロン, 高/低質量など）かつ, 強い相互作用・弱い相互作用・電磁気相互作用を介したプロセスが 3 種類全て起こっていおり, 系の多様性という観点で非常に有力である. $K^0\overline{K}^0$, $B^0\overline{B}^0$ の実験はその意味で弱い相互作用と CP の破れまで絡んだ興味深い実験であったが, フレーバー振動という特殊な現象を用いているため, 他の系にさらに応用することが困難である. そこで我々は今回スピンのエンタングルメントという普遍的な現象を用いた方法に再び着目し, 様々な系に対してベル不等式の検証可能性を拓くことを目指した.

第2章　実験の設計

前章で見たようにコライダーでの quasi-spin のエンタングルメントを用いたベル不等式実験は多数行われているが, 我々が今回議論するのはベルの思考実験により近い 2 粒子のスピン・エンタングルメントの測定である．この章ではそのの詳細を説明する．

2.1　基本原理

スピン・エンタングルメントを用いたベル不等式検証実験に最低限必要な要素は以下の 2 つである．

- 高純度のエンタングル状態の生成
- スピン偏極の正確な測定

質量を持つ粒子の実験ではこの 2 つの両立と統計量が技術的にボトルネックとなっている．コライダー実験ではこれらを同時に満足させられる可能性があることをこれから 1 つずつ見て行く．また以上の 2 つは最低限の要求であり, よい実験（loophole の少ない実験）の条件は他に細々としたものがある．これらについては 2.3 節で考察しよう．

エンタングルメント源

コライダー実験では高エネルギー粒子の衝突を通じて, 局所的な高エネルギー状態を作り出し, それによって検出器内で短寿命で崩壊する不安定粒子が大量に生成される．崩壊した 2 次粒子は何かしらのエンタングル状態を形成することが多い．$K^0\overline{K}^0$ と $B^0\overline{B}^0$ の実験 (1.3.4) がその例である．また崩壊粒子がスピンを持っていればスピン・エンタングル状態も形成できる．例えば擬スカラーのチャーモニウム（$c\bar{c}$, c クオークと反 c クオークの束縛状態）である η_c が, スピン 1/2 のフェルミオン $\Lambda\overline{\Lambda}$ のペアに崩壊するケースを考えると, 4 章でまた詳しく述べるが Λ と $\overline{\Lambda}$ のペアはスピン 1 重項のエンタングル状態

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2.1.1}$$

を形成する．[1] この状態はスピンのエンタングルメントが最大になる状態であり, かつ 1.1.2 の EPR 思考実験の忠実な再現である．この他にも $\pi_0 \to \gamma\gamma$ の $\gamma\gamma$ など, 崩壊後の粒子間でのスピン・エンタングルメントは極めて普遍的な現象であり, 粒子崩壊はエンタングル状態のソースとなり得る．

また純度については, このような特定の物理過程のイベントのサンプルのみを抽出できるかという問題に帰着される．コライダー実験では目的としている以外の反応（バックグラウンド: BG）も多数発生するが, イベント選択による BG の削減はコライダー実験本来の物理プログラム（新粒子探索, 精密測定など）においてもクリティカルな問題であるため長年のノウハウや技術の蓄積があるため比較的見通しがよい．特に e^+e^- コライダーのような低 BG の環境では適切な解析を行うことによって非常にクリーンなサンプルが得られ, 5 章でよ

[1] 2 フェルミオンのスピン 1 重項状態を与えるのは擬スカラーではなくスカラー粒子の崩壊ではないのか?という直感的疑問に対しては 4 章で詳しく説明する．

り詳しく議論するが本論文で提案する実験においては適切なイベント選択行えば BG は $0 \sim 2\%$ まで抑えられる. 一方 LHC のようなハドロンコライダー高パイルアップ・高 BG 環境の実験では, 生成断面積の大きい代表的な標準模型過程でもない限り純度の高いエンタングル状態のサンプルを抽出するのは困難である.

2.1.1　スピンに指向性を持つ弱崩壊

残念なことにコライダーで粒子のスピンを直接測定することはほぼ不可能である. その代わり我々の世の中はなぜか弱い相互作用がパリティを破るおかげで, 弱崩壊で生じた崩壊粒子はその親粒子のスピン方向に対して指向性を持つ. 例えば $\Lambda \to p\pi$ における π は Λ のスピン偏極の逆方向に出やすい, $\tau \to \pi\nu$ の π は τ のスピン方向に出やすいといった具合である. したがってこれらの弱崩壊では娘粒子の方向から親粒子のスピンを推定することができる. 一般に 2 体の弱崩壊における親粒子の偏極ベクトルと娘粒子の方向の相関は以下の角度分布で表される:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} \propto 1 + \alpha\, \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{n}$ はそれぞれ親粒子の偏極ベクトルと娘粒子の方向ベクトル, α はその相関の強さを表す崩壊に固有のパラメータである. α は $-1 \leq \alpha \leq 1$ の範囲を取り, 絶対値が大きいほど $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{s}$ の相関が大きくスピンが正確に推定できる. また符号は $\boldsymbol{n}$ の $\boldsymbol{s}$ に対する指向性の極性を与え, 正のとき $\boldsymbol{s}$ と $\boldsymbol{n}$ は平行, 負のときは反平行になりやすい. 特に上で紹介した $\Lambda \to p\pi$ は $\alpha = -0.642 \pm 0.013$ (PDG 2012) [48] と比較的大きな値を持つので我々は今回偏極計 (”polarimeter”) として重宝する. この終状態粒子の方向からスピンを推定するという偏極計のメカニズムは 1.3.3 の陽子-グラファイト散乱を用いた陽子スピン測定とほぼ同じである. しかし粒子の崩壊がそれ自身のスピンを表現すること (”self-polarimeter” [46]), 自然がそういったものを勝手に用意してくれているところがなんとも粋なところである.

実験的には当然 α が大きい方が好ましい. $B \to CD$ というタイプの弱崩壊で α の大きいものを表 2.1 に列挙する. $\tau \to \pi\nu$ は α がほぼ 1 であり, 最強の偏極計崩壊の一角を占めている. レプトンの弱崩壊は比較的 α が大きくなる傾向があるが, その種類は限られている. ハドロンの弱崩壊は種類が多いので色々な可能性がある. しかし一般にこれらは強い相互作用や電磁相互作用からの寄与があるのに加えて, 運動学的な要因も絡んでくるため α はよほど運がよくない限り大きくならないという特徴がある. 表 2.1 で使い勝手のよいのは $\Lambda \to p\pi^-$ と $\tau^- \to \pi^-\nu$ とその荷電共役の $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ と $\tau^+ \to \pi^+\bar{\nu}$ である. これらは統計量が多く, 終状態粒子の測定がコライダーでは容易なので, 今回はこれらを使うことにする. α の大きさがどのような物理で決まるかは次節で詳しく議論する.

表 2.1: 偏極計として使える崩壊 (”polarimeter decay”) の一覧. 上段がハドロニック, 下段がレプトニック崩壊である. α の値は上段は測定値 [48], 下は理論値 (Standerd Model) [49] を採用している. CP の破れの効果を無視すると荷電共役のチャネルも全く同じ性質を持ち α の極性のみ変わる.

$B \to CD$	α	Branching of $B \to CD$
$\Lambda \to p\pi^-$	-0.642 ± 0.013	$(63.9 \pm 0.5)\%$
$\Lambda \to n\pi_0$	-0.648 ± 0.045	$(35.8 \pm 0.5)\%$
$\Sigma^+ \to p\pi_0$	$-0.98^{+0.017}_{-0.015}$	$(51.57 \pm 0.3)\%$
$\Lambda_c^+ \to \Lambda\pi^+$	-0.91 ± 0.015	$(1.07 \pm 0.28)\%$
$\Lambda_c^+ \to \Sigma^+\pi_0$	-0.45 ± 0.34	$(1.00 \pm 0.34)\%$
$\tau^- \to e^-\nu_\tau\bar{\nu}_e$	0.33	$(17.83 \pm 0.04)\%$
$\tau^- \to \mu\nu_\tau\bar{\nu}_\mu$	0.33	$(17.41 \pm 0.04)\%$
$\tau^- \to \pi^-\nu_\tau$	1.00	$(10.83 \pm 0.06)\%$
$\tau^- \to \rho^-\nu_\tau$	0.46	$(25.52 \pm 0.09)\%$
$W^- \to l^-\bar{\nu}$	1.00	$(32.6 \pm 0.03)\%$

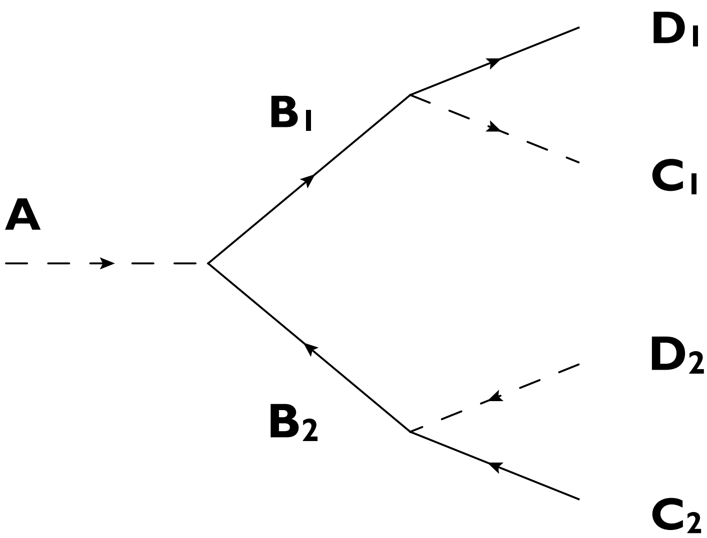

図 2.1: $A \to B_1B_2$; $B_1 \to C_1D_1$; $B_2 \to C_2D_2$ の反応チェーン. B_1, B_2 のスピンがエンタングルするような始状態 A を探す. B_1, B_2 のスピンはそれぞれ C_1, C_2 の運動方向の分布を通じて測る.

2.1.2 候補となる生成・崩壊チャネル

我々は $A \to B_1B_2$; $B_1 \to C_1D_1$; $B_2 \to C_2D_2$ というタイプの反応チェーンにおいて, B_1, B_2 のスピン・エンタングルメントを C_1, C_2 の分布を通じて測る (図 2.1). 上の議論より $(B_1, B_2) = (\Lambda, \overline{\Lambda}), (\tau^-, \tau^+)$, $(C_1, C_2) = (\pi^-, \pi^+)$ が有力であることがわかったが, $\Lambda\overline{\Lambda}$ や $\tau^-\tau^+$ [2] のソース A を最後に考察し, 実験チャネルの候補を絞る.

[2]以下特に混乱がない限り符号は省いて $\tau\tau$ と表記する.

$\Lambda\overline{\Lambda}$ の主要な生成チャネルはチャーモニウム崩壊 $c\bar{c} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ であり, 上で挙げたような η_c や χ_{c0}, J/ψ がその例である. $\tau\tau$ は $Z \to \tau\tau$ あるいは $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ が今日までのコライダー実験で利用が可能である.

詳しくはまた 4 章で議論するが, スピン 0 粒子の崩壊 $A \to B_1 B_2$ は $B_1 B_2$ のスピン・エンタングルメントが最大になるので望ましい. チャーモニウムであれば η_c, χ_{c0} がスカラーであり, 近年のチャームファクトリー実験 (BES3 [51], CLEO [52]) にて大きな統計量が期待できる. $\tau\tau$ 対に崩壊するスカラー粒子は η_b や χ_{b0} などの重いメソンに限られるが, 崩壊自体がまだ確認されていない [48]. 他の候補はヒッグスボゾンしかない[3]．統計量とサンプル純度に問題があり, 性質がまだよくわかってないものを実験の道具として使うのは多少気が引けるが, 将来 Higgs factory と期待されいている ILC (International Collider) [53] でどれくらいのことができるかは興味深いので今回議論の対象にする.

ベクター粒子の始状態は $B_1 B_2$ のエンタングルメントの強さという観点からいうと次点であるが, 使い物になる可能性はある. 特に $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ は現在非常に膨大な統計量があり（$\sim 10^9$）もしベル不等式を破るだけのスピン・エンタングルメントがあった場合, 最も感度が期待できるチャネルである. $Z \to \tau\tau$ も Z factory 実験の LEP [54] にて $\sim 10^6$ の統計量の高いサンプルが利用できる.

$B_1 B_2$ は必ずしも粒子の共鳴状態の崩壊から生じる必要はない. 例えば $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ のような仮想光子を介した直接生成も, ベクター粒子の崩壊と同じダイナミクスを持つので利用できるチャネルである. この反応は様々な実験の continuum background として大量に生じている. 例えば Belle 実験 [55] では Υ(4S) の生成を目的として, その共鳴準位に重心系エネルギーを合わせて e^+e^- を衝突させているが, $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ も 7.8nb と非常に大きな断面積を誇るため現在までに 10^9 オーダーのイベント数がある. 統計量という観点ではここまで挙げたチャネルの中では段突で有望である.

このコライダーにおける粒子崩崩壊を使ったベル不等式検証法は N. A. Tornqvist が最初に $c\bar{c} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi\bar{p}\pi$ チャネルにて着想し [46, 56], エンタングルメントの考察などの基本的な事項に関する行った. それに応じて DM2 実験が $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ チャネルを使った検証を試みたが [57], 統計量不足のため, また 4 章で考察するように $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ はそもそも感度がほとんどないため有意な結果が得られなかった. 近年では Tornqvist (1981, 1986) の議論を補足した上で, BES3 の $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ サンプルを用いた検証が議論されている [58] [4]. $\tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ の系列に関しては, 弱い相互作用の検証という文脈で過去に極めて詳細な研究が理論・実験ともに行われている. 例えば終状態の $\pi\pi$ 分布の相関は, V-A 型相互作用の検証に使われ, 極めてよい一致を与えることが確かめられている [62]. 一方で Privitera (1992) [63] がこの実験結果を本論文のように LHVT の検証に用いることを提案したが, 実験結果の適用範囲は制限的であることが指摘されている [64, 65]. これについては 2.3 にて詳しく論じる. $H \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ を扱うのは本論文が初めてである.

以上より, 本論文では $\Lambda\overline{\Lambda}$ を poralimeter とする $c\bar{c} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$（$c\bar{c}$ は $\eta_c, \chi_{c0}, J/\psi$ の 3 通りを考える）の系列と, $\tau^+\tau^-$ を偏極計として使う $Z, \gamma^*, H \to \pi\nu\pi\nu$ の系列を考察していく. 各チャネルのダイヤグラムは図 2.2 の通りである. $\Lambda\overline{\Lambda}$ と $\tau\tau$ の系列はトポロジーが同じであり類似点が極めて多いので, Λ 系列で成立することの大半は τ 系列にも当てはまる. 本論以下では基本的に Λ 系列に対して議論を行い, τ 系列については相違がある場合のみ言及する.

[3] $H \to \tau\tau$ の崩壊は LHC で既に確認されている [50].

[4] η_c に関しては $\eta_c \to \phi\phi \to KKKK$ チャネルで, $\phi\phi$ の偏極のエンタングルメントを用いた同様のテストも提案されている [60, 61]. ϕ はベクトル粒子なので, これは伝統的な光学実験と同じ構造を持ち面白いが, $\phi \to KK$ は強い相互作用による崩壊でパリティを保存するため, KK の分布は ϕ の偏極の方向に対して対称である. 従って ϕ の偏極を分布から読み取ることはできないと考えられ, 構想に対して疑問がある.

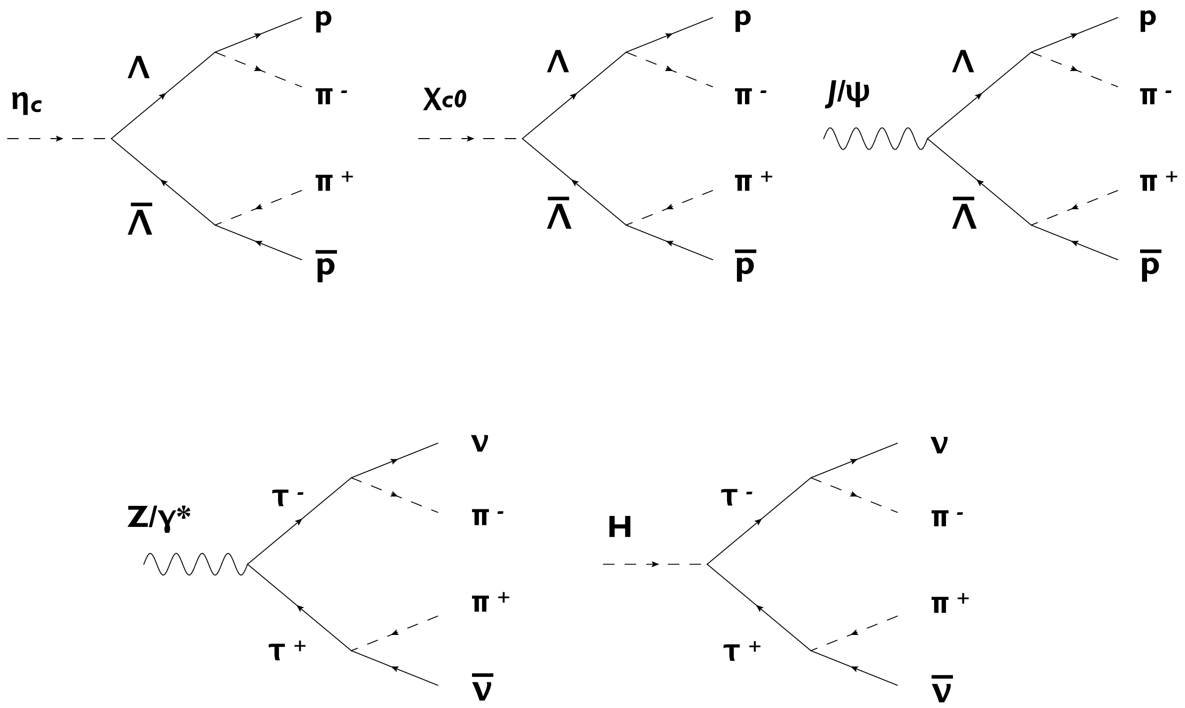

図 2.2: 本論文で実験可能性の議論の対象とするチャネル. $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ (左上), $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ (中上), $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ (右上), $Z/\gamma^* \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ (左下), $H \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ (右下)

2.2 偏極計としての弱崩壊 - 原理と性能

偏極計崩壊はベル不等式のテストという文脈を無視してもそれ自体なかなか面白い現象である. この節ではパリティ非保存性が偏極計としての性能をどう与えるのか, 実際にスピンをどれくらいの精度で予言するのか, SG 装置でのスピン測定との比較など, この現象をもう少し掘り下げて状況を味わってみる.

2.2.1 パリティと角運動量を用いた考察

弱い相互作用のパリティ非保存性が, 具体的に Λ や τ の崩壊分布の非対称性をどう作るのか, 反応前後の粒子の内部パリティと軌道角運動量の関係を用いて定性的に導く (参考文献 [47] の 9 章を参考にした).
内部パリティとは粒子が固有に持つパリティ量子数であり, 素粒子の場合ボソンは +1, フェルミオンと反フェルミオンは位相の不定性はあるが[5] 相対的には −1 である. 複合粒子の内部パリティは, 構成粒子間の相対軌道角運動量の寄与により複雑になるが, パリティが乗法的量子数であることにより, 粒子と反粒子の間で相対内部パリティが −1 となることは保証される. 従ってバリオンと反バリオンは互いに逆の内部パリティを持ち, ここでは便宜的にそれらを +1, −1 と定義することにする. メソンは自身が反粒子である. 内部パリティはそのスピンに依存する.

さて $\Lambda \to p\pi^-$ を考えてみる. Λ はバリオンなので内部パリティは +, 陽子も同様に +, π はスカラーメソンなので − である. 内部パリティの積は反応前後で逆なので, 反応を通じてパリティを保存するには, 軌道角運動

[5] これはゲージ対称性でフェルミオン場がオブザーバブルにならないことに起因している [66].

量 l の寄与 $(-1)^{-l}$ が必要である．Λ の静止系で考えると, 始状態は $l=0$ なので, 終状態の陽子と π の相対軌道角運動量 l は奇数である必要がある．全角運動量保存（始状態: J=1/2, 終状態の合成スピンの大きさ S=1/2）からこれは $l=1$ (P 波) であることがわかる．一方でパリティの破れを許容すると, $l=0$ (S 波) も許される．それぞれの振幅を S, P とすると, 終状態は以下のように表される．

$$|\psi\rangle = S\,|0,\ \rangle\,|1/2,\ \rangle + P\,|1,\ \rangle\,|1/2,\ \rangle\,.$$

各項のケットは $p\pi$ の相対軌道角運動量と合成スピンの状態の直積 $|l,m\rangle\,|S,S_z\rangle$ である．始状態 Λ のスピンが z 方向を向いているとすると, どの項も軌道角運動量 (l,m) とスピン (S,S_z) を合成して全角運動量 J=1/2, M=1/2 にならねばならないので, Crebesh-Gordan の表を用いてこれは直ちに

$$|\psi\rangle = S\,|0,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle + P\left[\sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1,1\rangle\,|1/2,1/2\rangle\right] \tag{2.2.1}$$

と一意に決まる．面白いことに P 波の 2 項は共通の係数 P を持つ．これは状態が空間回転に対して共変的であること, すなわち全角運動量保存という物理過程が座標系の取り方に依らないことの帰結である．（Wigner-Eckart の定理）
スピン状態 $|S=1/2,S_z\pm 1/2\rangle$ の陽子が (θ^*,ϕ^*) の方向に観測される振幅は球面調和関数 $Y_l^m = \langle\theta^*,\phi^*|l,m\rangle$ を用いて

$$\langle 1/2,1/2|\,\langle\theta^*,\phi|\psi\rangle = SY_0^0 - P\sqrt{\frac{1}{3}}Y_0^1 \tag{2.2.2}$$

$$\langle 1/2,-1/2|\,\langle\theta^*,\phi|\psi\rangle = P\sqrt{\frac{2}{3}}Y_1^1 \tag{2.2.3}$$

したがって陽子の角度分布は

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma_\Lambda}{d\Omega_p} &\propto |\,\langle 1/2,1/2|\,\langle\theta,\phi|\psi\rangle\,|^2 + |\,\langle 1/2,-1/2|\,\langle\theta^*,\phi|\psi\rangle\,|^2\\ &= \left|S\frac{1}{\sqrt{4\pi}} + \sqrt{\frac{1}{3}}P\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta^*\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{2}{3}}P\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta^* e^{i\phi^*}\right|^2\\ &= \frac{1}{4\pi}|S|^2 + |P|^2 - 2Re(SP^*)\cos\theta^*\\ &\propto 1 + \frac{-2\mathrm{Re}(SP^*)}{|S|^2+|P|^2}\cos\theta^*\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

陽子は安定な粒子であり, 測定器の中で物質と相互作用によって, 異なるスピン状態 $|1/2,\pm 1/2\rangle$ の間の干渉性は失うものとして考える．従って絶対値 2 乗してからスピン和を取った (このデコヒーレンスに関する解釈については Appendix A を参照)．分布の非対称性 $\cos\theta$ はパリティを破る S 波の存在によって, より正確には S 波と P 波の干渉によって生じていることがわかる．また非対称性は S 波と P 波の寄与の大きさが等しいとき $(P/S|=1)$ 最大になる．π^- は Λ 静止系では陽子と back-to-back になるので π^- の角度分布は

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{d\Omega_\pi} &\propto 1 + \frac{2\mathrm{Re}(SP^*)}{|S|^2+|P|^2}\cos\theta^*\\ &=: 1 + \alpha\cos\theta\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

となる．θ は π^- と Λ の偏極ベクトルのなす角である．α は実験で決まるパラメータであり, $\Lambda \to p\pi$ では $\alpha_\Lambda := -0.642 \pm 0.013$ である．荷電共役過程の $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ でも同様の議論で（2.2.5）に帰着するが, CP の破れにより一般に α の大きさは α_Λ とは異なる．しかしその寄与は非常に小さく, 無視した場合 $\alpha = -\alpha_\Lambda$. 実際に実験でもこの CP の破れの寄与は観測できていない．この議論はパリティと軌道角運動量の関係しか用いてないため他全ての崩壊でも成立する．$\tau \to \pi\nu$ の非対称度 α は実験から $\alpha_\tau := 0.995 \pm 0.008$ と決まっているが,

弱い相互作用の V-A 型 vertex を仮定すると厳密に $\alpha = 1$ が導かれることもあり, 特に差し支えもないので便宜的に以降 $\alpha_\tau = 1$ として議論を行う.

2.2.2 場の量子論からの導出

対称性と角運動量を用いた一般的な議論ではここまでが限界である. S, P や α の値についての定量的洞察は場の量子論の S 行列の方法による分析が見通しがよい. $\Lambda \to p\pi^-$ の行列要素は, 有効ラグランジアンの方法を用いると最低次で以下の形で書ける.

$$\mathcal{M} \propto \overline{u}_p(c_V + c_A\gamma^5)u_\Lambda \tag{2.2.6}$$

u_p, u_Λ はそれぞれ陽子と Λ の 4-スピノルであり, 係数 c_V, c_A はそれぞれ湯川結合と擬湯川結合の強度を表す振幅である. 前者はフェルミオンのカイラリティー左巻き・右巻き成分と同位相で, 後者は逆位相で結合する. これは電弱理論におけるベクトル相互作用 (V) と軸ベクトル相互作用 (A) の関係に相当するので以降それぞれを便宜的に V 型, A 型相互作用と呼ぶことにする. π は擬スカラー粒子なので, 反応前後でパリティが保存している場合は擬湯川結合の成分のみ寄与し, また湯川結合はパリティ非保存の相互作用成分である. これを使って $\Lambda \to p\pi$ の崩壊角分布を計算する.

Λ の静止系で考える. すると Λ の 4-スピノルは

$$u_\Lambda^i = \sqrt{m_\Lambda}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \qquad (i = \pm) \tag{2.2.7}$$

m_Λ は Λ の質量, ξ は 2-スピノルであり, スピン状態 $c_1\left|\uparrow\right\rangle + c_2\left|\downarrow\right\rangle$ を ${}^T(c_1, c_2)$ の 2 成分で表す. Λ のスピン方向を量子化軸の方向と取ると $\xi =^T (1, 0)$ である. 今後このスピン方向を座標系の z 軸方向とする. 運動量 $\boldsymbol{p}$ を持つ陽子の 4-スピノルはやや複雑で,

$$\begin{aligned}
u_p^j(\boldsymbol{p}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}}\begin{pmatrix} (E+m-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \\ (E+m+\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}}\begin{pmatrix} (E+m\mp p)\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \\ (E+m\pm p)\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \end{pmatrix} \\
&=: \sqrt{\frac{E+m}{2}}\begin{pmatrix} (1\pm\eta)\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \\ -(1\mp\eta)\,\xi_{\boldsymbol{p}}^j \end{pmatrix} \qquad (\eta := p/(E+m))
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

1 行目から 2 行目では関係式

$$\sqrt{p\cdot\sigma} := \sqrt{E - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E+m-\boldsymbol{p}\cdot\sigma}{\sqrt{E+m}}$$
$$\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}} := \sqrt{E + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E+m+\boldsymbol{p}\cdot\sigma}{\sqrt{E+m}}$$

を用いた. p, E, m はそれぞれ陽子のエネルギー, 運動量, 質量である. j は陽子のヘリシティーの係数であり, 例えば $u_p^+(\boldsymbol{p})$ は運動量 $\boldsymbol{p}$ でヘリシティー+の固有状態にあるフェルミオンを表す. ヘリシティーとは粒子の進行方向 $\hat{\boldsymbol{p}} := \boldsymbol{p}/|\boldsymbol{p}|$ を量子化軸として取ったときのスピンであり, ヘリシティー固有スピノル $u_p^\pm(\boldsymbol{p})$ はヘリシティー演算子

$$\boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & \\ & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}$$

の固有スピノルで定義される.

$$(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\Sigma)\ u_p^{\pm}(\boldsymbol{p}) = \pm u_p^{\pm}(\boldsymbol{p}) \tag{2.2.9}$$

このとき $(\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\sigma)\ \xi_{\boldsymbol{p}}^{\pm} = \xi_{\boldsymbol{p}}^{\pm}$ なので, $\boldsymbol{p}$ の方向を量子化軸とした表示では

$$\xi_{\boldsymbol{p}}^{+} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}} \qquad \xi_{\boldsymbol{p}}^{-} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{p}}$$

これは z 軸 (上で Λ のスピンの方向で定義した) を量子化軸で表示すると, $\boldsymbol{p}$ を極座標表示 (θ^*, ϕ^*) を用いて

$$\xi_{\boldsymbol{p}}^{+} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta^*}{2} \\ e^{i\phi^*}\sin\frac{\theta^*}{2} \end{pmatrix}_z \qquad \xi_{\boldsymbol{p}}^{-} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi^*}\sin\frac{\theta^*}{2} \\ \cos\frac{\theta^*}{2} \end{pmatrix}_z \tag{2.2.10}$$

となる.

$\bar{u}$ は $\bar{u} := u^\dagger\gamma^0$ で定義される. ただしこの論文を通じてガンマ行列は全てワイル表示を採用する. すなわち

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & \end{pmatrix}\ (i = 1, 2, 3), \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

であり, vertex $c_V + c_A\gamma^5$ は

$$\begin{pmatrix} c_V - c_A & \\ & c_V + c_A \end{pmatrix} \tag{2.2.11}$$

となる.

以上 (2.2.7), (2.2.8), (2.2.11) を (2.2.6) に代入すると

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &\propto ((1\pm\eta)\ \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger j}, (1\mp\eta)\ \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger j}) \begin{pmatrix} & c_V - c_A \\ c_V + c_A & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} \qquad (j = \pm) \\
&= [(1\pm\eta)(c_V - c_A) + (1\mp\eta)(c_V + c_A)]\ \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger j}\ \xi \\
&= 2(c_V \mp \eta c_A)\ \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger j}\ \xi
\end{aligned}$$

$\xi = (1, 0)$ と (2.2.10) を代入すると, それぞれの j に対して

$$\mathcal{M} \propto \begin{cases} (c_V - \eta c_A)\cos\frac{\theta^*}{2} & (j = +) \\ -(c_V + \eta c_A)\sin\frac{\theta^*}{2}e^{i\phi^*} & (j = -) \end{cases} \tag{2.2.12}$$

陽子の角度分布はこれらの絶対値 2 乗を取り, 終状態のスピンを区別しないので j を和を取ると

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{d\Omega_p} &\propto \sum_{j=\pm} |\mathcal{M}|^2 \\
&\propto |c_V - \eta c_A|^2\cos^2\frac{\theta}{2} + |c_V + \eta c_A|^2\sin^2\frac{\theta^*}{2} \\
&= (|c_V|^2 + \eta^2|c_A|^2) - 2\eta\ \mathrm{Re}(c_V c_A^*)\cos\theta^*
\end{aligned}$$

π の角度分布は π の極座標 (θ, ϕ) で書き直すと

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma}{d\Omega_\pi} &\propto 1 + \alpha\cos\theta \\
\alpha &= \frac{2\eta\ \mathrm{Re}(c_V c_A^*)}{|c_V|^2 + \eta^2\,|c_A|^2}
\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

(2.2.4) と (2.2.13) を比較すると

$$\frac{S}{P} = \frac{1}{\eta}\frac{c_V}{c_A} = \frac{E+m}{p}\frac{c_V}{c_A}$$

非対称性を作る S 波と P 波の混合比は, V 型/A 型の結合強度比 (c_V/c_A) と運動学に依存する係数 $(1/\eta)$ の積になることがわかる. 超相対論的極限 $(\eta \to 1)$ では $|c_V/c_A| = 1$ のとき, すなわち相互作用がちょうど $V \pm A$ のときに $|S/P| = 1$ を与え, 非対称度 α が最大になる. この極限においてはパリティ破れの大きさと現象論的な分布の非対称性の大きさの関係が一致するが, 一般のケースではそうはならない. $\eta \neq 1$ の場合はカイラリティーとヘリシティーの不一致を反映して $1/\eta$ の項がかかり, $|S/P| = 1$ となるポイントが $|c_V/c_A| = 1$ からズレることになる.

事実 $\Lambda \to p\pi^-$ の場合, V 型/A 型相互作用の強度比は α_Λ の実験から $c_V/c_A = -0.147 \pm 0.004$ および $c_V/c_A = -0.0194 \pm 0.0005$ と求まるが (図 2.3), パリティを破る V 型の成分がせいぜい小さいにも関わらず, 分布が $\alpha_\Lambda = -0.642$ という大きな非対称度を持つのは, 終状態の陽子が遅く運動学の項が $1/\eta = 18.7$ と大きく寄与するからである. 一方 $\tau \to \pi\nu$ は関わる粒子が全て素粒子であり, 相互作用が完全に V-A 型であることは標準理論および実験から裏付けられている [62]. さらに終状態のニュートリノは極めて relativistic なので $\eta = 1$, よって $S/P = 1$, $\alpha_\tau = 1$ となる.

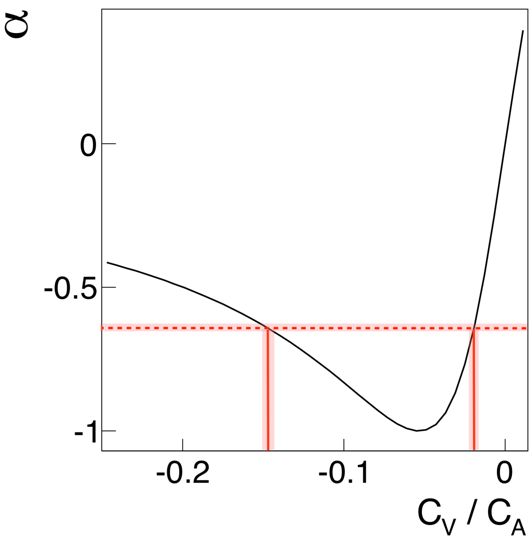

図 2.3: $\Lambda \to p\pi$ における α の値と結合強度比 c_V/c_A の関係. (2.2.13) を用いた. c_V と c_A はそれぞれパリティ非保存とパリティ保存の相互作用の強度を表し. 実測値 $\alpha = -0.642 \pm 0.013$ に対して解は 2 価であるが, いずれにしても c_A が優勢であることがわかる.

2.2.3 SG 装置を用いたスピン測定との比較

ベル不等式に関する考察に入る前に, この偏極計崩壊と SG 装置での測定がスピン測定として等価であるかを確認する. 前者は結果として 3 次元の情報を測定するのに対して後者は常に $\pm$ のデジタル値を取る. 一見すると前者の方が得られている情報が多いように思えるが, QM の範疇で考える限りは違いはないことをこれから示す.

スピン 1/2 のフェルミオン 1 つの系で, そのスピンを 1 回だけ測定したときをまず考えてみる. SG 装置のケースでは偏極ベクトルを $\boldsymbol{s}$, 装置の磁場の方向, すなわち測定軸の方向を $\boldsymbol{n}$ としたとき, スピン状態は

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}} + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}}$$

になるので, 測定値として ± を得る確率はそれぞれ

$$P_+ = |\langle\uparrow|\psi\rangle|^2 = \cos^2\frac{\theta}{2}$$
$$P_- = |\langle\downarrow|\psi\rangle|^2 = \sin^2\frac{\theta}{2}$$

まとめると

$$P_\pm = \frac{1 \pm \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{2}$$

仮に測定結果が $A=+$ のとき, 偏極ベクトル $\boldsymbol{s}$ の方向は Likelihood (尤度)

$$L = \frac{1 + \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{2} \tag{2.2.14}$$

を用いて推定できる. これは測定結果 $A=\pm$ に対して推定 $\boldsymbol{s}$ がどれくらい consistent かを表す量である.
偏極計崩壊の方でも (2.2.5) より, ”Λ の偏極ベクトルが $\boldsymbol{s}$ であったときにそれから崩壊した π の方向が $\boldsymbol{n}$ となる確率” として likelihood は定義され

$$L = \frac{1 + \alpha\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}}{4\pi} \tag{2.2.15}$$

likelihood を最大にする $\boldsymbol{s}$ が $\boldsymbol{s}$ の最もよい推定となる.（最尤推定）この場合は当然 $\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=1$, すなわち $\boldsymbol{s}$ は $\boldsymbol{n}$ の方向であると考えるのが一番もっともらしい推定である. 推定精度は一般に最尤推定値まわりの likelihood 関数の形状で決まる. 性質のよい likelihood 関数に対しては, $\log L_{\max} - \log L \le 1/2$ を与える範囲が $\pm 1\sigma$ の領域に対応する.
SG 装置と偏極計崩壊の likelihood の関数形 (2.2.14), (2.2.15) は, α の違いを除けば同じであり, $\tau \to \pi\nu$ に至っては $\alpha_\tau = 1$ なので全く同じである. よって 1 粒子のスピンを 1 回測定した結果から得られる情報は, α を除いて形式上は等価と言える. つまり偏極計崩壊で π が $\boldsymbol{n}$ の方向に出るといういうのは, Λ のスピンの測定方向として $\boldsymbol{n}$ を選び, 測定結果が $+$ だった（もしくは $-\boldsymbol{n}$ を測定方向として選んで結果が $-$ だった）ということに対応する. つまり π^- の方向はスピンの測定軸, SG 装置の磁場の役割を果たす. ただこの対応は QM で考える限りは完全であるが, また一般には観測者の測定軸の選択権の有無という違いがあるためあくまで形式上の対応にすぎない. 例えば SG 装置では $\boldsymbol{n}$ は磁場の方向なので観測者によって設定できるが, 偏極計崩壊では $\boldsymbol{n}$ は崩壊粒子の方向なので自然が決定するものである. この違いの影響は 2.3.2 で詳しく論じる.

次にスピン測定の現象論でもう一つ重要な要素である「状態の射影」について考える. SG 装置のケースでは測定を通じてスピン状態が必ず測定軸の方向 $\boldsymbol{n}$ に対して $|\uparrow\rangle$ か $|\downarrow\rangle$ に射影されるのが大きな特徴であった. そして 2 粒子がエンタングルしているときは測定しないスピンの状態まで射影するというのが, 非局所的な作用が発生する原因となったのであった. 偏極計崩壊のケースではどうだろうか. Λ が崩壊した後の Λ のスピンというのはよくわからないので[6], スピン 1 重項状態にある $\Lambda\bar{\Lambda}$ 対について, 先に崩壊した Λ_1 が反対側の Λ_2 のスピン状態に対してどういう影響を与えるかを議論する.
まず崩壊前の $\Lambda_1\Lambda_2$ のスピン状態は

$$|\psi\rangle = \frac{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$$

ケットの直積は左側が Λ_1, 右側が Λ_2 の状態空間を表す. 崩壊 $\Lambda_1 \to p_1\pi_1$ によって π_1 の方向 $\boldsymbol{n}_1$ が確定する. p_1 のヘリシティーを s_p とすると, その後の系の状態は, Λ_1 の方の状態空間を $|\boldsymbol{n}_1, s_p\rangle$ に射影させたものとなる. (2.2.3) の量子化軸はどの方向に取っても変わらないので $\boldsymbol{n}_1$ の方向に取ると, Λ_2 の状態は

$$|\psi'\rangle = \langle\boldsymbol{n}_1, s_p|\psi\rangle = \frac{\langle\boldsymbol{n}_1, s_p|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} - \langle\boldsymbol{n}_1, s_p|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}}{\sqrt{2}}$$

$|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$ と $|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$ はそれぞれ偏極ベクトルが $\boldsymbol{n}_1$, $-\boldsymbol{n}_1$ を向いている状態である.
もし $\boldsymbol{n}_1$ がそのまま SG の磁場のような測定軸に対応するなら, Λ_1 の崩壊によって Λ_2 のスピンが $\boldsymbol{n}_1$ の方向に

[6] Λ のどのスピン成分が寄与したかを考えれば議論は可能であるが, 蛇足になるので省略する.

倒されること, すなわち

$$\langle \boldsymbol{n}_1, s_p| \downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = 0 \qquad |\psi'\rangle \propto |\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$$

あるいは

$$\langle \boldsymbol{n}_1, s_p| \uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = 0 \qquad |\psi'\rangle \propto |\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$$

が期待される. これは実際に行列要素 (2.2.12) を使って計算ができる. $|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}}$ は $\boldsymbol{n}$ と Λ スピンが平行な状態なので $\theta = 0$, $\phi = 0$, すなわち $\theta^* = \pi - \theta = \pi$, $\phi^* = 0$ の場合に相当し, 同様に $|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}}$ に対しては $\theta^* = 0$, $\phi^* = 0$. よって

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{n}_1, +| \uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = \langle \boldsymbol{n}_1, -| \downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = 0 \\
&\langle \boldsymbol{n}_1, -| \uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = -c_V - c_A\eta \\
&\langle \boldsymbol{n}_1, +| \downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1} = c_V - c_A\eta \qquad \eta := p/(E+m)
\end{aligned}$$

すなわち終状態の p_1 のヘリシティーが+であったとき ($s_p = +$) , Λ_2 のスピン状態は

$$|\psi'\rangle \propto (c_V - c_A\eta)\,|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$$

$s_p = -$ のときは

$$|\psi'\rangle \propto (c_V + c_A\eta)\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$$

確かに Λ_2 は必ず $\boldsymbol{n}_1$ の方向に偏極している. この結果が示唆する事実は重大である. つまり偏極計崩壊における崩壊粒子の方向 $\boldsymbol{n}$ と SG 装置の磁場は, QM においては形式的な対応に留まらないもっとシリアスなものである. 状態の射影もするし, エンタングル状態で見られた非局所的な作用も再現しており, 完璧にその役割を果たしている.

$\tau \to \pi\nu$ についても定性的には同様であるが, 定量的にはさらに強烈な結果になる. 終状態におけるニュートリノはヘリシティーが左巻きのものに限られるので, τ_2 のスピン状態は

$$|\psi'\rangle \propto (c_V + c_A\eta)\,|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$$

の一択である. つまり $\boldsymbol{n}_1$ の方向を確認すれば, それがそのまま τ_2 の偏極ベクトルの方向である. これは SG 装置の測定での帰結と全く同じである. 一方 $\Lambda \to p\pi$ の場合は陽子のスピンはコライダー実験の測定器では通常測れないので, $\boldsymbol{n}_1$ を見ただけでは $|\uparrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$ と $|\downarrow\rangle_{\boldsymbol{n}_1}$ の 2 通りの可能性があり, どちらなのかは決定できない. しかしこれらはあくまで統計的な混合であって, コヒーレントに重ね合わさった状態ではないことは強調しておく. 1 イベント単位ではどっちを向いているかが決まっているという意味で, 1 発目の崩壊で反対側の偏極ベクトルを決まった方向に倒せるという意味で, やはり SG と等価なダイナミクスを持っているといえる.

2.2.4 量子力学における粒子崩壊の描像とデコヒーレンス

前節の結果は非常に奇妙である. まず片方の Λ_1 が崩壊して, 崩壊粒子の方向 $\boldsymbol{n}_1$ を何者かが決める. それに応じて逆の方の Λ_2 のスピン $\boldsymbol{s}_2$ は $\boldsymbol{n}_1$ の方向を向く. しかもその $\boldsymbol{n}_1$ の方向は Λ_1 のスピン $\boldsymbol{s}_1$ の逆方向に出やすいという性質がある. そもそも崩壊で出る粒子の方向 $\boldsymbol{n}_1$ は誰が決めているのか. $\boldsymbol{n}_1$ が $\boldsymbol{s}_1$ の機嫌を伺って方向を決めているようにも見えるので親粒子 Λ_1 だろうか. そうするとまるで Λ_1 が Λ_2 のスピンを動かしているように見える. そんなことがあってよいのだろうか. 古典論ではあり得る解釈かもしれないが, 少なくとも QM ではそうではないことを, この節では考察する.

まず QM は崩壊という現象をどう記述するのだろうか．一つ言及しないといけない事実は, ある粒子が瞬間的に複数の別の粒子に変わってそれらが特定の方向に飛んで行くという, 古典的な描像は一般には正しくない（素粒子実験ではそう考えても差し支えのないことがほとんどであるが）．QM で「粒子」と呼んでいるものは, ある特定の量子数や性質（電荷, スピン, 質量など）を備えた「状態」であり, 粒子の崩壊 $A \to B_1 B_2, \ldots B_N$ は 1 粒子状態 $|A\rangle$ から N 体粒子状態 $|B_1, B_2, \ldots, B_N\rangle$ への遷移である．この遷移の時間発展は, 崩壊の原因となる相互作用のハミルトニアン H によって生成され, 通常時間発展は連続的である．すなわち

$$i\frac{d}{dt}|\Psi\rangle = H|\Psi\rangle \tag{2.2.16}$$

$$|\Psi\rangle = c_A(t)|A\rangle + c_B(t)|B_1, B_2, \ldots, B_N\rangle \tag{2.2.17}$$

である．最初 pure な $|A\rangle$ 成分しかなかった状態は, $|B_1, B_2, \ldots, B_N\rangle$ との重なり合った状態を経て最終的に $|B_1, B_2, \ldots, B_N\rangle$ の状態成分に確率振幅を全て移す．このように QM が描く崩壊は本質的に状態の波として見たときの, 始状態のモードから終状態のモードへの振幅の遷移である．遷移には典型的には $O(H^{-1})$ ほどの時間がかかる．これが崩壊を一般に瞬間的な変化と片付けられない理由である．さて崩壊粒子の方向はどう決まるだろうか．これも同様に, 特に測定による射影などを考えない限りは色々な方向の固有状態についての重ね合わせである．よって例えば Λ 静止系において $\Lambda \to p\pi$ のような崩壊を考える場合, 状態を粒子の種類 A と方向ベクトル $\boldsymbol{n}$ で $|A, \boldsymbol{p}\rangle$ とラベルすると

$$|\Psi\rangle = c_\Lambda(t)|\Lambda, \boldsymbol{0}\rangle + \int d\Omega_n c_{\boldsymbol{n}}(t)|p, -\boldsymbol{n}\rangle|\pi, \boldsymbol{n}\rangle$$

と書ける．様々な方向の固有状態のモード $|p, -\boldsymbol{n}\rangle|\pi, \boldsymbol{n}\rangle$ に, 親粒子のモード $|\Lambda, \boldsymbol{0}\rangle$ から確率振幅が時々刻々注ぎ込まれていくイメージが QM では正しいと考えられる．またある方向 $\boldsymbol{n}$ の確率振幅の強度は $c_{\boldsymbol{n}}(t)$ であるが, これは遷移振幅に他ならない

$$c_{\boldsymbol{n}}(t) = \langle p, -\boldsymbol{n}|\langle \pi, \boldsymbol{n}(t)|\Lambda, \boldsymbol{0}(t=0)\rangle$$

また $t \to \infty$ の極限を取った場合には場の量子論の S 行列の方法における行列要素に帰着する．さてここまでで, QM における崩壊の描像はコヒーレントな確率振幅の遷移であり, ボールみたいな粒子がある日突然爆発して無数の破片を散らしているわけではないと私が信じる根拠を述べてきた．ではこの干渉性は未来永劫続くと考えるべきだろうか．これは非常に難しい問題であるが, 少なくとも S 行列の方法など実験結果を予言するための処方で想定している設定では No である．例えば通常 $\Lambda \to p\pi$ という崩壊幅 Γ は

$$\Gamma = \int d\Omega_n \frac{d\Gamma}{d\Omega_n} \propto \int d\Omega_n |\mathcal{M}(\boldsymbol{n})|^2$$

のように $|\mathcal{M}|^2$ の和（確率の和）として求めているが, 決して確率振幅の和

$$\Gamma \propto \left|\int d\Omega_n \mathcal{M}(\boldsymbol{n})\right|^2$$

という風にはならない．これは我々が終状態の粒子を確認するときは必ず干渉性が失われていて, ある特定の方向の固有状態に必ず落ちているということを想定しているからであり, 経験的な事実でもある．つまり

$$\int d\Omega_n c_{\boldsymbol{n}}(t)|p, -\boldsymbol{n}\rangle|\pi, \boldsymbol{n}\rangle \quad \to \quad |p, -\boldsymbol{n}\rangle|\pi, \boldsymbol{n}\rangle \tag{2.2.18}$$

という状態の射影が観測の前にあることが暗に仮定されている．これは通常の射影測定の定式化と同じである．逆に言えば SG 装置でのスピン測定のように, この $p\pi$ の「波」と相互作用を起こして射影測定を行わない限りはコヒーレンスは保たれる．

さてここまでの議論を踏まえて, 結局今回の場合は誰が $\boldsymbol{n}$ を決めているのかをもう一度考えることにする．まず $\Lambda \to p\pi$ が完全な自由空間で起こった場合は状態の射影 (2.2.18) は起こらないと考えるのが自然と思われ

る．一方検出器がある場合は検出器に粒子の” 雲” が当たって際に射影が行われ （デコヒーレンス [?, ?]） 相互作用の位置が確定し粒子の飛んでく方向が決定する．またそれ以前にコライダー実験における現実的な環境では空間にガスなどの分子や原子核が $O(10^{10-20}/m^3)$ のマクロスコピックなオーダーで満ちていて, それと崩壊粒子の相互作用でデコヒーレンスが起こることも考えられる．いずれにせよ崩壊粒子の方向を決めるのは環境とのランダムな相互作用であり崩壊のプロセスとは完全に独立である．また測定者はデコヒーレンス過程をコントロールもできない．我々が SG 装置のスピン測定軸の方向を自由に決められたのと対照的に, 崩壊粒子の方向を決めることができないのはそれゆえである．これがいわゆる「崩壊の受動性」という性質であるが, 後で述べるように LHVT をテストするという立場ではいささか無視できない問題となる．

2.3 LRT 検証の現象論と想定され得る loophole

ここまでの議論で polarization decay によるスピン測定は, SG 装置やフォトンの偏光板に代表される直接測定と等価なダイナミクスを持つことがわかった．どうやら LHVT のテストに使えそうだという気分になってくる．しかしここで注意しないければならないのは, ここまでの議論は全て QM における考察の帰結であって LHVT 一般に成立する保証は全くない．我々は QM と LHVT のどちらが正しいかをテストするという立場にあり, LHVT の満たす条件式が現実と矛盾をすることを示したい．この文脈においては QM の知識を a priori に使うという態度は正しくない．それでは LHVT $\wedge$ QM の真偽を実験で判定したことにしかならないからだ．この節ではこの点に注意し, LHVT において一般的に偏極計崩壊が SG 装置とどう異なる可能性があるかを分析していく．また仮定を加えてテストする LHVT のクラスを制限すれば凌げるかどうか, どこまで仮定を加えれば全うなテストになるかを見極める．すなわちこの偏極計崩壊の実験系を用いてテストが可能な LHVT の範囲と生じうる loophole を精査する．

2.3.1 LHVT における偏極計系の解釈

$\Lambda \to p\pi$ というものを記述する LHVT がどんなものかは正直わからない．そもそも今日我々が持っている素粒子やハドロンの理論というのは QM の議論に QM 議論を塗り重ねてできた代物であり, 古典論でこういうものを扱うノウハウは基本的には存在しない ($B^0\overline{B}^0$ 振動を記述する LHVT のモデルは存在する [41])．しかし実際に我々が興味や目的は, 既存の LHVT モデルを何発か潰すことではなく, 現実に即した LHVT のモデルが原理的に構成が可能かという数段高尚な問題である．つまり LHVT 一般が対象であり, まだ着想されたことのない未知の LHVT モデル含め全てがテストの対象であり, 我々の未知の究極理論が LHVT の山にある可能性はあるかという問いの答えが問題なのである．（そして実験によって「そんなことはないからもうこの山は探さなくていいよ」という答えが返ってくることを期待している．）

とはいえ何もとっかかりがないわけでもない．未知の理論といえど, 今までの QM が説明することに成功した全ての実験とは少なくとも辻褄は合ってないといけないだろう．$\Lambda, \overline{\Lambda}$ のスピンとそこから崩壊した π^-, π^+ の方向の相関

$$P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s}) = 1 + \alpha_\Lambda \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s} \tag{2.3.1}$$

$$P(\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s'}) = 1 - \alpha_\Lambda \boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{s'} \tag{2.3.2}$$

を「実験事実」として解釈することはできないだろうか．（$P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s})$ は条件付き確率で, Λ の偏極ベクトルが $\boldsymbol{s}$ だったときに崩壊粒子 π が $\boldsymbol{n}$ の方向に出て行く確率を表す．）
(2.3.1), (2.3.2) を測定した実験としては J. W. Cronin (1963) [68] やなどが有名で, また α_Λ を精度よく決めた実験としては O. E. Overseth (1967) [69] などがある．これらではいずれもスピンが偏極した Λ を生成し, 崩壊

角分布 $\Lambda \to p\pi$ を測っている．この Λ の偏極は保証するものは何なのか．実は直接観察して確認しているわけではなく, QM や保存則を用いて間接的に導いている．その議論は以下の通りである．

まずこの Λ は π を炭素などのターゲットにぶつけて $\pi^- p \to \Lambda K$ という反応で生成している．このときターゲットには磁場がかかっており, 陽子は個別に見るとスピンはバラバラだが平均すると磁場の方向に向いている．また $\pi^- p \to \Lambda K$ は強い相互作用による反応であり, パリティは少なくとも実験精度の範囲内で保存している．それを認めると, π と K は擬スカラーでパリティodd・スピン 0, 陽子と Λ はパリティeven・スピン 1/2 なので全角運動量保存により軌道角運動量は 0 にならなければならない．すなわち陽子のスピンがそのまま Λ に引き継がれなければならないことがわかり, Λ のスピンは陽子の偏極方向, すなわち磁場の方向に（統計的に）偏極することが保証される．

この議論を我々は QM の知識を使わずに再現することはできないだろうか．まずターゲットの陽子の偏極について, 一般に磁場をかけると結晶の核スピンが統計的にその方向に偏極するというのは経験的事実として要請することは妥当と見られる．次に Λ の生成反応 $\pi^- p \to \Lambda K$ のパリティ保存だが, パリティや統計性といったものも量子力学を考える上で必要となったために導入された概念であり, LHVT 一般でこれをどう考えるかは難しい問題である．パリティ保存を諦めて, それと全角運動量保存の帰結として生じるスピン保存はどうだろうか．我々はエネルギー・運動量保存, また低エネルギー散乱における軌道角運動量の少ない寄与（S 波近似）を要請すると, $\pi^- p \to \Lambda K$ の散乱分布から軌道角運動量が反応前後で保存することが示される．その場合は全角運動量保存を法則として要請すると, スピン保存は導くことができる．従って我々はエネルギー・運動量・全角運動量保存を法則, さらに散乱問題における一般的な性質を要請すると, Λ が偏極する事実を QM に頼らずに保証することができる．これらは LHVT 一般で満たさなければならない特徴のように思えるので (2.3.1), (2.3.2) を LHVT の文脈でも実験結果として解釈することは合法的であると我々は考える．これは非常に重要なことであり, これによって $\Lambda\overline{\Lambda}$ から崩壊した $\pi^-\pi^+$ を方向に $\Lambda\overline{\Lambda}$ のスピンがあると推測することが LHVT でも可能であるということになる．この事実は 3 章で LHVT が満たすベル不等式を作る際に強力な条件となる．

τ の場合は Λ の生成の際の偏極結晶に相当するものがないため大きな困難があり, τ のスピンと崩壊分布の関係は要請するしかないと思われる。固定標的実験であれば上記の議論の正当性が復活することが指摘されている [64]．ちなみにこの (2.3.1), (2.3.2) を実験事実として要請するというのは, 1.3.3 の陽子対実験において陽子の偏極と陽子の散乱方向の関係 (1.3.4) をとして設けたのと全く同じことである．定式化における具体的な処理は次章でまた議論する．

2.3.2 Free-will loophole

2.2.3 で偏極計崩壊崩壊 $\Lambda \to p\pi$ や $\tau \to \pi\nu$ における π の運動方向 $\boldsymbol{n}$ は「能動的な測定軸」としての機能を完備していることを前節で確認した．しかし崩壊粒子の方向は, SG 装置の磁場のように観測者が能動的に方向を選択できる軸ではない．QM の範疇ではこれは何も意味しないが, これで LHVT をテストしようとした場合は, 1.3.2 で述べたいわゆる free-will loophole が生じる．すなわち崩壊する十分前から崩壊粒子の方向が決まっているという描像で粒子を表現する LHVT は直ちに loophole となる．ベル不等式での LHVT と QM の違いは, 本質的には測定軸の方向変化に対して瞬間的反応ができるかどうかということなので, 測定軸の方向を観測者が自由に決定できない場合は常にこういった loophole がついて回る．これはよく「崩壊の受動性」と呼ばれる粒子崩壊を使ったベル不等式実験で避けられない問題である．さらにここでは最終的に $\pi\pi$ の方向が測定量となるが, 運動量は 3 成分同時に測定できるという性質から, ばつの悪いことに loophole (ベル不等式を満たさない LHVT) が発生するだけでなく QM の予言を完全に再現する LHVT まで構築することが可能であることが M. Abel *et al.* (1992) [64], H. Dreiner (1992) [65], A. Afriat and F. Sellen (1999) [70] らによって指摘され

ている．

受動性問題は我々ではどうすることもできないのでこの free-will loophole はこのまま放置せざるを得ない．代わりに「**2 つの崩壊 $\Lambda \to p\pi$, $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi$ が互いに space-like であるとき，崩壊粒子 π の方向はその親粒子にしか依らない**」という仮定を設けて，それが成立する LHVT のみを相手するを相手することにする．しかしこの仮定自体は物理的には合理的であり，依然として LHVT の主要なサブグループがテストの対象となっていると言える．

2.3.3　Efficiency loophole

Free-will loophole の発生は不可避であることがわかったがその他の loophole はどうであろうか．Efficiency loophole に関しては $K^0\overline{K}^0$, $B^0\overline{B}^0$ の実験と同様厳しい．

光学実験と違って，一般にコライダー実験では検出効率は問題ではない．荷電粒子は簡単に物質と相互作用するので，コライダーで生ずる粒子は極端にエネルギーの低いものや中性のハドロンを除けば 100% に近い検出効率を誇る．主にネックなのはイベント選択である．今回の場合は BG の混入が感度を下げる原因となるため (5.3 にて議論する) イベント選択は比較的厳しくしる必要があり，さらに崩壊が space-like であるものしか使わないため，結果一部の，場合によっては大半のシグナルイベントを捨てることになる．BG の少ない Λ 系列でも最終的な効率は楽観的に見積もって 40%, τ 系列はニュートリノが生じてシグナルイベントの手がかりが少なくなる分 BG の除去により厳しいカットが必要となり典型的に 15% $\sim$ 20% 前後となる．これは homogenous assumption を仮定しなかった場合に必要な最低効率 $\epsilon > 0.67$ (Eberhard 不等式) [27] には大きく及ばない．

2.3.4　Locality loophole

Locality loophole に関しても崩壊を利用する実験の弱点であるが，幸いなことに今回は塞ぐことが可能である．

SG 装置のスピン測定に対応するのはここでは $\Lambda\overline{\Lambda}$ の崩壊である．ナイーブに考えるとこの 2 崩壊が space-like であるを保証することはできないように思える．というのも崩壊するタイミングは崩壊の方向と同様観測者は制御できないため，2 崩壊が space-like かは単純に運である．運が悪い time-like なイベントは一定数存在する．$c\bar{c} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ で $c\bar{c}$ として η_c, χ_{c0}, J/ψ の 3 つのケースでまずこの割合を求めてみる．

$c\bar{c}$ 静止系において時刻 $t = 0$ に Λ, $\overline{\Lambda}$ が発生して back-to-back で走ってくものとして考え，これらはそれぞれ時刻 $t = t_1, t_2$　$(t_1 < t_2)$, 原点からの距離が x_1, x_2 のところで崩壊したとする．(図 2.4 参照） 2 崩壊が space-like の条件とは，先に起きた Λ_1 の崩壊の情報がもう片方の Λ_2 に伝わる前に Λ_2 が崩壊することなので，

$$\begin{aligned}(t_2 - t_1)\, c &< x_1 + x_2 \\ &= \beta_\Lambda c (t_1 + t_2)\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

すなわち

$$t_2 < \frac{1+\beta_\Lambda}{1-\beta_\Lambda} t_1$$

これを実現する確率 ω_1 は, Λ の崩壊時間が指数分布に従うことを用いると

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \int_0^\infty dt_1 \int_{t_1}^{\frac{1+\beta_\Lambda}{1-\beta_\Lambda}t_1} dt_2\ \frac{1}{\tau_\Lambda}\exp\left(-\frac{t_1}{\tau_\Lambda}\right)\ \frac{1}{\tau_\Lambda}\exp\left(-\frac{t_2}{\tau_\Lambda}\right) \\ &= \frac{\beta_\Lambda}{2}.\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

τ_Λ は $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の寿命である．$\overline{\Lambda}$ が Λ より先に崩壊する場合 $(t_1 > t_2)$ も対称性により同確率で起こるので, 全体の space-like 率 ω は

$$\omega = 2\omega_1 = \beta_\Lambda.$$

である．このように space-like の割合は β_Λ そのものである．（$\Lambda, \overline{\Lambda}$ の寿命に依らないのは面白い）それぞれのチャネルに対する β_Λ や space-like 率は表 2.2 の通りである．残念なことに space-like 率はせいぜい $65\% \sim 75\%$ である．一見我々は $2 \sim 3$ 割の time-like なイベントを否応無しに掴まされる羽目になるように思えるが, 幸いなことに $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の崩壊位置 x_1, x_2 は実験で再構成が可能である．なぜなら $\Lambda \to p\pi^-$, $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ の崩壊の終状態粒子は全て荷電粒子であり, 次の節で説明するがこれらは検出器内に飛跡を作る．p と π^- の飛跡は Λ の崩壊した位置から始まっているので Λ の崩壊点 x_1 がわかる．$\overline{\Lambda}$ に関しても同様である．（図 2.4)）Λ と $\overline{\Lambda}$ の崩壊点が近すぎたとき精度に問題が生じるが, $\Lambda, \overline{\Lambda}$ が長寿であること $(\tau_\Lambda = 0.26\,\mathrm{ns})$ により崩壊長は典型的に $7-9$cm 前後に達する (表 2.2 参照) ので今回はその限りではない．これにより我々は space-like なイベントだけを選択することができるようになる．具体的には (2.3.3) を x_1, x_2 で書き直した式

$$x_1 + x_2 > \frac{1}{\beta_\Lambda}|x_2 - x_1|$$

を満たすイベントのみを拾ってくればよい．

表 2.2: M_ψ は $c\bar{c}$ の mass, β_Λ は生ずる Λ の速さ, L は Λ の崩壊長（崩壊するまでに走る距離の平均）である．

Channel	$M_\psi(\mathrm{GeV/c^2})$	β_Λ	L(cm)
$\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$	2.981	0.663	6.91
$\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$	3.415	0.757	9.04
$J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$	3.096	0.693	7.50

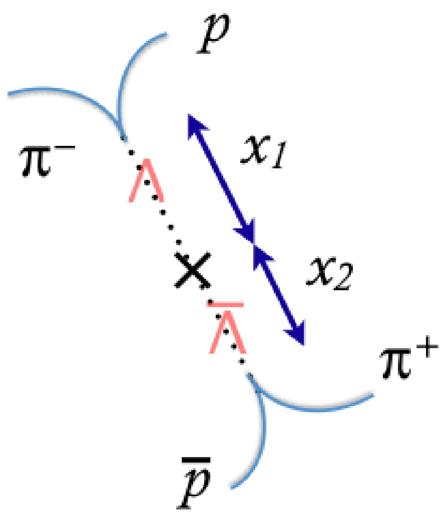

図 2.4: $A \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi\bar{p}\pi$ のスケッチ. x_1 と x_2 はそれぞれ先と後に崩壊した Λ の飛程, 青線はトラッカーで検出できる荷電粒子の飛跡を表している. $\Lambda\overline{\Lambda}$ は中性ハドロンなので飛跡を残さないが, $p\pi^-$ と $\bar{p}\pi^+$ の飛跡を崩壊点まで外挿することによって, IP ($\times$) からの軌道が推定できる.

ここまでは $c\bar{c}$ の静止系で議論を進めてきたが, 理論のローレンツ不変性から space-lke 率はどの系で見ても同じ値である. すなわち $c\bar{c}$ 静止系における β の値 (定数) が全ての系における space-like 率となる.

τ 系列に関しては, Λ 系列での $p\bar{p}$ がニュートリノに替わる. これらは中性粒子で検出器内に痕跡を残さないため τ の二次崩壊点を同定して space-like なイベントのみを選択的に取得することはできない. しかし今考えているチャネルにおける τ は十分速いため問題は深刻ではない. 例えば $Z \to \tau\tau$ や $H \to \tau\tau$ で生じる τ 対は $\beta_\tau > 0.999$ であり, ほとんど全部のイベントが元々space-like である. $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ では重心系エネルギー $\sqrt{s}$ によって β_τ が異なり,

$$\beta_\tau = p_\tau / E_\tau \tag{2.3.5}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{m_\tau^2}{E_\tau^2}} \tag{2.3.6}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{4m_\tau^2}{s}} \tag{2.3.7}$$

である. $\sqrt{s}$ が大きいほど β_τ も大きくなる. Belle の $e^+e^- \to \Upsilon(4S)$ 共鳴での continuum を想定した場合は $\sqrt{s} = 10.58\mathrm{GeV}$ で $\beta_\tau = 0.94$ で, これはギリギリ許容範囲である. time-like イベントの混入の影響をどう評価するかは 5.3 にて言及する.

2.3.5 Loophole まとめおよび過去の実験との比較

以上の loophole に対する各実験の耐性をまとめたのが表 2.3 になる (本提案実験は “Chen (2013)” に相当する).

表 2.3: Chen (2013) は本論文で提案した実験方法と定式化を表す．$\times$ はそれに対応する loophole が生じていること, "Others"はその他発生する loophole や追加で用いた仮定を示す．上段は光学実験, 下段は非光学実験である．

Experiments	Exp. type	Efficiency	Locality	Free-will	Others
Aspect *et al.* (1981)	photon	$\times$	$\times$	$\times$	
Ursin *et al.* (2007)	photon	$\times$			
Guistina *et al.* (2009)	photon		$\times$	$\times$	
Rowe *et al.* (2001)	ions		$\times$		
Sakai *et al.* (2006)	proton		$\times$	$\times$	
Apostolakis *et al.* (1999) (CPLEAR)	$K^0\overline{K}^0$	$\times$	$\times$	$\times$	unitarity
Go *et al.* (2007) (Belle)	$B^0\overline{B}^0$	$\times$	$\times$	$\times$	unitarity
Chen (2013)	$\Lambda\overline{\Lambda}, \tau^+\tau^-$	$\times$		$\times$	

2.4 コライダー実験における粒子の測定

我々がベル不等式のテストで必要となる変数は $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ でありこれは偏極計崩壊 $\Lambda \to p\pi^-$, $\Lambda \to \bar{p}\pi^+$ で生じる $\pi^+\pi^-$ のそれぞれ $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の静止系における運動方向である．従って $\pi^+\pi^-$ の実験室系での方向を測定しただけではまだ不十分であり, さらにその運動量と, 崩壊の相方である $p, \bar{p}$ の運動量が必要である．これらの情報から運動量・エネルギー保存則を用いて $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の運動量 3 成分全てを再構成して初めて $\Lambda, \overline{\Lambda}$ 静止系と実験室系の対応関係がつき, $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の進行方向に boost back することによってそれらの静止系で物事を考えることが可能となる．よって終状態粒子 4 つ $p\pi^-\bar{p}\pi^+$ の運動量, それも 3 成分全部をどう拾ってくるかの勝負となる．

ありがたいことにこれはコライダー実験が最も得意とする分野である．通常のコライダー実験では粒子ビームの衝突点（IP: Interaction Point）を囲むように円筒状の検出器が置かれ, 最も内側に崩壊点の位置を再構成するための崩壊点検出器, 次に荷電粒子の運動量を測るトラッカー, 粒子識別のための TOF (Time of Flight) カウンターなどの補助測定器, 外側にエネルギーを測定するカロリメーターやミューオン検出器を配置するのが一番典型的なデザインである．無論トラッカーでの運動量測定がここでは一番の鍵である．トラッカーはその名の通り, 荷電粒子の飛跡を検出する測定器である．コライダー実験においてはドリフト チェンバーというタイプのものが用いられることが多く測定原理は以下の通りである．

まずチェンバーに Ar などのガスを封入する．通過した荷電粒子は電磁相互作用でガス分子の電子を電離するが, この電離電子をチェンバー内に印可した電場によってドリフトさせる．チェンバー内には陰極のワイヤーを張り巡らせ, ドリフトした電子はそのうちある陰極に吸い寄せられ, 最終的には電子なだれを起こしながら吸収される．また荷電粒子がチェンバー内に突入した時刻を記録するトリガーシステムを用意することによって, 陰極の吸収時刻との差から電子がドリフトした時間がわかる．そしてこれら陰極の位置・ドリフトに要した時間・電場の分布などの情報を総合して, ドリフト電子が最初に荷電粒子によって電離された位置を推定することができる, チェンバー内を通過した荷電粒子の通ったルートが判明するというのが一番ポピュラーなドリフト チェンバーの測定原理である．(最近は陰極にワイヤーの代わりにシリコンのピクセルを使うものや, TPC (Time Projection chamber) などドリフト チェンバーの機構を応用したより高度なトラッカーが開発されている．)

次に粒子の飛跡から運動量をどう測定するかを説明する．早い話がチェンバーに磁場を印可すればよいのである．荷電粒子はローレンツ力によって磁場に垂直な運動量成分が曲げられるので, トラッカーで飛跡の曲率を求めることによって, 磁場に垂直な運動量成分 P_T（横運動量）がわかる．運動方向の決定はやや複雑である．というのも我々は磁場によって曲げられる前の粒子の運動量が知りたいので (図 2.5 の青矢印) この螺旋状の軌道をフィットし, IP に向かって外挿したものを計算する必要がある．その際に崩壊点検出器による, IP 付近の位置情報は大きな助けとなる．運動量の絶対値 P は, この手続きで求めた横運動量と運動方向の 2 つから一意に決まる．具体的には磁場との天頂角 θ を用いて

$$P = \frac{P_T}{\sin\theta}.$$

である．今日までにこれらは極めて高い分解能を実現しており, エネルギーが 1-10GeV の荷電粒子に対して典型的に, 運動量分解能 0.5% – 1%, 粒子の方向の分解能 $\delta\theta, \delta\phi \sim 1$mrad を達成している．5 章でまた考察するが, これは我々のテストには十分すぎる精度である．

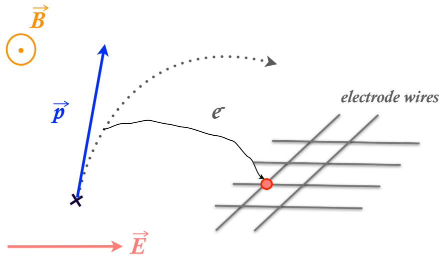

図 2.5: トラッカーにおける運動量測定のイメージ.

Λ チャネルは終状態の 4 粒子全てが荷電粒子なのでトラッカーによって運動量が全粒子測定できるのに対して, τ チャネルは前節でも述べたようにコライダー実験で測定不能なニュートリノ $\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$ が 2 つ生じるため Λ チャネルのときのように π, ν の運動量から τ を再構成することは直接はできない. e^+e^- のような重心系エネルギーが確定している場合は, 終状態粒子のエネルギー・運動量の和のインバランスから, missing 4 momentum $p^\mu_{\rm mis}$ が取得できる. この時点で未知数（自由度）を全て潰すとだけの条件は揃っている. 自由度は 6 つ (ニュートリノの運動量 $p^\mu_\nu, p^\mu_{\bar{\nu}}$ のそれぞれ 3 成分) に対して, 使用できる束縛条件は missing 4 momentum $p^\mu_{\rm mis}$ の 4 成分と $\tau^+\tau^-$ の mass shell 条件の 2 つである. これらの関係は

$$\begin{aligned} m_\tau^2 &= (p_- + p_\nu)^\mu (p_- + p_\nu)_\mu \\ m_\tau^2 &= (p_+ + p_{\bar{\nu}})^\mu (p_+ + p_{\bar{\nu}})_\mu \\ p^\mu_{\rm mis} &= p^\mu_\nu + p^\mu_{\bar{\nu}} \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

で, p^μ_-, p^μ_+ はそれぞれ π^-, π^+ の 4 momentum である. 理論上はこれで全ての自由度を解析的に解くことができ, (2 価性は生じるが) ニュートリノの運動量が求められる. あとは Λ チャネルでの処方と同様の処理を行えばよい. しかし測定の誤差で p^μ_-, p^μ_+ および $p^\mu_{\rm mis}$ に擾乱が加わることによって, その影響が束縛条件 (2.4.1) を通じて増長されたり, 解が消えたりと $\tau\tau$ の再構成に大きく影響する. 実際にはこれらに加えて $\pi\pi$ 飛跡の位置情報が利用できる. すなわちトラッカーの π の軌跡から, IP と各 π の飛跡のなす面が決められる. この面にはそれぞれの τ もしくは ν の運動量ベクトルが含まれるため（図 2.6 参照）τ1 つあたりの運動量の自由度を 1 つ減らすことができる. 結果として条件が自由度より 2 つ過剰になることになるが, これによって (2.4.1) の条件を緩めて測定誤差の伝搬の影響を和らげることが可能になる. つまり方程式を解く代わりに, 条件に最も合うよう自由度を定めるフィッティング (kinematical fit) を行うことになる. これによって $\tau\tau$ の再構成は安定に行うことができる.

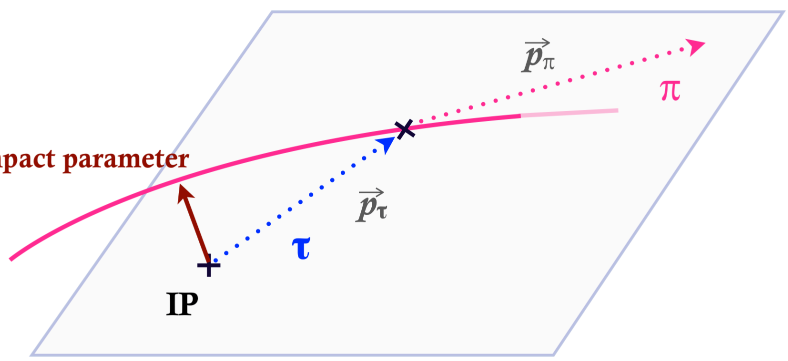

図 2.6: τ の運動量 ($\boldsymbol{p}_\tau$), 崩壊で生じた π の運動量 ($\boldsymbol{p}_\pi$) および再構成された π の飛跡 (ピンク実線). 飛跡の impact parameter は衝突点 (IP) から飛跡への最短距離を与える法線ベクトルとして定義される.

以上 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ は Λ, τ チャネルいずれにおいても精度の心配はいらないことがわかったが, そのかわり一つ気になるのはトラッカー内の磁場である. オーダーにして典型的に 1T の強い磁場がかかってるが, これらが $\Lambda\overline{\Lambda}$ や $\tau\tau$ の崩壊の前にスピン状態を変えないか, エンタングルメントを破壊しないかという懸念がある. 幸いトラッカーの中の磁場はなるべく勾配がなく均一になるよう設計されているので, SG 装置での測定のように粒子のスピン次第で軌道が変えられるということはないと思われる. 従って崩壊するより前に状態が射影されることもなく, エンタングルメントが解消されることも理想的な均一磁場を仮定する限りはない. 確かに完全に均一な磁場を用意することは簡単ではない. その不均一さによって原理的にコヒーレンスが破壊される可能性はある. しかしその寄与は小さいと思われるし, 逆に大きくて測定に影響が出るようならそれはそれで面白い（この実験は LHVT のテストに加えて coherence の robustness 測定にもなる！）ので現段階では少なくとも懸念ではない.

第3章　本実験系におけるベル不等式の定式化

3.1　スピンについての基本不等式

この章では我々のテストで使うベル不等式を作っていく．ここまで見てきたベル不等式は全て離散的な物理量を変数としたものだったが, ここでは π, π の運動方向 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ という連続的な物理量が測定量となる．陽子対の実験 (1.3.3) のときは仮想的な測定軸を用いて $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ から離散変数を作るという方法を取ったが, 今回は $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ をそのまま用いて, スピンの相関が $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ に伝搬した様がよく見渡せる, 簡潔な不等式の定式化を目指すことにする．以下の定式化では Λ チャネルと τ チャネルで全く相違はないので, Λ チャネルの例で話を進めることにする．

まず最初に Λ と $\overline{\Lambda}$ のスピン偏極ベクトル $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ が満たす関係式を考える．任意の単位ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ と $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ の内積を以下のように定義し

$$s_a := \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{a} \qquad s_c := \boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{c}$$
$$s'_b := \boldsymbol{s'} \cdot \boldsymbol{b} \qquad s'_d := \boldsymbol{s'} \cdot \boldsymbol{d}$$

$-1 \leq s_a, s'_b, s_c, s'_d \leq 1$ と (1.2.2) より CHSH 型の代数不等式

$$|\langle s_a\, s'_b \rangle + \langle s_a\, s'_d \rangle + \langle s_c\, s'_b \rangle - \langle s_c\, s'_d \rangle| \leq 2. \tag{3.1.1}$$

を導くことができる．

注意すべきはここでは $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ の実在性, つまり各時刻で $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ の 3 成分で値が確定していることは要請していない．$\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ は測定値である必要はなく, QM のような描像の偏極ベクトルでも構わない．ただし偏極ベクトルの測定値は決まっていなくとも, 偏極ベクトルが常に 3 成分定義できることは要請する．例えば QM の場合では孤立した 1 粒子のスピンに対しては必ず一つの偏極ベクトルが定義できたが, 2 粒子がスピン 1 重項を組んでいる等方的な状態ではそれぞれのスピンについて偏極ベクトルを定義することはできなかった．我々が要請する「偏極ベクトルの存在」はどんな状況であれ粒子の偏極ベクトルが定義できるということであり, それさえ認めれば (3.1.1) は代数不等式なので直ちに導かれる．
LHVT の言葉で言い換えると「測定値 $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ の隠れた変数として偏極ベクトル $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ を考える」ということである．すなわち

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s'}, \lambda), \qquad \boldsymbol{n'} = \boldsymbol{n'}(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s'}, \lambda) \tag{3.1.2}$$

λ は $\boldsymbol{s}$,$\boldsymbol{s'}$ 以外の隠れた変数のセットを表し, $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n'}$ が異なる λ をそれぞれ含んでいても構わない．これは形式的には SG 装置を用いたクラシックなスピン相関の思考実験における

$$A = A(\boldsymbol{a}, \lambda)$$

に対応しているが, (3.1.2) の $\boldsymbol{n}$ には測定軸 $\boldsymbol{a}$ に対応するものはなく, 引数に隠れた変数しか持たない．これは 2.4 で説明した崩壊の受動性の現れである．
以上の描像はスピンというものをそもそも考えない LHVT にはあてはまらないものであるが, 大多数の LHVT は EPR 問題を実在したスピンによって解決するという文脈で考案されたものであることを考えるとこれはあまり問題とならない．一方そのようなスピンを扱う LHVT においても偏極ベクトルが 3 成分同時に実在するこ

とは必ずしも要請していない．測定される方向 $(\boldsymbol{a})$ に対してのみ値 $A = A(\boldsymbol{a}, \lambda)$ が実在しているという立場が最も一般的である．なので我々は隠れた変数 $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ の実在性についてはこれ以上言及しない．ただ古典スピンに対応した性質を持った偏極ベクトルというものが定義できることのみを要請すれば今後の議論では十分で，極論 QM の偏極ベクトルのような全く実在性のないものでもよい．

3.2　終状態粒子の運動量に対する不等式

次に孤立系にある Λ について，Λ の偏極ベクトル $\boldsymbol{s}$ とそれから崩壊した π の方向 $\boldsymbol{n}$ の関係 (2.2.5)

$$P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s}) = 1 + \alpha_\Lambda \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s} \tag{3.2.1}$$

を「実験事実」として要請する．（仮定 A）この仮定の妥当性については 2.3.1 にて議論した通りである．$P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s})$ は条件付き確率で，Λ の偏極ベクトルが $\boldsymbol{s}$ だったときに崩壊粒子 π が $\boldsymbol{n}$ の方向に出て行く確率を表す．$\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ についても同様に

$$P(\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s'}) = 1 - \alpha_\Lambda \boldsymbol{n'} \cdot \boldsymbol{s'} \tag{3.2.2}$$

実験により $\alpha_\Lambda = -0.642 \pm 0.013$ である．また確率の規格化は

$$\int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi} P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s}) = \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n'}}}{4\pi} P(\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s'}) = 1$$

である．

続いて Λ と $\overline{\Lambda}$ が立て続けに崩壊し，それらが事象として互いに時空間的に離れている (space-like) という状況を考える．(2.3.1)(2.3.2) を用いて，上で導いた $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ の相関に関する不等式 (3.1.2) を $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ についての不等式に焼きかえる．$\langle n_a n'_b \rangle$ は以下のように書ける

$$\begin{aligned}\langle (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b}) \rangle &= \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{n'}}}{4\pi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})\,P(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n'}) \\ &= \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{n'}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s'}}}{4\pi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})\,P(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})\,P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

$P(x)$ は確率変数 x の PDF である．ここで最後にもう一つ仮定を設ける．すなわち「(2 崩壊が space-like のとき）崩壊はその親粒子 Λ $(\overline{\Lambda})$ の偏極にしか依らない」ということである．（仮定 B）これによって $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n'}$ の確率的な振る舞いは独立であり

$$P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s})P(\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s'}) = P(\boldsymbol{n},\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'}) \tag{3.2.4}$$

のように分解できることが局所性原理によって保証される． この仮定は物理的には reasonable ではあるが，loophole となるモデルも簡単に作れることをもう一度強調する．つまり $\pi\pi$ の方向が事前に決まっているような，Λ と $\overline{\Lambda}$ がお互い離れる前まだ相互作用を行っているときに $\pi\pi$ の方向が決定するような LHVT では，$\boldsymbol{n}$ は $\boldsymbol{n'}$ や $\boldsymbol{s'}$ に依存性を持つことが可能であり (vice versa) (3.2.4) の分解は成立せず，今後の議論は破綻する．

上の仮定を満たす LHVT に対象を限定して話を進める．(2.3.1), (2.3.2) と (3.2.4) を (3.2.3) 代入して

$$\begin{aligned}&\langle (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b}) \rangle \\ &= \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{n'}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s'}}}{4\pi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})\,P(\boldsymbol{n}|\boldsymbol{s})\,P(\boldsymbol{n'}|\boldsymbol{s'})P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'}) \\ &= \int \frac{d\Omega_{\boldsymbol{n}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{n'}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s'}}}{4\pi}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})(1+\alpha_\Lambda\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s})(1-\alpha_\Lambda\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{s'})P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'}).\end{aligned}$$

$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ を, それぞれ $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s'}$ を極とした極座標 (θ,ϕ), (θ',ϕ') で表示して $d\Omega_{\boldsymbol{n}}d\Omega_{\boldsymbol{n}'}$ 積分を行うと

$$\begin{aligned}
&\langle(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})\rangle \\
&=\int\frac{d\cos\theta d\phi}{4\pi}\frac{d\cos\theta' d\phi'}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s'}}}{4\pi}(a_1\sin\theta\cos\phi+a_2\sin\theta\sin\phi+a_3\cos\theta) \\
&\qquad\times(b_1\sin\theta'\cos\phi'+b_2\sin\theta'\sin\phi'+b_3\cos\theta')(1+\alpha_\Lambda\cos\theta)(1-\alpha_\Lambda\cos\theta')P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})
\end{aligned}$$

$\cos\phi$ と $\sin\phi$ の項は ϕ 積分で vanish する．また $a_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{s}=s_a$, $b_3=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{s'}=s'_b$ なので

$$\begin{aligned}
&\langle(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{b})\rangle \\
&=\left(\int\frac{d\cos\theta}{2}\frac{d\cos\theta'}{2}(1+\alpha_\Lambda\cos\theta)(1-\alpha_\Lambda\cos\theta')\cos\theta\cos\theta'\right) \\
&\qquad\times\left(\int\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s}}}{4\pi}\frac{d\Omega_{\boldsymbol{s'}}}{4\pi}\,s_a\,s'_b\,P(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s'})\right) \\
&=-\frac{\alpha_\Lambda^2}{9}\,\langle\,s_a\,s'_b\,\rangle
\end{aligned}$$

以上より我々はスピンの相関 $\langle s_i s_j\rangle$ と $\pi\pi$ の方向の相関 $\langle s_i s_j\rangle$ の変換式

$$\langle n_i n_j\rangle=-\frac{\alpha_\Lambda^2}{9}\,\langle s_i s_j\rangle\qquad(i=a,c;\ \ j=b,d)\tag{3.2.5}$$

を手に入れることに成功した．この関係式は J. P. Baranov (2008) [59] が偏極ベクトルの相関 $\langle s_i s'_j\rangle$ の代わりにスピン測定値の相関 $\langle A(\boldsymbol{a})B(\boldsymbol{b})\rangle$ を用いて最初に導出したが, 使用した仮定やコンセプトに疑問点があったため筆者と Y. Nakaguchi が全く別の定式化でこれを導いた [72].

(3.2.5) を使ってスピンについての不等式 (3.1.1) は以下のようになる

$$Q:=|\,\langle\,n_a\,n'_b\,\rangle+\langle\,n_a\,n'_d\,\rangle+\langle\,n_c\,n'_b\,\rangle-\langle\,n_c\,n'_d\,\rangle\,|\,\le\,\frac{2\alpha^2}{9}\tag{3.2.6}$$

3.1.1 と違ってこの不等式は実験で測定できる物理量の言葉で書かれている．これが今回我々の系で使用するベル不等式である．QM では Λ と $\overline{\Lambda}$ の崩壊が space-like であっても, 2.2.3 にて説明したような非局所効果; 先に崩壊で生じた π の波束が収縮して方向 $\boldsymbol{n}$ が確定すると同時に逆の Λ の偏極ベクトルが $\boldsymbol{n}$ の方向を向くことによって $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n'}$ は Λ スピンを通じて間接的に相関を持つため (3.2.4) の分解が成立せず不等式を破る．破れが最大となるのは Λ と $\overline{\Lambda}$ のスピン・エンタングルメントが最大のときであり, このとき (3.2.6) の左辺 Q は古典極限（(3.2.6) の右辺）の $\sqrt{2}$ 倍となる．この不等式 (3.2.6) について何点かコメントがある．

- スピンは直接測らないという事情で Λ, $\overline{\Lambda}$ のスピンの実在性は必ずしも仮定しなくてもこの不等式は導ける．しかしだからといってこれは非実在・局所理論のテストに使えるかという点はまだはっきりはしていない．少なくともスピンが実在である通常の LHVT では問題がないという点ではこの不等式はベル不等式である．

- この不等式をテストするためには $\Lambda\overline{\Lambda}$ の崩壊が space-like なイベントのみを選択する必要がある．さもなくば (3.2.4) がそのままでは成立せず, 仮定 B よりも強い仮定を置くか, (3.2.6) の古典上限を修正する必要が出てくる．$\Lambda\overline{\Lambda}\to p\pi\bar{p}\pi$ チャネルは終状態粒子の飛跡から $\Lambda,\overline{\Lambda}$ の vertex が組めるので問題ないが, $\tau\tau\to\pi\nu\pi\nu$ チャネルでは飛跡が 1 本ずつしかないので厳しい．従って space-like なイベントのみを選択するのは難しいが, $Z,H\to\tau\tau$ では 99.9% 以上, $e^+e^-\to\gamma^*\to\tau\tau$ では重心系エネルギー $\sqrt{s}>10$GeV で 94% 以上のイベントで $\tau\tau$ が space-like に崩壊するため影響は限定的である．

- BG のイベントに対しては一般に (3.2.5) は成立しない．これは最初に $\Lambda \to p\pi$, $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi$ での実験結果として (2.3.1)(2.3.2) を要請しているからである．この処理については 5.3 で説明する．

- 全てのイベントが 4 項全てに寄与するので各項ごとに測り直す必要がない．いっぺんに $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ のデータを取って後で解析すればよいので統計量が 4 倍節約になる．フォトンの実験と違って我々の統計量は有限であることを考えるとこの性質はとてもありがたい．

- 面白いことにこの不等式の破れの相対的な大きさは α の大きさ, すなわち崩壊の偏極計としての性能に依らない．量子極限と古典極限の比は α のよらず常に $\sqrt{2}$ である．これは chapter 4 にて示すが, $\langle n_i n'_j \rangle$ は α^2 に比例し, 古典極限 $(2\alpha^2/9)$ と同じ依存性を持つからである．従って α が小さくなると $\langle n_i n'_j \rangle$ が小さくなる代わりに, ベル不等式の上限も同じスケールで下がる．これはこの不等式が本質的にスピンの相関についての不等式であり, 式 (3.2.5) を用いてスピン相関を $\pi\pi$ の方向の相関に翻訳しただけのものであることを端的に表している．
  つまり $\Lambda \to p\pi$, $\tau \to \pi\nu$ 以外のどんな α の値を持つ偏極計でも理論上はベル不等式 (3.2.6) が破れる．これはこの不等式の最も重要な特徴であり, これによってより広い系でのテストの可能性が広がってくる．（今回考えている崩壊以外で候補となる偏極計崩壊について appendix にてまた議論する）

- このように理論上は α が 0 でない崩壊を偏極計として使えば必ずベル不等式 (3.2.6) は QM が正しかった場合破れてくれるが, 量子極限と古典極限の絶対差 $(\sqrt{2}-1)\frac{2\alpha^2}{9}$ は小さくなるので実験感度が落ちる．結局 α は大きい方が好ましいということである．

- $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ は形式上は測定軸であるが, 陽子対実験のときと同じく仮想的な測定軸であって, SG 装置の磁場などと違って $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ の結果に影響を及ぼすような物理的な意味はない．我々は $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n'}$ の相関が QM と LHVT でどう違うかを本質的には知りたい．従って Q を最大にするような $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ の組み合わせで固定してこれらの軸を不等式の表式から取り去り, そのときの Q の値 $Q_{\max}$ と古典極限と直接比較できる形にした方が見通しがよくなることが期待される．次の節ではその軸の組み合わせの最適化が解析的に行えることを示し, ベル不等式 (3.2.6) を極めて簡潔な形に書き換えることにする．

3.3　測定軸の最適化

この節は物理ではなく完全に数学である．

$$Q := |\langle n_a n'_b \rangle + \langle n_a n'_d \rangle + \langle n_c n'_b \rangle - \langle n_c n'_d \rangle|$$

の値を最大にするような単位ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を求めるという線形代数に毛が生えたような問題を解く．

まず $\langle n_a n'_b \rangle$ という格好はいかにも使い勝手が悪いのでここで 3×3 の相関行列 $\hat{C}$ を以下に定義する．

$$\hat{C}_{ij} := \langle n_i n'_j \rangle$$

$i, j = 1, 2, 3$ はそれぞれデカルト座標の x, y, z を表す．$\langle n_a n'_b \rangle$ は以下のように双線形の形に変形でき

$$\langle n_a n'_b \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_i\, b_j\, \langle n_i n'_j \rangle \;=\; \boldsymbol{a}^T \hat{C}\, \boldsymbol{b}\,. \tag{3.3.1}$$

従って Q は
$$Q = |\,\boldsymbol{a}^T\hat{C}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}^T\hat{C}\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})\,|.$$
となる. 物理に関係する部分 $(\hat{C})$ と, 関係ない仮想軸 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})$ の部分に分解できていることがわかる.

次に実際に Q の最大値を求めるが, この場合 $Q = \boldsymbol{a}^T\hat{C}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}^T\hat{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})$ として話を進めても一般性は失わない. また最終的にまた絶対値を取るので, これから求めるものが Q の最大値か最小値かは特に気にしない. （対称性からそれらの絶対値は等しいことが示せる. ）

ラグランジュ未定乗数法を用いる. 束縛条件は
$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} &= 1, & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b} &= 1 \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c} &= 1, & \boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d} &= 1 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$
の 4 つであり, 対応する未定乗数 $\xi_a, \xi_b, \xi_c, \xi_d$ を用いて以下のような関数 L を作る.
$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{a}^T\hat{C}\,(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) + \boldsymbol{c}^T\hat{C}\,(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}) \\ &- \frac{1}{2}\xi_a\,(\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}-1) - \frac{1}{2}\xi_b\,(\boldsymbol{b}^T\boldsymbol{b}-1) - \frac{1}{2}\xi_c\,(\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{c}-1) - \frac{1}{2}\xi_d\,(\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d}-1) \end{aligned}$$
L の全ての微係数を 0 とすると
$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{a}^T} = 0 \iff \hat{C}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) - \xi_a\boldsymbol{a} = 0 \tag{3.3.3}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{b}} = 0 \iff (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^T\hat{C} - \xi_b\boldsymbol{b}^T = 0 \tag{3.3.4}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{c}^T} = 0 \iff \hat{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}) - \xi_c\boldsymbol{c} = 0 \tag{3.3.5}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{d}} = 0 \iff (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^T\hat{C} - \xi_d\boldsymbol{d}^T = 0 \tag{3.3.6}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \xi_\alpha} = 0 \iff (3.3.2) \qquad (\alpha = a,b,c,d).$$
$\boldsymbol{a}^T, \boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{b},\boldsymbol{d})$ を (3.3.3)～ (3.3.6) の左辺からかけると, 束縛条件 (3.3.2) より未定乗数 ξ_α は以下のように書ける.
$$\begin{aligned} \xi_a &= \boldsymbol{a}^T\hat{C}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d}) & \xi_c &= \boldsymbol{c}^T\hat{C}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d}) \\ \xi_b &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^T\hat{C}\boldsymbol{b} & \xi_d &= (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^T\hat{C}\boldsymbol{d} \end{aligned} \tag{3.3.7}$$
これらを (3.3.4), (3.3.6) に再び代入すると,
$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} &= \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})^T\hat{C}\boldsymbol{b}} =: \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})}{\rho} \\ \boldsymbol{d} &= \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})^T\hat{C}\boldsymbol{d}} =: \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})}{\sigma}. \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{d}$ はそれぞれ $\hat{C}^T(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$ と $\hat{C}^T(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$ に平行であり, 規格化因子 ρ, σ はこれらのノルムが 1 になるように取る. すなわち,
$$\rho = \sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\hat{C}^T\hat{C}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})} \qquad \sigma = \sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\hat{C}^T\hat{C}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})} \tag{3.3.9}$$
ここで 3×3 の対称行列 S を新たに $S := \hat{C}^T\hat{C} = \hat{C}\hat{C}^T$ で定義する. (3.3.7) と (3.3.8) を用いて, (3.3.3) と

(3.3.5) の中の $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ を消去すると,

$$\begin{aligned}(\sigma+\rho)S\boldsymbol{a}+(\sigma-\rho)S\boldsymbol{c} &= \mu\boldsymbol{a}\\ (\sigma-\rho)S\boldsymbol{a}+(\sigma+\rho)S\boldsymbol{c} &= \nu\boldsymbol{c}\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}\mu &:= (\sigma+\rho)\boldsymbol{a}^T S\boldsymbol{a}+(\sigma-\rho)\boldsymbol{a}^T S\boldsymbol{c}\\ \nu &:= (\sigma+\rho)\boldsymbol{c}^T S\boldsymbol{a}+(\sigma-\rho)\boldsymbol{c}^T S\boldsymbol{c}\ .\end{aligned}$$

である.

これらは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ について以下のような固有方程式に帰着する.

$$\begin{aligned}\left[-4\rho\sigma S^2+(\sigma+\rho)(\mu+\nu)S\right]\boldsymbol{a} &= \mu\nu\boldsymbol{a}\\ \left[4\rho\sigma S^2+(\sigma+\rho)(\mu+\nu)S\right]\boldsymbol{c} &= \mu\nu\boldsymbol{c}.\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

左辺の ρ, σ, μ, ν も $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ の関数なので, 一見するとこの固有方程式は恐ろしく複雑な構造を持っているように見える．しかし試しに S の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ に (3.3.10) の左辺の行列 $T := \pm 4\rho\sigma S^2+(\sigma+\rho)(\mu+\nu)S$ を作用させてみると, $S\boldsymbol{v}_i=\lambda_i\boldsymbol{v}_i$（$\lambda_i$ は S の固有値）なので,

$$\left[\,\pm 4\rho\sigma S^2+(\sigma+\rho)(\mu+\nu)S\,\right]\boldsymbol{v}_i=\left[\,\pm 4\rho\sigma\lambda_i^2+(\sigma+\rho)(\mu+\nu)\lambda_i\,\right]\boldsymbol{v}_i.$$

これは S の全ての固有ベクトルが T の固有ベクトルでもあることを意味する．$\boldsymbol{v}_i$ が (3.3.10) の解を全てカバーしているかはもう少し議論が要る．まず S が 3 つの独立な固有ベクトルを持つ場合は, 明らかにそれらが T の固有ベクトルと 1 対 1 に対応しこれ以外の解はない．S が独立な固有ベクトルを 2 つかそれ以下しか持たない場合は, S がその固有空間 R_S への射影演算子であるをことを表すが, 射影演算子の性質より S^2 についても然りである．従って S^2 と S の線形結合である T も, R_S への射影演算子であることがわかるので, 独立な固有ベクトルは R_S を張る S の固有ベクトルそのものであることが示される．よって $\boldsymbol{v}_i$ が (3.3.10) の解 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ を過不足なく与えることが保証される.

$\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ のノルムが 1 であることを踏まえると

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}=\pm\boldsymbol{v}_i\\ &\boldsymbol{c}=\pm\boldsymbol{v}_j\\ &|\boldsymbol{v}_i|=1 \qquad (i,\ j=1,2,3)\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

これらを (3.3.8)(3.3.9) に代入すると $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{d}$ その他係数が全て求まる．$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{v_i},\ \boldsymbol{v_j})$ の場合をまず考えると

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{(\lambda_i+\lambda_j)(1+\boldsymbol{v}_i^T\cdot\boldsymbol{v}_j)}\\ \sigma &= \sqrt{(\lambda_i+\lambda_j)(1-\boldsymbol{v}_i^T\cdot\boldsymbol{v}_j)}\end{aligned}$$

(i) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}$ $(i=j)$ の場合

$$\begin{aligned}&\rho=2\sqrt{\lambda_i} && \sigma=0\\ &\boldsymbol{b}=\frac{\hat{C}^T\boldsymbol{v}_i}{\sqrt{\lambda_i}} && \boldsymbol{d}=(\text{arbitrary unit vector})\\ &Q=2\boldsymbol{a}^T\hat{C}\boldsymbol{b}\ =\ 2\sqrt{\lambda_i}\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

(ii) $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{c}$ $(i \neq j)$ の場合

$$\begin{aligned}
&\rho = \sigma = \sqrt{\lambda_i + \lambda_j} \\
&\boldsymbol{b} = \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j)}{\sqrt{\lambda_i + \lambda_j}} \qquad\qquad \boldsymbol{d} = \frac{\hat{C}^T(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)}{\sqrt{\lambda_i + \lambda_j}} \\
&Q = 2\sqrt{\lambda_i + \lambda_j}
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

途中で対称行列 $S = \hat{C}^T\hat{C}$ の固有ベクトルの直交性 $\boldsymbol{v}_i^T \cdot \boldsymbol{v}_j = \delta_{ij}$ を用いた.
他の組み合わせ $(\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{v_i},\, -\boldsymbol{v_j}),\, (-\boldsymbol{v_i},\, \boldsymbol{v_j}),\, (-\boldsymbol{v_i},\, -\boldsymbol{v_j})$ も結果は同様である. Q が最大になるのは (3.3.13) で λ_i と λ_j として, S の大きい 2 つの固有値を取ってきたときである.

最後にラグランジュ未定乗数法でしばしば発生する問題, 偽の最大値を取ってきている可能性について考える. 確かに今回のような, パラメータ空間において L の勾配を 0 とする条件を満たすものを解として取得し, その中で Q が最大のものを選ぶという方法では, パラメータ空間の境界で最大値を持つようなケースでは破綻する. しかし今回の場合パラメータ空間は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ の独立な単位球 4 つであり, 境界を持たない. よって求まった Q はパラメータ空間内で最大（最小）のものであることが保証される.

以上まとめると

$$Q_{\max} = 2\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} \leq \frac{2\alpha^2}{9} \tag{3.3.14}$$

λ_1, λ_2 は $\hat{C}^T\hat{C}$ の大きい 2 つの固有値である. 評価する不等式の上限が誤差を含む測定値 α を用いるのは都合が悪いので, (3.3.14) の右辺で両辺を割って

$$\begin{aligned}
&C_{ij} = \frac{9}{2\alpha^2}\langle n_i\, n'_j\rangle \qquad\qquad (i, j = 1, 2, 3) \\
&Q_{\max} = 2\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} \\
&Q_{\max} \leq 1.
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

これが我々が今回使うベル不等式である. LHVT では $Q_{\max}$ の上限は 1. （古典限界）量子論では最大で $\sqrt{2}$（量子限界）である.

第4章　量子力学における実験系の相関計算とベル不等式の破れ

この章では我々が考えている 6 つのチャネル; $\chi_{c0}, \eta_c, J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$; $Z, H \to \tau\tau$; $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ における $\Lambda\overline{\Lambda}$ および $\tau\tau$ のエンタングルメントの様式, また我々が 3 章で用意したベル不等式 (3.3.15) を実際に破るかを調べる．具体的には場の量子論の S 行列の方法を用いて行列要素を計算し, $\pi\pi$ の角度分布を $d\sigma/d\Omega_n d\Omega_{n'}$ を求める．そしてそこから C 行列,

$$C = \begin{pmatrix} \langle n_x n'_x \rangle & \langle n_x n'_y \rangle & \langle n_x n'_z \rangle \\ \langle n_y n'_x \rangle & \langle n_y n'_y \rangle & \langle n_y n'_z \rangle \\ \langle n_z n'_x \rangle & \langle n_z n'_y \rangle & \langle n_z n'_z \rangle \end{pmatrix}$$

と $Q_{\max} = 2\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$ を求め（$\lambda_{1,2}$ は $C^T C$ の固有値の大きい方 2 つ）, ベル不等式の古典限界である 1 を超えるかを見る．$Q_{\max}$ が 1 を大きく超えているチャネルは, 実験で確認できる可能性があり, 我々はそれらを 5 章で本当に甲斐性があるかをもっとまじめに調べる．

スカラー始状態の $\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$, $H \to \tau\tau$ に関しては結果は見え透いており陳腐である．これらは量子論で取れる最大値 $Q_{\max} = \sqrt{2}$（量子限界）を与える．計算するまでもないが, エンタングルメントが最大で構造がはっきりと見えるので非常に教育的なので, 検算も兼ねて解析する．ベクター始状態のチャネルに関しては全く自明でないはない．なぜなら相対論的効果で軌道角運動量がスピン状態を乱すため, 一般にはエンタングルメントの発生・消滅, どちらの可能性もあるからだ．また 5 章で考察するが, 我々が利用できる統計量はベクター始状態のチャネルの方が圧倒的に多いため, 結果は実験可能性を考える上で重要である．

計算自体は憤懣以外の何者でもないが, 計算の各経過で見えてくる構造は啓蒙的である．特に $\Lambda\overline{\Lambda}$ や $\tau\tau$ のヘリシティーのモードが絡み合うさま, それが終状態 $\pi\pi$ の方向の相関に伝搬していくさまは非常に鮮やかであり, 風流な読者の欲求を満たすだろう．

4.1　$\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$

まずは一番単純に見えるスカラー始状態の $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi\bar{p}\pi$ から見て行く．全体の行列要素 $\mathcal{M}$ はそれぞれ崩壊の行列の積となる．

$$\mathcal{M} = \sum_{i,j} \mathcal{M}^i_\Lambda \mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} \mathcal{M}^j_{\overline{\Lambda}}$$

$i, j = \pm$ はそれぞれ Λ と $\overline{\Lambda}$ のヘリシティーを表し, これらは観測しない中間状態なので全体の行列では和を取る．それぞれの崩壊の行列要素は以下の通りである．

$$\mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} \propto \bar{u}^i_\Lambda v^j_{\overline{\Lambda}} \tag{4.1.1}$$

$$\mathcal{M}^i_\Lambda \propto \bar{u}^{s_p}_p (1 + c_\Lambda \gamma^5) u^i_\Lambda \tag{4.1.2}$$

$$\mathcal{M}^j_{\overline{\Lambda}} \propto \bar{v}^j_{\overline{\Lambda}} (1 + c_{\overline{\Lambda}} \gamma^5) v^{s_{\bar{p}}}_{\bar{p}} \tag{4.1.3}$$

u_A, v_A はそれぞれ粒子 A, 反粒子 A の 4 スピノル, s_p と $s_{\bar{p}}$ は終状態の $p, \bar{p}$ のヘリシティーである．ハドロンは複雑な構造を持った複合粒子系であり, また強い相互作用を通じて崩壊する場合は摂動論が正確である保証がないので, $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の vertex に関しては有効ラグランジアンのアプローチを採用した．χ_{c0} はスカラーであり, $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ でパリティは保存しているとすると, vertex(4.1.1) は湯川結合に一意に決まる．一般に弱い相互作用が寄与する可能性があるのでこの限りではないが, $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ ではグルーオン 3 つを介した強い相互作用のプロセス (図 4.1) が支配的であることが理論・実験双方から示唆されており, 強い相互作用はここまでパリティを破った前例がなく, 少なくとも実験精度の中でパリティは保存しているので妥当な仮定だと思われる．

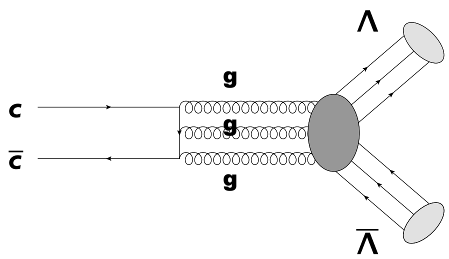

図 4.1: $c\bar{c} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の主要ダイアグラム．強い相互作用でグルーオン 3 つ介して対消滅し $\Lambda\bar{\Lambda}$ を発生させる．

(4.1.2) は 2 章の (2.2.6) と同じもので, c_Λ $(c_{\bar{\Lambda}})$ は (2.2.6) の c_V と c_A を用いて

$$c_\Lambda := -c_{\bar{\Lambda}} = \frac{c_A}{c_V}$$

である．$\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ をまず計算する．χ_{c0} の静止系で Λ が $\boldsymbol{p}$, $\bar{\Lambda}$ が $-\boldsymbol{p}$ に back-to-back に崩壊する場合を考えると, 反粒子のヘリシティーと反スピノルのヘリシティーが逆であること

$$v^j = \begin{pmatrix} \sqrt{p\cdot\sigma}\,\xi^{-j} \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\,\xi^{-j} \end{pmatrix}$$

に気をつけると [74],

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} &= \bar{u}^i_\Lambda(\boldsymbol{p}) v^j_{\bar{\Lambda}}(-\boldsymbol{p}) \\
&= \frac{E+m}{2}\left(\,(1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\,\right)\gamma^0 \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2}\left(\,(1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}},\ (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\,\right) \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

E_Λ, p_Λ, m_Λ は Λ と $\bar{\Lambda}$ のそれぞれエネルギー・運動量・質量であり, η は $\eta := p_\Lambda/(E_\Lambda + m_\Lambda)$ である．ここで $\xi^\pm_{\boldsymbol{p}}$ は 2 章の (2.2.10) であり, $\boldsymbol{p}$ の極座標を (θ, ϕ) とすると $-\boldsymbol{p}$ は $(\pi-\theta, \phi+\pi)$ なので

$$\xi^+_{-\boldsymbol{p}} = \xi^-_{\boldsymbol{p}} \qquad\qquad \xi^-_{-\boldsymbol{p}} = -\xi^+_{\boldsymbol{p}}. \tag{4.1.4}$$

これより

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} &= \frac{E+m}{2}((1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}) \begin{pmatrix} \pm(1\pm\eta)\ \xi^i_{\boldsymbol{p}} \\ \mp(1\mp\eta)\ \xi^i_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= \left[(1+\eta)^2 - (1-\eta)^2\right]\delta_{ij} \\
&= 2p_\Lambda \cdot \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle$ で $\Lambda\overline{\Lambda}$ ヘリシティー状態を記述することにすると, $\mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}}$ は各ヘリシティー状態 $i, j = \pm$ の係数に比例するので

$$\mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} \propto \langle i, j | \psi_{\Lambda\bar{\Lambda}} \rangle .$$

すなわち

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle = \sum_{i,j} \langle i, j | \psi_{\Lambda\bar{\Lambda}} \rangle \, |i, j\rangle \propto \frac{|{+}{+}\rangle + |{-}{-}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

これはヘリシティー 3 重項状態であり, ヘリシティーについて最大にエンタングルした状態である. またそれぞれの Λ の静止系に移ったときはスピン 3 重項状態であることを表す.

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle \to \frac{|{\uparrow\downarrow}\rangle - |{\downarrow\uparrow}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

スカラーから崩壊した 2 フェルミオンの合成スピンが 0 ではないというのは何か変な気分にさせられる. 一応これは湯川結合のパリティ変換に対する変換性から理解はできる. 湯川結合の行列要素 $\bar{u}v$ はパリティ変換に対して不変であるので, $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ は反応前後でパリティは保存する. ここから先は 2.2.1 で行った議論と同じであるが, χ_{c0}, Λ, $\overline{\Lambda}$ の intrinsic parity はそれぞれ+, +, -なので, パリティを保存させるためには $\Lambda\overline{\Lambda}$ は相対軌道角運動量 $l = 1$ を持たざるを得ず, 全角運動量保存より同時に合成スピン $S = 1$ を意味する.
これは相対論的効果でスピンと軌道角運動量が混合した帰結と考えることもできる. 事実, 非相対論的極限 $p_\Lambda \to 0$ では $\mathcal{M}_{\chi_{c0}} \to 0$ になり, 非相対論的量子力学のスピン保存則は破っておらず辻褄は合っている.
次に全体の行列 $\mathcal{M}$ を計算し $\pi\pi$ の角度分布を求める. $\pi\pi$ の微分断面積は

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} &\propto \sum_{s_p, s_{\bar{p}}} |\mathcal{M}|^2 =: \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= \sum_{i,j,i',j'} \left[\overline{\mathcal{M}^{*i'}_{\Lambda} \mathcal{M}^{i}_{\Lambda}} \mathcal{M}^{ij}_{\chi_{c0}} \overline{\mathcal{M}^{*j}_{\bar{\Lambda}} \mathcal{M}^{j'}_{\bar{\Lambda}}} \mathcal{M}^{*ij}_{\chi_{c0}} \right]. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

s_p, $s_{\bar{p}}$ の和（上線で表している）は $\mathcal{M}$ を 2 乗した後に取っているのに対して $\Lambda\overline{\Lambda}$ の和は先に取っている. これによって (4.1.6) では $|\mathcal{M}^{+}_{\Lambda}|^2$ といった単独で「ヘリシティー + 状態の Λ から $p\pi$ へ遷移確率」という意味を持つ項（直接項）以外に $\mathcal{M}^{*+}_{\Lambda}\mathcal{M}^{-}_{\Lambda}$ のような, ヘリシティーが入り交じっていて遷移振幅として安直に解釈が不可能な項（干渉項）が発生する. これは $\Lambda\overline{\Lambda}$ のスピンコヒーレンスが保ったまま崩壊するプロセスであることを端的に表しており, QM の立場で解釈する上で本質的な部分である. $\Lambda\overline{\Lambda}$ は中間状態, すなわち観測を行わないと定義した状態なので, 確定したヘリシティーを持たないということである. 後で見るがこの干渉項が $Q_{\max}$ を増幅し, ベル不等式を破る鍵である. L と $\overline{L}$ をそれぞれ $L_{ii'} := \overline{\mathcal{M}^{*i'}_{\Lambda}\mathcal{M}^{i}_{\Lambda}}$, $\overline{L} := \overline{\mathcal{M}^{*j}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{M}^{j'}_{\bar{\Lambda}}}$ と定義することにして, (4.1.5) を (4.1.6) に代入すると

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 4p_\Lambda^2 \left[L_{++}\overline{L}_{++} + L_{--}\overline{L}_{--} + L_{-+}\overline{L}_{+-} + L_{+-}\overline{L}_{-+} \right]. \tag{4.1.7}$$

ここで $L_{\pm\pm}$ が直接項, $L_{\mp\mp}$ が干渉項の寄与となる.

S 行列の方法がありがたいのは, 各素過程を表す行列要素がそれぞれ単独で（本義）ローレンツ不変であることを保証してくれる点である. これによって我々は行列要素の各々のパーツを好きな慣性系で個別に評価することを許される. $\mathcal{M}_{\chi_{c0}}$ は χ_{c0} 静止系で計算したが, $\mathcal{M}_\Lambda$ と $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}$ はそれぞれ Λ, $\overline{\Lambda}$ の静止系に飛び移って計算

することにしよう．

$$
\begin{aligned}
L_{ii'} &:= \overline{\mathcal{M}_\Lambda^{*i'}\mathcal{M}_\Lambda^i} \\
&= \sum_{s_p} \bar{u}_\Lambda^i(1-c_\Lambda^*\gamma^5)\bar{u}_p^{s_p}u_p^{s_p}(1+c_\Lambda\gamma^5)u_\Lambda^{i'} \\
&= \bar{u}_\Lambda^i(1-c_\Lambda^*\gamma^5)(\not{p}_p+m_p)(1+c_\Lambda\gamma^5)u_\Lambda^{i'} \\
&= \bar{u}_\Lambda^i \begin{pmatrix} 1+c_\Lambda^* & \\ & 1+c_\Lambda^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_p & p_p^\mu\cdot\sigma_\mu \\ p_p^\mu\cdot\bar{\sigma}_\mu & m_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+c_\Lambda & \\ & 1+c_\Lambda \end{pmatrix} u_\Lambda^{i'} \\
&= \bar{u}_\Lambda^i \begin{pmatrix} m_p(1+c_\Lambda^*)(1-c_\Lambda) & p_p\cdot\sigma|1+c_\Lambda|^2 \\ p_p\cdot\bar{\sigma}|1-c_\Lambda|^2 & m_p(1-c_\Lambda^*)(1+c_\Lambda) \end{pmatrix} u_\Lambda^{i'}.
\end{aligned}
$$

Λ の静止系で考えているので $u_\Lambda^\pm = \sqrt{m_\Lambda}^T(\xi_\Lambda^\pm,\xi_\Lambda^\pm)$．ここで「ブースト方向」という方向を, χ_{c0} 静止系に対する Λ 静止系の相対運動方向で定義し, またこの方向 z 軸とする．$\xi^\pm$ は z 軸方向を量子化軸にとったときの 2 スピノルと定義すると

$$
\xi_\Lambda^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi_\Lambda^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

これらより

$$
\begin{aligned}
L_{ii'} &= 2m_\Lambda\xi_\Lambda^{i\dagger}((1-|c|^2)m_p+(1+|c|^2)E_p-(c+c^*)\boldsymbol{p}_p\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_\Lambda^{i'} \\
&= 2m_\Lambda K\,\xi^{i\dagger}(1-\alpha_\Lambda\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi^{i'} \\
&= \begin{cases} L_{\pm\pm} = 2m_\Lambda K(1\pm\alpha_\Lambda n_z) \\ L_{\pm\mp} = 2m_\Lambda K\alpha_\Lambda n_\pm. \qquad (n_\pm := n_x \pm i n_y) \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.1.8}
$$

ただし K, α_Λ, $\boldsymbol{n}$ はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
K &:= (1-|c|^2)m_p+(1+|c|^2)E_p \\
\alpha_\Lambda &:= (c+c^*)/K \\
\boldsymbol{n} &:= \frac{\boldsymbol{p}_\pi}{p_\pi} = -\frac{\boldsymbol{p}_p}{p_p}.
\end{aligned}
$$

$\overline{L}$ に関しても同様に $\overline{\Lambda}$ 静止系で計算すると

$$
\begin{aligned}
\overline{L}_{jj'} &= \overline{\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}^{j}\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}^{j'}} \\
&= \sum_{s_{\bar{p}}} \left(\bar{v}_{\bar{\Lambda}}^{j}\,(1-c_\Lambda\gamma^5)\,v_{\bar{p}}^{s_{\bar{p}}}\right)\left(\bar{v}_{\bar{\Lambda}}^{j'}\,(1-c_\Lambda\,\gamma^5)\,v_{\bar{p}}^{s_{\bar{p}}}\right)^* \\
&= \bar{v}_{\bar{\Lambda}}^{j}(1-c_\Lambda\gamma^5)(\not{p}_{\bar{p}}-m_p)(1+c_\Lambda^*\gamma^5)v_{\bar{\Lambda}}^{j'} \\
&= 2m_\Lambda\xi_{\bar{\Lambda}}^{-j\dagger}K(1+\alpha_\Lambda\boldsymbol{n'}\cdot\boldsymbol{\sigma})\xi_{\bar{\Lambda}}^{-j'}
\end{aligned} \tag{4.1.9}
$$

ここで我々は先ほど Λ の静止系で議論したときと同じ座標系を採用する．この方が Λ と $\overline{\Lambda}$ のスピンの関係, およびその後の $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ の関係が見やすくなるからである．Λ のブースト方向が z 軸で, $\overline{\Lambda}$ は χ_{c0} 静止系では Λ と反対方向に運動していたので, $\overline{\Lambda}$ のブースト方向は $-z$ 方向となる．また x, y は (x,y,z) が右手系となるように取る．これらの関係を整理した図は図 4.2 である．辻褄を合わせるために $\xi_{\bar{\Lambda}}^+$ を, スピンが $\overline{\Lambda}$ のブースト方向 ($-z$ 軸方向) を向いている状態として定義する．従って

$$
\xi_{\bar{\Lambda}}^+ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \xi_{\bar{\Lambda}}^- = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

これらを上に代入すると

$$\begin{cases} \overline{L}_{\pm\pm} = 2m_\Lambda K(1 \pm \alpha_\Lambda n'_z) \\ \overline{L}_{\pm\mp} = -2m_\Lambda K \alpha_\Lambda n'_\mp \qquad (n'_\pm := n'_x \pm i n'_y) \end{cases} \tag{4.1.10}$$

L と $\overline{L}$ の結果 (4.1.8),(4.1.10) は以下のように, Λ と $\overline{\Lambda}$ のヘリシティーを足とした 2×2 行列でまとめることができる.

$$L = \begin{pmatrix} 1+\alpha_\Lambda n_z & \alpha_\Lambda n_+ \\ \alpha_\Lambda n_- & 1-\alpha_\Lambda n_z \end{pmatrix}, \qquad \overline{L} = \begin{pmatrix} 1+\alpha_\Lambda n'_z & -\alpha_\Lambda n'_- \\ -\alpha_\Lambda n'_+ & 1-\alpha_\Lambda n'_z \end{pmatrix} \tag{4.1.11}$$

対角項は直接項, 非対角項は干渉項に対応している.

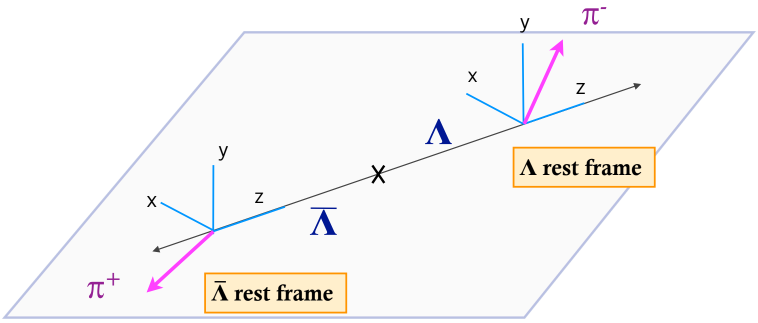

図 4.2: $\Lambda, \overline{\Lambda}$ 静止系における座標系. z 軸はそれぞれの Λ の boost 方向 (χ_{c0} 静止系に対する $\Lambda, \overline{\Lambda}$ 静止系の相対速度方向) に取る. x, y 軸は x, y, z が右手系直交座標系を組むように取る.

これで全ての項の準備が整った. 満を持して (4.1.8) と (4.1.10) を (4.1.7) に代入し整理すると

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} &\propto \overline{|\mathcal{M}|^2} \\ &= 16p_\Lambda^2 m_\Lambda^2 K^2 \left[(1+\alpha_\Lambda n_z)(1+\alpha_\Lambda n'_z) + (1-\alpha_\Lambda n_z)(1-\alpha_\Lambda n'_z) - \alpha_\Lambda^2(n_+ n'_- + n_- n'_+)\right] \\ &= 1 + \alpha_\Lambda^2 n_z n'_z - \alpha_\Lambda^2(n_x n'_x + n_y n'_y) \\ &\propto 1 + \alpha_\Lambda^2(-n_x n'_x - n_y n'_y + n_z n'_z) \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

(4.1.13)

この $\pi\pi$ 角度分布の解釈はとても明快である. $\Lambda, \overline{\Lambda}$ の進行方向（「縦方向」）に関しては π^- と π^+ の方向は揃いやすく, 横方向に関しては反対になりやすい. これは π^- は Λ のスピンの逆方向, π^+ は $\overline{\Lambda}$ のスピンの方向に出やすいという性質を思い出すと, $\Lambda\overline{\Lambda}$ がスピン 3 重項であることをそのまま表していることがわかる. (図 4.3) また (4.1.13) の最初の 2 項 $L_{++}\overline{L}_{++} + L_{--}\overline{L}_{--}$ は直接項, 後ろの 2 項 $L_{-+}\overline{L}_{+-} + L_{+-}\overline{L}_{-+}$ が干渉項からの寄与である. 直接項は縦方向の相関の形成にしか寄与していない. これは $\Lambda\overline{\Lambda}$ のヘリシティーが $(+,-)$ か $(-,+)$ で確定していて, それらを等しい比率で混合したモードに対応するが, $\pi\pi$ は互いの親のスピンの方向にしか興味がないので, そのような場合では横方向に相関が生まれることはない.

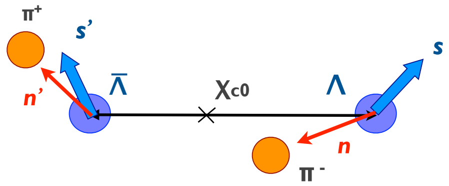

図 4.3: $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi\bar{p}\pi$ における $\Lambda\bar{\Lambda}$ のスピンと $\pi\pi$ の方向の関係.

この角度分布から C 行列を作る. C 行列の各成分は

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= \frac{9}{\alpha_\Lambda^2}\langle n_i n'_j\rangle \\
&= \frac{9}{\alpha_\Lambda^2}\int d\Omega_n\, d\Omega_{n'}\ \ n_i n'_j \left(\frac{d\sigma}{d\Omega_\Lambda d\Omega_n d\Omega_{n'}}/\sigma_{tot}\right) \\
&= \frac{9}{\alpha_\Lambda^2}\frac{\int d\Omega_n\, d\Omega_{n'}\ n_i n'_j\ \overline{|\mathcal{M}|^2}}{\int d\Omega_\Lambda d\Omega_n\, d\Omega_{n'}\ \overline{|\mathcal{M}|^2}}
\end{aligned}
$$

よって

$$
C = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4.1.14}
$$

縦・横方向の相関が一目瞭然で. これが C 行列を導入した最大のメリットである. これより $Q_{\max} = 2\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}$ を求める. $\lambda_{1,2}$ は C^TC の固有値の大きい方 2 つであった.

$$
\begin{aligned}
C^TC &= diag(1/4, 1/4, 1/4) \\
\lambda_1 = \lambda_2 &= \frac{1}{4} \\
Q_{\max} &= \sqrt{2} > 1
\end{aligned}
$$

ベル不等式は予想通り破れ, $Q_{\max}$ は最大エンタングル状態から予想される量子限界の $\sqrt{2}$ である.

一方仮に直接項しかなかった場合（これは最もナイーブな LHVT のモデルの帰結であるが）

$$
\begin{aligned}
C &= \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \\
Q_{\max} &= 1
\end{aligned}
$$

縦方向に最大の相関があるが, これは古典限界 $Q_{\max} = 1$, LHVT で達することのできる最大相関を与えるにすぎない.

4.2 $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$

$\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ の議論でほとんどのことが用意できたので $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ はほとんどその流用で事足りる．まず全体の行列要素は

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^i_\Lambda \mathcal{M}^{ij}_{\eta_c} \mathcal{M}^j_{\bar{\Lambda}}$$
$$\mathcal{M}^{ij}_{\eta_c} \propto \bar{u}^i_\Lambda \gamma^5 v^j_{\bar{\Lambda}}$$

再び強い相互作用が $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ において支配的としてパリティの保存を要請すると, vertex は擬湯川結合の形に決まる．$\mathcal{M}_\Lambda$ と $\mathcal{M}_{\bar{\Lambda}}$ はそれぞれ前節の (4.1.2) と (4.1.3) と同じである．$\mathcal{M}_{\eta_c} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ の行列は

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^{ij}_{\eta_c} &= \bar{u}^i_\Lambda(\boldsymbol{p})\gamma^5 v^j_{\bar{\Lambda}}(-\boldsymbol{p}) \\
&= \frac{E+m}{2}\left(\ (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\pm\eta)\xi^{i,\dagger}_{\boldsymbol{p}}\ \right)\gamma^0\gamma^5 \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2}\left(\ (1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}},\ (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\ \right) \begin{pmatrix} -(1\pm\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{-i}_{-\boldsymbol{p}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

$\xi^+_{-\boldsymbol{p}} = \xi^-_{\boldsymbol{p}}$，$\xi^-_{-\boldsymbol{p}} = -\xi^+_{\boldsymbol{p}}$ (4.1.4) を使うと

$$\begin{aligned}
&= \frac{E+m}{2}((1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}) \begin{pmatrix} \mp(1\pm\eta)\xi^i_{\boldsymbol{p}} \\ \mp(1\mp\eta)\xi^i_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= \delta_{ij}\begin{cases} -(1+\eta)^2 - (1-\eta)^2 = -2E_\Lambda & (i=j=+) \\ (1-\eta)^2(1+\eta)^2 = -2E_\Lambda & (i=j=-) \end{cases}
\end{aligned}$$

χ_{c0} のときと同様 Λ と $\overline{\Lambda}$ のヘリシティーが同じ成分のみ残る．符号に気をつけて $\Lambda\overline{\Lambda}$ のヘリシティー状態を書き下すと

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle \propto \frac{|{+}{+}\rangle - |{-}{-}\rangle}{\sqrt{2}}.$$

これはヘリシティー 1 重項状態であり, 再び最大エンタングル状態である．全体の行列は L と $\overline{L}$ を用いて

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 4E^2_\Lambda\left[L_{++}\overline{L}_{++} + L_{--}\overline{L}_{--} - L_{-+}\overline{L}_{+-} - L_{+-}\overline{L}_{-+}\right] \tag{4.2.1}$$

χ_{c0} との違いは干渉項の符号のみである．前節で計算した (4.1.8) を代入すると

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= 16E^2_\Lambda m^2_\Lambda K^2\left[(1+\alpha_\Lambda n_z)(1+\alpha_\Lambda n'_z) - (1-\alpha_\Lambda n_z)(1-\alpha_\Lambda n'_z) + \alpha^2_\Lambda(n_+n'_- + n_-n'_+)\right] \\
&= 32E^2_\Lambda m^2_\Lambda K^2\left[1 + \alpha^2_\Lambda n_z n'_z + \alpha^2_\Lambda(n_x n'_x + n_y n'_y)\right] \\
&\propto (1+\alpha^2_\Lambda n_z n'_z) + \alpha^2_\Lambda(n_x n'_x + n_y n'_y) \\
&= 1 + \alpha^2_\Lambda(n_x n'_x + n_y n'_y + n_z n'_z)
\end{aligned}$$

$\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ との違いは横方向 (x, y 方向) の相関の違いのみであり, $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ では $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n'}$ は同じ方向になりやすい．ヘリシティー 1 重項状態が Λ と $\overline{\Lambda}$ のそれぞれの静止系ではスピン 1 重項状態に帰着することを考えると, これは $\Lambda\overline{\Lambda}$ スピンの有様をそのまま反映したものであり妥当な結果である．(図 4.4)

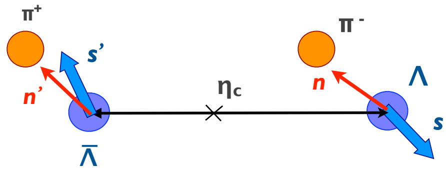

図 4.4: $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi\bar{p}\pi$ における $\Lambda\overline{\Lambda}$ のスピンと $\pi\pi$ の方向の関係

C 行列と $Q_{\max}$ は続けて

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$Q_{\max} = \sqrt{2}. \tag{4.2.2}$$

予想通りベル不等式は最大限破られ．$Q_{\max}$ は量子限界の $\sqrt{2}$ 与える．

4.3　$J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$

ここまで二つの答えがある程度わかっているチャネルで練習をしてきたが, 遊びはおしまいにして本戦に突入する．$J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ は J/ψ がスピンを持ってるのでやや厄介である．N. A. Tornqvist (1986) [56] は任意の偏極の J/ψ に対して通用する非常に巧い計算方法を提示しているが, ここではエンタングルメントの構造が見たいので敢えてそのまま泥臭く計算することにする．

また我々は Tornqvist のように色々な方向にスピンを向けた J/ψ を考える必要もない．なぜなら e^+e^- コライダーにおける直接生成を考える限り J/ψ は必ず横偏極である．これは J/ψ が本質的には $e^+e^- \to \gamma^* \to J/\psi$ という反応で生成されることに原因があり（図 4.5）, 最初の電磁相互作用を通じた対消滅 $e^+e^- \to \gamma^*$ に寄与できる e^+e^- のヘリシティーの組み合わせが, 相対論的極限では (L, R) か (R, L) しかなくなるからである $(L, R$ はそれぞれ左, 右巻きを表す)．J/ψ の質量はおよそ 3GeV なので e^+e^- のエネルギーは ~ 1.5GeV で, 実際に極めて相対論的であり $(m_e/E_e < 10^{-6})$, 結果 (e^+_R, e^-_L) の組み合わせで対消滅した場合は左巻きの, (e^+_R, e^-_L) だった場合は右巻きの J/ψ が発生することになる．コライダー実験で最も一般な無偏極の e^+e^- ビームから作られる場合は, 右巻きと左巻きの J/ψ が同じ割合でできる．ただ注意したいのはこれらは統計的な混合であって, 1 イベントレベルで J/ψ の偏極は確定している．偏極状態のコヒーレントな重ね合わせではない．

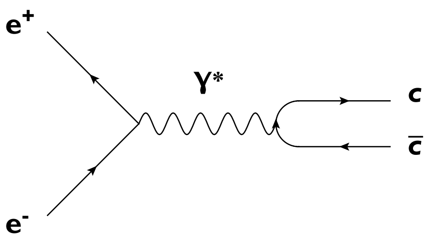

図 4.5: $c\bar{c}$ 生成のダイアグラム．e^+e^- はクオークと直接結合しないので対消滅して γ^* を介する必要がある．

$J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ の計算に入る．行列要素は

$$\mathcal{M}^{ij}_{\psi,s} \propto \epsilon_{s\,\mu} \bar{u}^i_\Lambda \left(\gamma^\mu + \frac{a_\psi}{2p_\Lambda} q^\mu \right) v^j_{\overline{\Lambda}} \tag{4.3.1}$$

$i,j=\pm$ はここまでと同じく Λ と $\overline{\Lambda}$ のヘリシティーであり，$s=L,R$ は J/ψ の偏極を表す．この vertex はこれまでの $\chi_{c0},\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ よりやや非自明なので説明をする．

まず反応前後のパリティ保存を課すと，J/ψ はベクトル（パリティ負・スピン 1 状態）なので vertex はベクトル結合であることが決まる．（パリティ保存を課さないと擬ベクトル結合も許される．）有効ラグランジアンの最低次の範囲では，J/ψ の場 A^μ は $\Lambda\overline{\Lambda}$ の場 ψ から作られるカレント

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \qquad\qquad \bar{\psi}\partial^\mu\psi$$

とのみ結合する．従って有効ラグランジアンの相互作用項は一般に係数 c_1,c_2 を用いて

$$c_1 A_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu\psi + c_2 A_\mu \bar{\psi}\partial^\mu\psi$$

という形である．これらの項を運動量空間に移したものが相互作用の vertex であり

$$\epsilon_\mu \bar{u}(c_1\gamma^\mu + c_2 q^\mu).$$

ただし $q^\mu := p^\mu_\Lambda - p^\mu_{\overline{\Lambda}}$ である．c_1 と c_2 を a_ψ でパラメトライズし直したものが (4.3.1) となる．

見通しをよくするため，まず (4.3.1) の一項目 $\epsilon_{\mu\ s}\bar{u}^i_\Lambda\gamma^\mu v^j_{\overline{\Lambda}}$ から計算することにする．J/ψ 静止系で $\Lambda\overline{\Lambda}$ が back-to-back であることから

$$\begin{aligned}
\bar{u}^i_\Lambda(\boldsymbol{p})\gamma^\mu v^j_{\overline{\Lambda}}(-\boldsymbol{p}) &= \frac{E+m}{2}\left(\, (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\,\right)\gamma^0\gamma^\mu \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi^{-j}_{-\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{-j}_{-\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2}\left(\, (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}, (1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\,\right) \begin{pmatrix} \sigma^\mu & \\ & \overline{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi^{j}_{\boldsymbol{p}} \\ -(1\mp\eta)\xi^{j}_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\sigma^\mu=(1,-\boldsymbol{\sigma})$, $\overline{\sigma}^\mu=(1,\boldsymbol{\sigma})$ である．$i=j=\pm$ のとき

$$\begin{aligned}
\bar{u}^i_\Lambda(\boldsymbol{p})\gamma^\mu v^I_{\overline{\Lambda}}(-\boldsymbol{p}) &= \frac{E+m}{2}(1-\eta^2)(\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\sigma^\mu\xi^i_{\boldsymbol{p}} - \xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\overline{\sigma}^\mu\xi^i_{\boldsymbol{p}}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ -2m_\Lambda\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma}\xi^i_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} \\
&= 2m_\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \mp\sin\theta \\ 0 \\ \mp\cos\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

θ は e^- のビーム方向を z 軸としたときの Λ の天頂角である．$i \neq j$ $(i=-j=\pm)$ に対しては

$$\bar{u}^i_\Lambda(\boldsymbol{p})\gamma^\mu v^j_{\bar{\Lambda}}(-\boldsymbol{p}) = \frac{E+m}{2}\left[(1\mp\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\sigma^\mu\xi^j_{\boldsymbol{p}} - (1\pm\eta)\xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\bar{\sigma}^\mu\xi^j_{\boldsymbol{p}}\right] \tag{4.3.2}$$

$$= \begin{pmatrix} \mp 2p_\Lambda \xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\xi^j_{\boldsymbol{p}} \\ \mp 2E_\Lambda \xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma}\xi^j_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 2E_\Lambda \xi^{\dagger i}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{\sigma}\xi^j_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix} = 2E_\Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \pm i \\ \pm\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

$\epsilon^\mu_{L,R} = {}^T(0,1,\pm i,0)/\sqrt{2}$ より（複号 $\pm$ はそれぞれ $s=L,R$ に対応）i,j,s のそれぞれに対して $\epsilon_{s\,\mu}\bar{u}^i_\Lambda\gamma^\mu v^j_{\bar{\Lambda}}$ が求められる．結果は表 4.1 の通りである．前節までの議論に倣って $\Lambda\bar{\Lambda}$ のヘリシティー状態を書き下すと

表 4.1: $\epsilon_{s\,\mu}\,\bar{u}^i_\Lambda\gamma^\mu v^j_{\bar{\Lambda}}$

(i,j)	$s=R$	$s=L$
$(+,+)$	$\sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta$	$\sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta$
$(+,-)$	$\sqrt{2}E_\Lambda(1+\cos\theta)$	$-\sqrt{2}E_\Lambda(1-\cos\theta)$
$(-,+)$	$-\sqrt{2}E_\Lambda(1-\cos\theta)$	$\sqrt{2}E_\Lambda(1+\cos\theta)$
$(-,-)$	$-\sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta$	$-\sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta$

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle_R \propto \sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta\,|{+}{+}\rangle - \sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta\,|{-}{-}\rangle + \sqrt{2}E_\Lambda(1+\cos\theta)\,|{+}{-}\rangle - \sqrt{2}E_\Lambda(1-\cos\theta)\,|{-}{+}\rangle \tag{4.3.4}$$

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle_L \propto \sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta\,|{+}{+}\rangle - \sqrt{2}m_\Lambda\sin\theta\,|{-}{-}\rangle - \sqrt{2}E_\Lambda(1-\cos\theta)\,|{+}{-}\rangle + \sqrt{2}E_\Lambda(1+\cos\theta)\,|{-}{+}\rangle\,. \tag{4.3.5}$$

これがパッと見どうエンタングルしているかは全く自明ではない．運動学的な因子（m_Λ, E_Λ）と角度 θ の 2 つの依存性が入り組んでいて文字通り絡まっていて，とても直積に分解なんてできそうに見えないが，エンタングルの有無は見た目と関係がない例をこれから示す．まず非相対論的極限（$E_\Lambda \to m_\Lambda$）を考える．上で見たように $\Lambda\bar{\Lambda}$ のヘリシティー固有状態はこの極限では Λ の進行方向を量子化軸としたスピン固有状態に帰着される．

$$|+\rangle_\Lambda \to |\uparrow\rangle_\Lambda\,, \qquad |-\rangle_\Lambda \to |\downarrow\rangle_\Lambda$$

添字は量子化軸を表している．z 軸方向（ビーム方向）に量子化軸を取り直すと (図 4.6 参照), Λ の進行方向の極座標 (θ,ϕ) を用いて

$$|+\rangle_\Lambda = |\uparrow\rangle_\Lambda = \cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_z + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_z\,, \qquad |-\rangle_\Lambda = |\downarrow\rangle_\Lambda = -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_z + \cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_z \tag{4.3.6}$$

$\bar{\Lambda}$ に関しては (4.3.6) で $\theta \to \pi-\theta$, $\phi \to -\phi$ として

$$|+\rangle_{\bar{\Lambda}} = \sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_z - e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_z\,, \qquad |-\rangle_{\bar{\Lambda}} = e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_z \tag{4.3.7}$$

これらを (4.3.6) と (4.3.7) に代入すると

$$|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle_R \propto |\uparrow\uparrow\rangle_z\,, \qquad |\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle_L \propto |\downarrow\downarrow\rangle_z$$

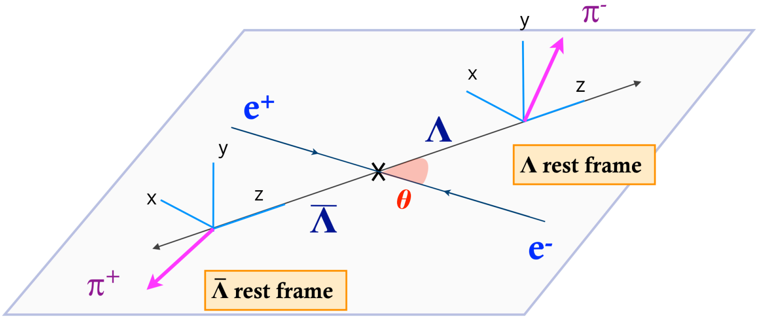

図 4.6: Λ, $\overline{\Lambda}$ 静止系における座標系．$ee \to J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ の反応面上に x, z 軸を取り，z 軸はそれぞれの Λ の boost 方向 (J/ψ 静止系に対する Λ, $\overline{\Lambda}$ 静止系の相対速度方向) に取る．y 軸は x, y, z が右手系直交座標系を組むように取る．

このように完全に直積に分解が可能である．物理的にはこれはスピン保存則を表している．従って J/ψ の偏極が R のとき（$+z$ 方向にスピン 1）$\Lambda\overline{\Lambda}$ のスピンは $|\uparrow\uparrow\rangle_z$, L のとき（$-z$ 方向にスピン 1）は $|\downarrow\downarrow\rangle_z$ と一意に定まってしまう．これよりスピンと軌道角運動量が独立に保存するようなつまらない状況では, ベクター粒子の崩壊を通じてエンタングルメントは起こらないことがこれにて示される．逆に相対論的効果で相対軌道角運動量がスピンと混ざり合うことによってエンタングルメントが発生する可能性も示唆される．

以上の例からわかるように状態ベクトルからそのエンタングルメントの具合を推察するのは簡単ではない[1]．しかし (4.3.5) と (4.3.4) から定性的にエンタングルメントの成分・性格を想像することは依然として可能である．例えば (4.3.5) と (4.3.4) の m_Λ に比例する 2 項は, Λ の方向 θ に依らずをヘリシティー 1 重項を組んでいる．見た目がスピン 1 重項っぽいのでこの項の寄与を便宜的にスカラーモード呼ぶことにする．後ろの E_Λ に比例する 2 項は複雑である．まず θ に応じてエンタングルの仕様が変わる．横方向 ($\theta \sim \pi/2$) のときは大きくエンタングルするが前方か後方 ($\theta \sim 0, \pi$) に行ったときは片方の項が 0 に近づいてエンタングルメントが解消される．これらは見た目がスピン 3 重項の要素に似ているのでベクターモードと呼ぶことにする．非相対論的極限ではスカラーモードとベクターモードは同じだけ寄与するが, 相対論的になるにつれてベクターモードが勝ってきて, 相対論的極限では純粋にベクターモードのみになる．

このパワーバランスの振る舞いは現象論的には $\Lambda\overline{\Lambda}$ の角度分布からも見て取れる．一般に $\Lambda\overline{\Lambda}$ の角度分布は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega\Lambda} &\propto |\langle\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle|_R^2 + |\langle\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}|\psi_{\Lambda\bar{\Lambda}}\rangle|_L^2 \\
&= 8m_\Lambda^2 \sin^2\theta + 4E_\Lambda^2(1+\cos^2\theta) \\
&\propto (E_\Lambda^2 + m_\Lambda^2) + (E_\Lambda^2 - m_\Lambda^2)\cos^2\theta \\
&\propto 1 + \frac{E_\Lambda^2 - m_\Lambda^2}{E_\Lambda^2 + m_\Lambda^2}\cos^2\theta
\end{aligned}
$$

スカラーモードは $\sin^2\theta$, ベクターモードは $1+\cos^2\theta$ の依存性に寄与するが, 非相対論的極限では等しく寄与して角度依存性がキャンセルして等方的な分布となる．これは全角運動量保存とスピン保存が導かれる, 相対軌道角運動量 0 の S 波の分布と辻褄が合っている．相対論的状況にもってくと $\cos^2\theta$ の偏りが強くなってきて,

[1]エンタングルメントの有無を判定するだけならペレス判定法 [75] などがあるが, 程度の評価は確立された測度がまだ存在しないだけに難しい．

$m_\Lambda/E_\Lambda \to 0$ ではスピン保存則が最大限破れて $\Lambda\bar{\Lambda}$ は P 波の角度分布を持つ．またスカラーモードとベクターモードの干渉は, $\Lambda\bar{\Lambda}$ を終状態とした場合は（S 行列の方法では $\Lambda\bar{\Lambda}$ を直接観測していることに相当するので）顕われない．

大体勝手がわかってきたところで (4.3.1) の 2 項目 $\dfrac{a_\psi}{2p_\Lambda}q^\mu$ に登場してもらおう．q^μ はスピノル空間の足を持たないのでこの項は本質的には湯川結合で, $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ での結果 (4.1.5) が流用できる．

$$
\begin{aligned}
q_\mu &= p^\mu_\Lambda - p^\mu_{\bar{\Lambda}} = {}^T(0, 2\boldsymbol{p}_\Lambda)\\
\epsilon^\mu_L q_\mu &= -\sqrt{2}(p_x - ip_y) = -\sqrt{2}p_\Lambda e^{-i\phi}\sin\theta\\
\epsilon^\mu_R q_\mu &= -\sqrt{2}(p_x + ip_y) = -\sqrt{2}p_\Lambda e^{i\phi}\sin\theta
\end{aligned}
$$

なのでこの項の行列成分は

$$
\epsilon^\mu_s \bar{u}^i_\Lambda \left(a_\psi \frac{q_\mu}{2p_\Lambda}\right) v^j_{\bar{\Lambda}} = \mp\sqrt{2}a_\psi p_\Lambda \sin\theta \ \cdot\ \delta_{ij} \qquad (s = L, R; i = j = \pm) \tag{4.3.8}
$$

ただしここで ϕ 方向の回転対称性を使って $\phi = 0$ とおいた．（4.3.8）を見て明らかなように, これはスカラーモードにしか寄与しない．事実この項の寄与は表 4.1 の $(+,+)$ と $(-,-)$ の項目に対してのみであり, Λ の質量 m_Λ を $m'_\Lambda := m_\Lambda - a_\psi p_\Lambda$ に置き換えればよい．これで 4.3.1 の全ての項が評価できた．これらを L と $\overline{L}$ と同様 $\Lambda\bar{\Lambda}$ のヘリシティー (i,j) を足とした 2×2 行列にまとめると

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\psi,R} &:= \begin{pmatrix} \mathcal{M}^{++}_{\psi,R} & \mathcal{M}^{+-}_{\psi,R} \\ \mathcal{M}^{-+}_{\psi,R} & \mathcal{M}^{--}_{\psi,R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}m'_\Lambda \sin\theta & \sqrt{2}E_\Lambda(1+\cos\theta) \\ -\sqrt{2}E_\Lambda(1-\cos\theta) & -\sqrt{2}m'_\Lambda\sin\theta \end{pmatrix}\\
\mathcal{M}_{\psi,L} &:= \mathcal{M}^\dagger_{\psi,R} \ .
\end{aligned} \tag{4.3.9}
$$

この行列は後々使うことになる．

(4.3.1) の 2 項目による修正 $m_\Lambda \to m'_\Lambda$ によって $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の角度分布も変化する．

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_\Lambda} &\propto 1 + \frac{E^2_\Lambda - m'^2_\Lambda}{E^2_\Lambda + m'^2_\Lambda}\cos^2\theta\\
&= 1 + A\cos^2\theta.
\end{aligned}
$$

実際この係数 m'^2_Λ は $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の測定を通じて決められている．例えば BES2 では, $A = 0.65 \pm 0.11(stat.) \pm 0.03(syst.)$ [76] であり, これから $m'^2_\Lambda = 0.51^{+0.22}_{-0.19}$ とわかる．m'_Λ は 2 価だがこの段階では符号までは決定できない．しかし後で述べるが, m'_Λ の符号は干渉項に寄与するため $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^-$ の $\pi\pi$ 分布には効くので原理的には決定可能である．

そして最後に $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^-$ 全体の行列要素を計算する．

$$
\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|}^2_s &= \sum_{s_p, s_{\bar{p}}} \sum_{i,j,i',j'} \left(\mathcal{M}^i_\Lambda \mathcal{M}^{ij}_{\psi,s} \mathcal{M}^j_{\bar{\Lambda}}\right) \left(\mathcal{M}^{*j'}_{\bar{\Lambda}} \mathcal{M}^{*i'j'}_{\psi,s} \mathcal{M}^{*i'}_\Lambda\right)\\
&= \sum_{i,j,i',j'} \overline{\mathcal{M}^{*i'}_\Lambda \mathcal{M}^i_\Lambda} \mathcal{M}^{ij}_{\psi,s} \overline{\mathcal{M}^j_{\bar{\Lambda}} \mathcal{M}^{*j'}_{\bar{\Lambda}}} \mathcal{M}^{*i'j'}_{\psi,s}\\
&= \sum_{i,j,i',j'} L_{i'i} \mathcal{M}^{ij}_{\psi,s} \overline{L}_{jj'} \mathcal{M}^{*i'j'}_{\psi,s}\\
&= \mathrm{Tr}\left[\, L\mathcal{M}_{\psi,s}\overline{L}\mathcal{M}^\dagger_{\psi,s}\,\right]
\end{aligned}
$$

L と $\overline{L}$ は (4.1.11) で定義した行列であり, (4.3.9) とともに代入すると

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|}_s^2 &= \mathrm{Tr}\left[\, L\mathcal{M}_\psi \overline{L}\mathcal{M}_\psi^\dagger \,\right] \\ &= 8m_\Lambda^2 K^2 \mathrm{Tr}[\begin{pmatrix} 1+\alpha_\Lambda n_z & \alpha_\Lambda n_+ \\ \alpha_\Lambda n_- & 1-\alpha_\Lambda n_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m'_\Lambda \sin\theta & E_\Lambda(1+\cos\theta) \\ -E_\Lambda(1-\cos\theta) & -m'_\Lambda \sin\theta \end{pmatrix} \\ &\qquad \begin{pmatrix} 1+\alpha_\Lambda n'_z & -\alpha_\Lambda n'_- \\ -\alpha_\Lambda n'_+ & 1-\alpha_\Lambda n'_z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m'_\Lambda \sin\theta & -E_\Lambda(1-\cos\theta) \\ E_\Lambda(1+\cos\theta) & -m'_\Lambda \sin\theta \end{pmatrix}]\end{aligned}$$

これ以上は残念ながら簡単にはならない．歯を食いしばって気合いで計算すると, $s = R$ のとき

$$\begin{aligned}\overline{|\mathcal{M}|}_R^2 = 16m_\Lambda^2 K^2 E^2 [&(1+\cos^2\theta)(1-\alpha_\Lambda^2 n_z n'_z) + \alpha_\Lambda^2 \sin^2\theta(-n_x n'_x + n_y n'_y) + 2\alpha_\Lambda \cos\theta(n_z - n'_z) \\ &+ \Gamma^2\left[1+\alpha_\Lambda^2(-n_x n'_x - n_y n'_y + n_z n'_z)\right]\sin^2\theta \\ &+ \Gamma\left(\alpha_\Lambda^2 \sin 2\theta(n_x n'_z + n_z n'_x) - 2\alpha_\Lambda \sin\theta(n_x - n'_x)\right)]\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

ただし $\Gamma := m'_\Lambda/E_\Lambda$ である．1 行目はベクターモード ($\propto E_\Lambda^2$) からの寄与, 2 行目がスカラーモード ($\propto m'^2_\Lambda$), 3 行目はそれらの干渉項 ($\propto E_\Lambda m'_\Lambda$) となっている．

同様の計算を $s = L$ について行うと (4.3.10) の $2\alpha_\Lambda \cos\theta(n_z - n'_z)$ と $-2\alpha_\Lambda \sin\theta(n_x - n'_x)$（それぞれ 1 行目第 3 項, 3 行目第 2 項）の符号のみ変わることが確認できる．J/ψ が無偏極 e^+e^- ビームから生成される場合を考えるとこの 2 項が結局キャンセルして,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega_\Lambda d\Omega_n d\Omega_{n'}} &\propto \frac{1}{2}\sum_{s=L,R} \overline{|\mathcal{M}|}_s^2 \\ &\propto (1+\cos^2\theta)(1-\alpha_\Lambda^2 n_z n'_z) + \alpha_\Lambda^2 \sin^2\theta(-n_x n'_x + n_y n'_y) \\ &\qquad + \Gamma^2\left[1+\alpha_\Lambda^2(-n_x n'_x - n_y n'_y + n_z n'_z)\right]\sin^2\theta \\ &\qquad + \Gamma \sin 2\theta(n_x n'_z + n_z n'_x)\end{aligned} \tag{4.3.11}$$

$\Lambda\overline{\Lambda}$ の方向の自由度 $d\Omega_\Lambda$ で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} &\propto 2(1-\alpha_\Lambda^2 n_z n'_z) + \alpha_\Lambda^2(-n_x n'_x + n_y n'_y) \\ &\qquad + \Gamma^2\left[1+\alpha_\Lambda^2(-n_x n'_x - n_y n'_y + n_z n'_z)\right]\end{aligned} \tag{4.3.12}$$

スカラーモードとベクターモードの干渉項は（ (4.3.11) の 3 行目）は $\sin 2\theta$ の積分で消える．これより C 行列は

$$C = \frac{1}{2(2+\Gamma^2)}\begin{pmatrix} -1-\Gamma^2 & & \\ & 1-\Gamma^2 & \\ & & -2+\Gamma^2 \end{pmatrix} \tag{4.3.13}$$

簡単な計算より $\Gamma^2 > 0$ のとき $C_{11}^2 > C_{22}^2$ なので,

$$Q_{\max} = 2\sqrt{C_{11}^2 + C_{33}^2} = \frac{\sqrt{5 - 2\Gamma^2 + 2\Gamma^4}}{2+\Gamma^2}$$

Γ^2 は一価なので（$\Gamma^2 = m'^2_\Lambda/E_\Lambda^2 = 0.212^{+0.092}_{-0.080}$）代入すると,

$$Q_{\max} = 0.976 \pm 0.048.$$

なんと古典極限 1 を超えるとも超えないとも言えない一番タチの悪い結果となった．実際これはかなり運が悪

い状況で, もし純粋なベクターモードの寄与しかなかった場合（$\Gamma = 0$ とした場合に相当）C 行列は

$$C_v = \begin{pmatrix} -1/4 & & \\ & 1/4 & \\ & & -1/2 \end{pmatrix}$$

また完全にスカラーモードしか寄与がなかった場合（$\Gamma \to \infty$）の C 行列は

$$C_s = \begin{pmatrix} -1/2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix}$$

であり, これらはそれぞれ $Q_{\max} = \sqrt{5}/2$, $Q_{\max} = \sqrt{2}$ と単独で不等式を破るが, 今回のケースではそれらが $1 : \Gamma/2$ で混合したような形をしており, 最も強い C_{33} の相関が部分的に相殺することによって全体の相関 $Q_{\max}$ も弱められている. $Q_{\max}$ vs Γ の関係は図 4.7 の通りである. まだ測定パラメータ（$m_\Lambda'^2$）の誤差に由来する大きな誤差があるので, 上に 2σ ほどズレるといったよほどラッキーなことがあれば, $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ は現在とてつもない統計量があるので （$\sim 10^6$）ベル不等式の有意な破れが観測できる可能性もあるが, 現実的には実験感度を期待するのは厳しい.

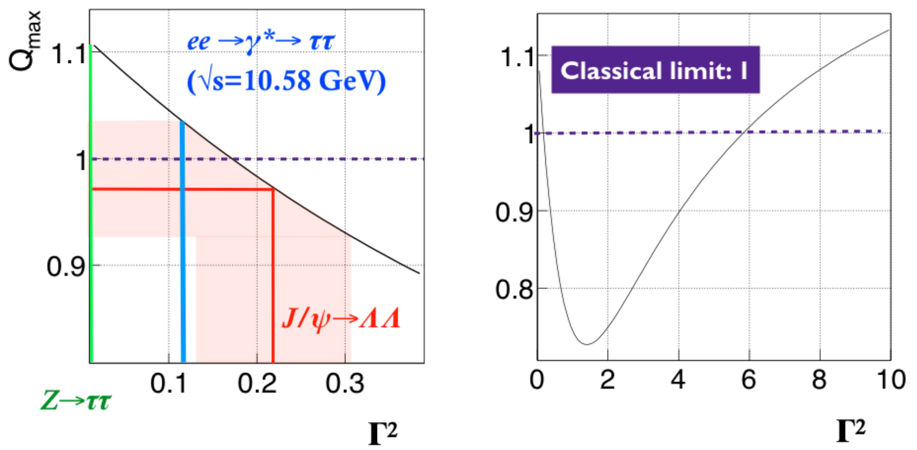

図 4.7: $Q_{\max}$ の Γ^2 に対する依存性. $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ では $\Gamma^2 := m_\Lambda'^2/E_\Lambda^2$, $Z, \gamma^* \to \tau\tau$ では $\Gamma^2 = m_\tau^2/E_\tau^2$ である. 色線は各チャネルにおける Γ の値で, $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の赤帯は Γ の測定由来の系統誤差を表している.

なんとか救えないだろうか. 特定の θ のイベントのみサンプルした場合を考えてみる. (4.3.11) より θ を積分せずに C 行列を作ると

$$C(\theta) = \frac{1}{2(1+\Gamma^2) + 2(1-\Gamma^2)\cos^2\theta} \begin{pmatrix} -(1+\Gamma^2)\sin^2\theta & 0 & \Gamma\sin 2\theta \\ 0 & (1-\Gamma^2)\sin^2\theta & 0 \\ \Gamma\sin 2\theta & 0 & -2+(1+\Gamma^2)\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.3.14}$$

$C(\theta)$ の各成分の θ 依存性は図 4.8 のようになる.

$Q_{\max}$ は $C(\theta)$ に非対角成分 C_{13}, C_{31} があるので, 定義通り $C^T C$ を対角化して大きい固有値 2 つ λ_1, λ_2 を取ってくる必要がある. 各 θ について $Q_{\max} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$ を計算したものが図 4.9 の赤線である. 全ての θ にわたって $Q_{\max}$ は古典極限 1 を超えている. すなわち本質的には $\Lambda\bar{\Lambda}$ はやはりヘリシティーはエンタングルしている. 黒点は 10^6 イベントを使った場合の MC シミュレーションであり, 最も破れの大きい $\cos\theta = 0$ のビンで 7.5σ の deviation に達する.

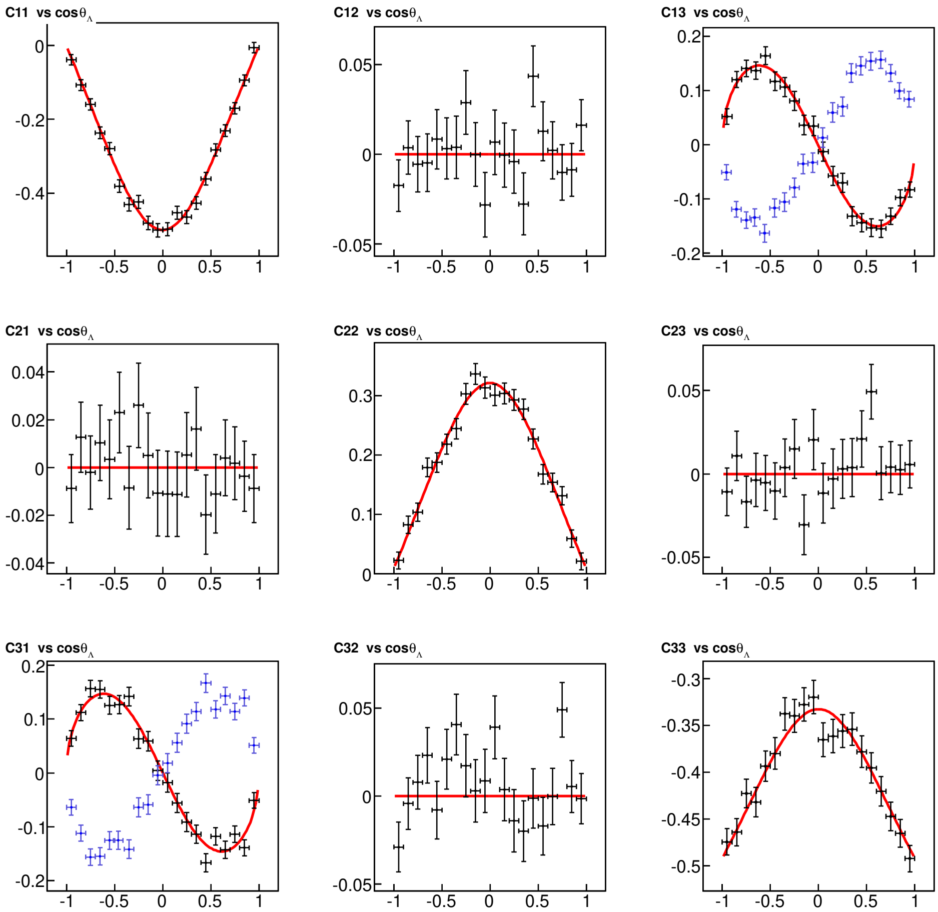

図 4.8: $C(\theta)$ の各成分の $\cos\theta$ 依存性. 赤線は (4.3.14) から計算した理論線, 黒点は 10^6 イベントを使った場合の MC シミュレーションの結果である. C_{13} と C_{31} については赤線と黒点が $\Gamma > 0$, 青線と青点は $\Gamma < 0$ の理論線と MC シミュレーションに対応する.

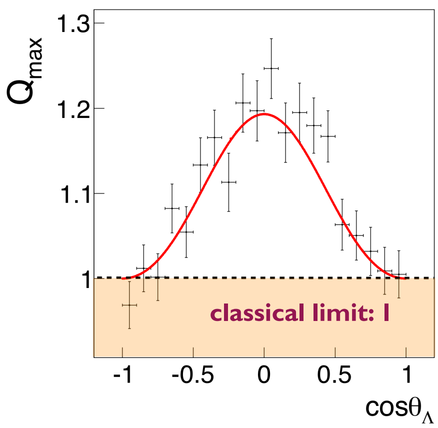

図 4.9: 特定の θ について取ったサンプルを使って求めた $Q_{\max}$. 赤線は理論線 $Q_{\max} = 2\sqrt{\lambda_1(\theta) + \lambda_2(\theta)}$（$\lambda_{1,2}$ は $C^T(\theta)C(\theta)$ の固有値の大きい 2 つ）黒点は 10^6 イベントを使った場合の MC シミュレーションである

さてではこれの処方で LHVT をテストする正当性について考えてみる．θ は LHVT では一般に隠れた変数として扱われるが, 特定の θ のサンプルのみを使うことは homogeneous assumption (1.3.2 節, "Efficiency loophole"参照) を課すこと, つまりどの θ に対してもサンプルが等価であることを仮定するということである．このような仮定を満たす LHVT はあらゆる θ においても $Q_{\max} \leq 1$ が保証されるため, $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ チャネルでのテストは可能である．しかしこのような LHVT のサブクラスがどれくらい大きいのかは不明である．しかも J/ψ はベクトル粒子で指向性があり, スカラーである χ_{c0} や η_c と違ってどの方向も等価というわけではなく, 相関がどの方向の $\Lambda\overline{\Lambda}$ に対しても一様であると a priori に考えてよい根拠も弱い（事実 QM の結果がその反例になってる．またこれは efficiency loophole のよい例となっている）．従って LHVT テストとしては比較的大きな問題を抱える．とはいえ QM の非局所性のテストという文脈ではこのチャネルは $Q_{\max}$ に角度についての非自明な依存性（4.9）があって非常におもしろい．

さらにこのチャネルでは QM の範疇でもう一つオマケがついてくる．(ベル不等式という文脈からは外れるが) 未知であった Γ の符号が C_{31} や C_{13} の θ についてのモジュレーション (図 4.8) から完全に決まるということである．赤線は Γ が正だった場合の理論曲線, 黒点と青点はそれぞれ Γ の符号が正と負だった場合の, 10^6 イベントでの MC シミュレーションの結果である．Γ の極性によって明らかにモジュレーションの極性も変わる．

4.4　$e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$

最低次の s チャネルの過程のみを考える．この過程では中間状態として電磁相互作用の γ^* と弱い相互作用の Z の寄与があり, これらは一般に干渉しているが, ここでは以下の 2 つのシナリオに絞ってこのややこしい干渉効果を考えるのを回避することにする．

1. e^+e^- のエネルギースケール $\sqrt{s}$ が電弱スケール m_Z より十分小さいとき（$s << m_Z^2$）
2. e^+e^- の重心系エネルギーがちょうど Z の共鳴ピーク付近のとき（$s \sim m_Z^2$）

2. はこれまで $Z \to \tau\tau$ と呼んでいたチャネルそのものである．これについては次の節で議論する．1. は Belle などの B-factory での連続バックグラウンドとしての過程（$\sqrt{s} \sim 10$GeV）を想定している．途中のエネルギー帯に照準を合わせたコライダーは現在のところないので実質この 2 つのケースで十分である．

1. については類推で非常に簡単に計算できる．電磁気相互作用のみで考えばよいが, これは $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ において vertex (4.3.1) の 1 項目のみを考えた場合と同じである．すなわち以下 $\Gamma = m'_\Lambda/E_\Lambda$ を全て $\Gamma = m_\tau/E_\tau$ に置き換えて話を進めればよい．結局 C 行列, $Q_{\max}$ は

$$C = \frac{1}{2(2+\Gamma^2)} \begin{pmatrix} -1-\Gamma^2 & & \\ & 1-\Gamma^2 & \\ & & -2+\Gamma^2 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\max} = \frac{\sqrt{5 - 2\Gamma^2 + 2\Gamma^4}}{2+\Gamma^2} \tag{4.4.1}$$

$Q_{\max}$ と Γ の関係は図 4.7 の通りである．$Q_{\max} > 1$ となる条件は (4.4.1) より

$$\Gamma^2 > 3 + 2\sqrt{2} \qquad \text{または} \qquad \Gamma^2 < 3 - 2\sqrt{2}$$

$0 < \Gamma = m_\tau/E_\tau < 1$, $\sqrt{s} = 2E_\tau$ を用いると

$$\sqrt{s} > \frac{2m_\tau}{\sqrt{2}-1} = 8.58(\text{GeV})$$

の重心系エネルギー $\sqrt{s}$ があればベル不等式は破れる．また Belle の $\sqrt{s} = 10.58(\mathrm{GeV})$ 運転の場合は

$$Q_{\max} = 1.037$$

と当落線上ギリギリであるが, 後で述べるようにこのチャネルは統計量が桁違いに多いため実験感度を持つ可能性はある．

4.5 $Z \to \tau\tau$

4.3 において J/ψ から崩壊した $\Lambda\bar{\Lambda}$ は相対論的効果で軌道角運動量とスピンの混合でエンタングルメントが生じ, 結果 $Q_{\max}$ が大きくなることを確認した．これは $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ に限らず, ベクトル粒子からフェルミオン 2 つに崩壊するチャネルに共通する現象である．その観点から見ると $Z \to \tau\tau$ は, $\tau\tau$ のスピードが極めて速い $(\beta \simeq 0.999, \Gamma := m_\tau^2/E_\tau^2 \simeq 0.0015)$ 点で非常に有望なチャネルである．$Z \to \tau\tau$ の matrix は以下の通りである:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{Z,s}^{ij} &\propto \epsilon_{s,\mu} \bar{u}_\tau^i \gamma^\mu (c_V - c_A \gamma^5) v_\tau^i \\
c_V &= T_3 - 2Q \sin^2\theta_w = 0.0378 \\
c_V &= T_3 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\sin^2\theta_w$ はワインバーグ角で $\sin^2\theta_w = 0.2397 \pm 0.0013$ [48] である．vector current (V) の項は J/ψ の結果（表 4.1）がそのまま流用できる．axial current (A) の項は

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\tau^i(\boldsymbol{p})\gamma^\mu\gamma^5 v_\tau^j(-\boldsymbol{p}) &= \frac{E+m}{2}\left((1\mp\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}, (1\pm\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i} \right)\gamma^0\gamma^5\gamma^\mu \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi_{-\boldsymbol{p}}^{-j} \\ -(1\mp\eta)\xi_{-\boldsymbol{p}}^{-j} \end{pmatrix} \\
&= \frac{E+m}{2}\left((1\mp\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i},\ (1\pm\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i} \right) \begin{pmatrix} -\sigma^\mu & \\ & \bar{\sigma}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1\pm\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{i} \\ -(1\mp\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{i} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$i = j = \pm$ に対しては

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\tau^i(\boldsymbol{p})\gamma^\mu\gamma^5 v_\tau^i(-\boldsymbol{p}) &= \frac{E+m}{2}(1-\eta^2)(-\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}\sigma^\mu\xi_{\boldsymbol{p}}^i - \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\xi_{\boldsymbol{p}}^i) \\
&= \delta_{ij}\begin{pmatrix} -2m_\tau \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$i \neq j, (i = -j = \pm)$ に対しては

$$\begin{aligned}
\bar{u}_\tau^i(\boldsymbol{p})\gamma^\mu\gamma^5 v_\tau^i(-\boldsymbol{p}) &= \frac{E+m}{2}\left[-(1\mp\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}\sigma^\mu\xi_{\boldsymbol{p}}^j - (1\pm\eta)\xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}\bar{\sigma}^\mu\xi_{\boldsymbol{p}}^j\right] \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 2p_\Lambda \xi_{\boldsymbol{p}}^{\dagger i}\boldsymbol{\sigma}\xi_{\boldsymbol{p}}^j \end{pmatrix} \\
&= 2p_\tau \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta \\ \pm i \\ \pm\sin\theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

横偏極の $Z(s = L, R)$ に対して, $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ のときと同様, 各 s, i, j の組み合わせに対する $\mathcal{M}_Z$ をまとめたものが表 4.2 である．

表 4.2: $\epsilon_{s,\mu}\, \bar{u}^i_\tau \gamma^\mu (c_V - c_A\gamma^5) v^j_\tau$

(i,j)	$s=R$	$s=L$
$(+,+)$	$\sqrt{2} m_\tau \sin\theta$	$\sqrt{2} m_\tau \sin\theta$
$(+,-)$	$\sqrt{2}(c_V E_\tau + c_A p_\tau)(1+\cos\theta)$	$-\sqrt{2}(c_V E_\tau + c_A p_\tau)(1-\cos\theta)$
$(-,+)$	$-\sqrt{2}(c_V E_\tau + c_A p_\tau)(1-\cos\theta)$	$\sqrt{2}(c_V E_\tau + c_A p_\tau)(1+\cos\theta)$
$(-,-)$	$-\sqrt{2} m_\tau \sin\theta$	$-\sqrt{2} m_\tau \sin\theta$

相対論極限 $m_\Lambda \to 0$ を取ると $(i,j)=(+,+),(-,-)$ の項が消え, 残った項の係数を見ると $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の行列要素 (4.3.1) の計算結果 (表 4.1) の相対論極限と定数倍を除いて同じである. $\tau \to \pi\nu$ に関しては $\Lambda \to p\pi$ の計算と全く同じで, α_Λ, m_Λ, E_Λ, p_Λ をそれぞれ τ の量に置き換えてやればよい. 従って $Z \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ の角度分布は $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi p\pi$ の結果 (4.3.12) で α_Λ を $\alpha_\tau = 1$ に置き換え, $\Gamma \to 0$ の極限を取ったものに相当するする.

J/ψ のときと同様, 無偏極 e^+e^- ビームを仮定して横偏極 L, R で平均を取るが, これには多少注意が要る. というのも $ee \to Z$ において Z は $e^-_L e^+_R$, $e^-_R e^+_L$ とそれぞれ異なる強度で結合するため, 生じる Z の偏極は必ず L か R ではあるものの, その比率は e^+e^- が無偏極であっても半々ではない. しかし偏極 L, R で異なる項は（4.3.11）を見てわかるように $n_i n'_j$ という積ではなく必ず n_i か n'_j という一次の項なので $\int d\Omega_n d\Omega_{n'}$ 積分で消えるので C 行列には全く寄与しない. よって結局どのように平均を取っても問題はない. 結局 C 行列も $Q_{\max}$ も $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ での結果（4.3.13）で $\Gamma \to 0$ の極限を取ったものに等しく, 純粋なベクターモードの C 行列

$$C = \begin{pmatrix} -1/4 & & \\ & 1/4 & \\ & & -1/2 \end{pmatrix}$$
$$Q_{\max} = \frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118 > 1.$$

に帰着する. これは χ_{c0} や η_c に比べると相関は弱いが古典極限は超えており, τ は α が大きく偏極計としての性能が高いため統計量次第では有力なチャネルとなる.

4.6　$H \to \tau\tau$

標準模型のスカラーヒッグスを考えるなら結果は $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ の場合 (4.1.14) と全く同じで,

$$C = \begin{pmatrix} -1/2 & & \\ & -1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4.6.1}$$
$$Q_{\max} = \sqrt{2}$$

ベル不等式は最大限に破れる. LHC の実験結果によってもうその可能性は棄却されつつあるが [77], Higgs に CP odd の成分が入ってくる場合も考えられる. 完全に擬スカラーだった場合は $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$ と同じ結果 (4.2) に

なる．

$$C = \begin{pmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{pmatrix} \tag{4.6.2}$$

$$Q_{\max} = \sqrt{2}$$

CP even と odd が mix している場合は少しややこしい．直感的にはスカラーの成分 (4.6.1) と擬スカラー成分 (4.6.2) の重ね合わせになるため, C_{11} と C_{22} が打ち消し合って $Q_{\max}$ は小さくなることが予想される．事実行列要素

$$\mathcal{M} \propto \bar{u}_\tau(a + b\gamma^2)v_\tau$$

を考えてみると, (4.1.7), (4.2.1) から

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} \propto L_{++}\overline{L}_{++} + L_{--}\overline{L}_{--} + r(L_{-+}\overline{L}_{+-} + L_{+-}\overline{L}_{-+}) \tag{4.6.3}$$

$$r := \frac{a^2E_\tau^2 - b^2p_\tau^2}{a^2E_\tau^2 + b^2p_\tau^2} \simeq \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

が導かれる．後ろの干渉項の大きさが CP mixing によって弱められていることがわかる．直接項（(4.6.3) の始めの 2 項）が C_{33} に, 干渉項が C_{11} と C_{22} に寄与するため, C 行列と $Q_{\max}$ は

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}r & & \\ & \frac{1}{2}r & \\ & & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$Q_{\max} = \sqrt{1 + r^2} \geq 1$$

標準模型の場合は $r = 1$ である．CP even と CP odd が等しく混合している場合 $(r = 0)$ を除きベル不等式は破れる．

第5章　実験可能性

前章の解析の結果 6 のチャネルの候補のうち $J/\psi \to \Lambda\bar{\Lambda}$ 以外は $Q_{\max}$ が 1 を超えていることを示した．本章ではこれらのチャネルで実際に実験的感度のある結果を得られるかという点に議論の軸を移す．具体的には

- $Q_{\max} > 1$ を有意に確認できるだけの統計量がどのくらいか．そのサイズのサンプルが実際に手に入るかどうか．
- バックグラウンドの混入の影響
- 検出器の分解能による影響

この 3 点を各チャネルについて評価していく．

5.1　C_{11}, C_{33} および $Q_{\max}$ の分布と実験感度

我々が最も興味のある測定量は $Q_{\max}$ であるが，これは C 行列から求められる値であり，その C 行列の各要素は終状態粒子 $\pi\pi$ の i,j 方向の相関 $\langle n_i n'_j \rangle$ であった．実験ではこれらは各イベントの $n_i n'_j$ の算術平均

$$\langle n_i n'_j \rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(n_i n'_j)_k$$

から推定する形となるが，利用できるサンプルサイズ N には限りがあるので，統計的なふらつきの影響で推定精度も当然有限となる．
この章ではまず $Q_{\max}$ や，それを構成する C 行列の要素 C_{ij} の統計的性質を理解し，$Q_{\max}$ がどれくらいの精度で決まるか，ベル不等式の破れがどれくらいの有意度で確認できるかをサンプルサイズ N の関数として求める．

5.1.1　$n_i n'_j$ 分布の形

相関 $\langle n_i n'_j \rangle$ を見る前にまず $n_i n'_j$ が毎イベントどう分布するかを確認する．というのも実はこの確率分布はかなりいかがわしい形状をしている．
一般に $\pi\pi$ の分布は

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} \propto 1 + \alpha^2 \sum_{i,j} w_{ij} n_i n'_j$$

という形をしている．（4 章の結果参照）これを n_i と n'_j の 2 変数空間に射影した分布は，その他の自由度を積分することによって得られる．例えば $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$ チャネルでの角度分布

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} \propto 1 + \alpha_\Lambda^2 (n_x n'_x + n_y n'_y + n_z n'_z)$$

は, それぞれの π の方向に対応して (θ, ϕ), (θ', ϕ') の 4 つの自由度がある. 仮にこれから $n_z =: \cos\theta$ と $n'_z =: \cos\theta'$ の 2D 分布が欲しいならば, それ以外の自由度 $(\phi,\ \phi')$ について積分を行えばよい.

$$P(n_z, n'_z) = \int d\phi d\phi' \frac{d\sigma}{d\Omega_n d\Omega_{n'}} \propto 1 + \alpha_\Lambda^2 n_z n'_z$$

これが n_z と n'_z の joint-PDF であり, 図 5.1 のよう滑らかな分布である. ここから 1 変数 $x := n_z n'_z$ の確率分布に向かうには素直に変数変換を行えばよいが, 測度の違いを反映した因子 (図 5.2 参照)

$$M(x) = \frac{dx}{dn_z dn'_z} = 2\int_x^1 dn_z \left(\frac{x+dx}{n_z} - \frac{x}{n_z} \right) = 2 \ln \frac{1}{|x|} dx$$

の形に引きずられて, その結果はやや直感に反したものになる.

$$\begin{aligned} P(x) &= P(n_z, n'_z) M(x) \\ &\propto (1+\alpha^2 x) \ln \frac{1}{|x|} \end{aligned}$$

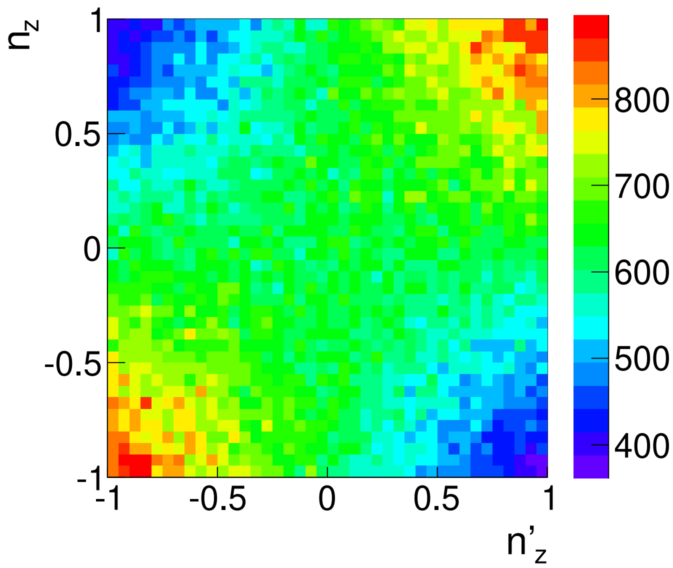

図 5.1: $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ における n_z, n'_z の二次元分布: $P(n_z, n'_z) = 1 + \alpha^2 n_z n'_z$

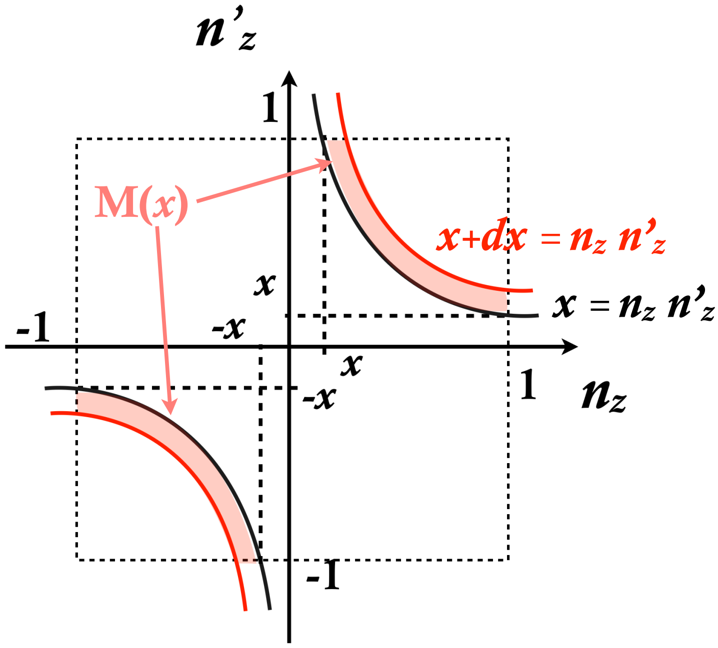

図 5.2: $x := n_z n'_z$ に対する測度因子 $M(x) = dx/dn_z dn'_z$

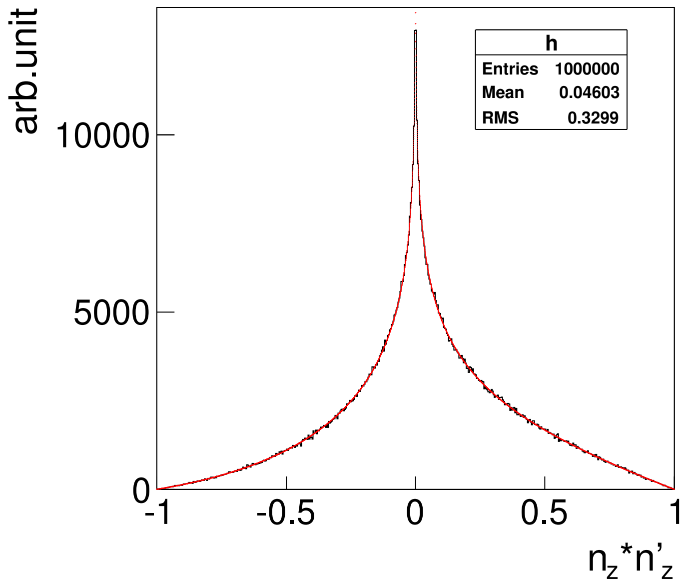

図 5.3: $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ における $x := n_z n'_z$ の分布．黒のヒストグラムは MC シミュレーション，赤は $P(x) \propto (1+\alpha^2 x)\ln\frac{1}{|x|}$ によるフィット

この分布の形状は Fig.5.3 の通りである．両サイドに長い tail があり，$x = 0$ で発散している．さらに性質を調べていくと

- $x = 0$ で発散しているが，$x \in [-1, 1]$ の積分は α の値によらず収束する．

$$
\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx(1+\alpha^2 x)\ln\frac{1}{|x|} &= \int_{-1}^{1} dx\left[\frac{(1+\alpha^2 x)^2}{2\alpha^2}\right]'\ln\frac{1}{|x|} \\
&= \left[\frac{(1+\alpha^2 x)^2}{2\alpha^2}\ln\frac{1}{|x|}\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2\alpha^2}\int_{-1}^{1} dx(1+\alpha^2 x)^2\frac{-1}{x} \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\int_0^1 dx 2\alpha^2 \\
&= 2
\end{aligned}
\tag{5.1.1}
$$

- $\alpha^2 \leq 1$ のとき, $x \in [-1,1]$ で $P(x)$ は正値
  我々のケースでは $\alpha \leq 1$ は物理によって保証され（2.2 参照）, $|n_z|, |n'_z| \leq 1$ より $|x| \leq 1$ は自明である.

以上より（何か変な感じではあるが）$P(x)$ は probability density function としての資格を有している. どうやらデルタ関数の親戚のようなものらしい. (5.1.1) を用いて規格化すると

$$
P(x) = \frac{1}{2}(1+\alpha^2 x)\ln\frac{1}{|x|} \tag{5.1.2}
$$

最後にこの分布の期待値 μ と RMSσ を調べてみる. それぞれの定義に基づいて計算すると

$$
\mu = \int_{-1}^{1} dx x P(x) = \frac{\alpha^2}{9}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_{-1}^{1} dx(x-\mu)^2 P(x) = \frac{1}{9}\left(1-\frac{\alpha^4}{9}\right) \\
\sigma &= \frac{1}{3}\sqrt{1-\frac{\alpha^4}{9}}
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

μ は無限大のサンプルサイズを使って推定した $\langle n_z n'_z\rangle$ に相当し, 偏極計の性能を表す α^2 に大きく依る. 注目すべき事実は RMS の方である. これは α の値にほとんど依らない. 一応 α が大きい方が小さくなるが, その影響はなきものに等しい. ($\alpha = 1$(最大) のとき $\sigma = 0.3305$; $\alpha = 0$ でも $\sigma = 0.3333$) この大きな幅は物理ではなく統計がもたらす効果である.

$n_i n'_j$ の $(i,j) = (z,z)$ 以外の項も全く同様に議論ができ, 確率分布の形は全て

$$
P(x) = \frac{1}{2}(1+w_{ij}\alpha^2 x)\ln\frac{1}{|x|} \tag{5.1.4}
$$

と書ける. また後でまた考察するが, 理想的な測定を仮定しても元々分布に非常に大きな幅 (5.1.3) があるので, 測定による $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ の誤差は $n_i n'_j$ には全く効かない.

5.1.2 C_{11} および C_{33} 分布の形とサンプルサイズ依存性

次に有限のサンプルサイズ N に対して, $\langle n_i n'_j\rangle$ の推定値 $y = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(n_i n'_j)_k$ の従う確率分布 $Q(x)$, つまり $P(x)$(5.1.4) に従う元 x を N 個取ってきたときの平均値の分布を考える. 再び $(i,j) = (z,z)$ を例から考える.

中心極限定理より, 十分大きさサンプルサイズ N に対しては $Q(x)$ はガウス分布に漸近し, その期待値と RMS

はそれぞれ

$$\mu' = \mu = \frac{\alpha^2}{9}$$
$$\sigma' = \sigma/\sqrt{N} = \frac{1}{3\sqrt{N}}\sqrt{1 - \frac{\alpha^4}{9}} \tag{5.1.5}$$

となることが知られている．（μ, σ はそれぞれ $x := n_z n'_z$ の従う分布 (5.1.2) の期待値と RMS である．）分布が収束しこの近似が成立するためにはどれくらいの N が必要だろうか．図 5.4 と図 5.5 が MC シミュレーションを用いた計算結果である．

驚くべきことに $N \geq 2, 3$ で既に $Q(x)$ はガウス分布に収束しており，その期待値と RMS も中央極限定理を用いたときの漸近値 (5.1.5) と一致している．$P(x)$ は極めて性質のよい分布であることがわかる．

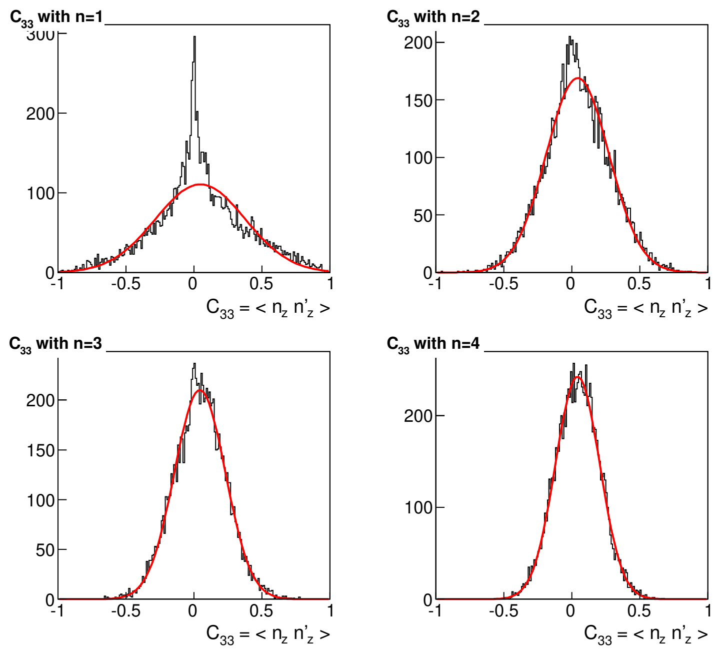

図 5.4: $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ における，$n_z n'_z$ の算術平均 $\langle n_z n'_z \rangle$ の分布．平均に用いたイベント数 $N = 1, 2, 3, 4$ の場合を表している．$N = 1$ は $n_z n'_z$ の分布と同じである．中心極限は極めて速く，$N \geq 2$ で既にガウス分布に漸近している．

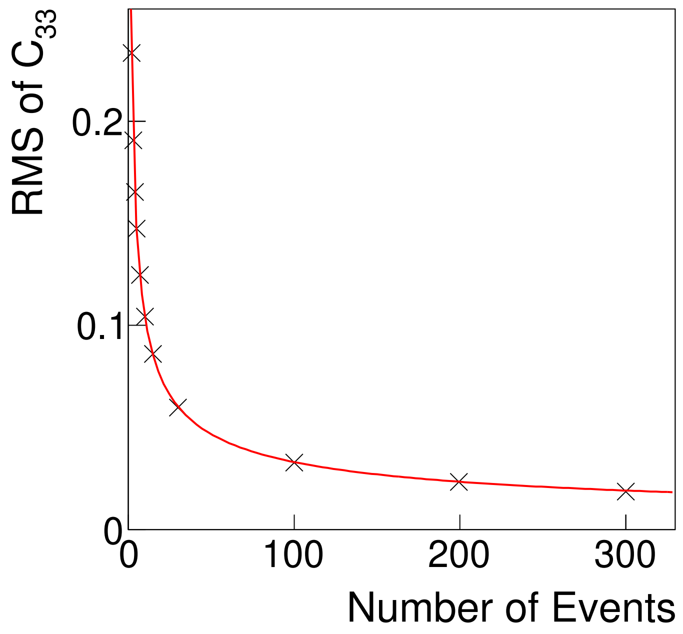

図 5.5: サンプルサイズ N ごとの $\langle n_z n_z' \rangle$ 分布の RMS. 赤線は中心極限定理における近似値 $\sigma = \frac{1}{3\sqrt{N}}\sqrt{1-\frac{\alpha^4}{9}}$.

また C_{33} は

$$C_{33} = \frac{9}{2\alpha} \langle n_z n_z' \rangle$$

なので, 従う分布は $Q(x)$ を $\frac{9}{2\alpha^2}$ でスケールしただけのガウス分布であり, 期待値と RMS はそれぞれ

$$\mu_{33} = \frac{1}{2}$$
$$\sigma_{33} = \frac{1}{2\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4} - 1}. \tag{5.1.6}$$

他の成分 C_{ij} も全く同じ分布に従う. すなわち真値の周りを幅 $\sigma_{33} = \dfrac{1}{2\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4}-1}$ のガウス分布でふらつく. 極端に少ないサンプルサイズ N に対してもバイアスがなく, ガウス分布で分布するというのは推定値として極めてよい性質である.

5.1.3　Q_{max} の推定

C 行列の要素の統計的な振る舞いは理解できたので, このまま Q_{max} の統計の評価に入りたいところだが, そもそも Q_{max} の推定値として何を使うかをまじめに考える必要がある. これには主に 2 通り考えられる.

- Q_{max} を定義通りに取る. つまり測定を通じ求めた C 行列から $S = C^t C$ を作り, S の固有値の大きい方 2 つ λ_1, λ_2 を用いて

  $$Q^M_{\mathrm{max}} = 2\sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$$

  とするやり方である.

- 一方 QM では今回考えていた 6 チャネル全てで C 行列は対角行列, かつ $|C_{11}|, |C_{33}| > |C_{22}|$ であったので

$$Q^D_{\max} = \sqrt{C_{11}^2 + C_{33}^2}.$$

  この $Q^D_{\max}$ をそのまま $Q_{\max}$ の推定値とする方法である. つまり C 行列の非対角成分が測定で 0 でなかったとしても無視する.

ナイーブに考えると $Q^D_{\max}$ を採用する理由はない. QM の場合にしかあてはまらない推定方法でベル不等式をテストするというのはいかにも気持ちが悪い. しかし 3.3 で証明したように, ある C 行列に対して最大の Q を与えるのは非対角成分を無視せず $S = C^T C$ を厳密に対角化した $Q^M_{\max}$ の場合である. つまり $Q^D_{\max}$ は一般に $Q^M_{\max}$ の値より必ず等しいか小さくなる. 我々が損するこそあれチートにはなっていないのだ.

逆に $Q^M_{\max}$ がまずいのはそれ故である. 非対角成分は必ず, 対角成分のみ考えた場合よりも大きな $Q_{\max}$ の値を与えるので, 統計的なふらつきによって生じる非対角成分は必ず $Q_{\max}$ を大きい方にバイアスする. 従ってより一般的に見えた $Q^M_{\max}$ は実はより公平性に欠けている.
図 5.6 と図 5.7 はそれぞれの方法で $Q_{\max}$ を推定したときの分布と, その期待値（点線は真値であり, そこからのズレがバイアスを表す）と RMS である. RMS は $Q^M_{\max}$ の方が小さいものの, バイアスは $Q^D_{\max}$ に比べて非常に大きく, しかも N が大きくなってもなかなか収束しないという看過できない性質を持っている. これが我々が $Q_{\max}$ の推定値として $Q^D_{\max}$ の方を採用すべき理由である. 図 5.8 と図 5.9 は $Z \to \tau\tau$ における同様の考察である. 定性的な傾向は $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$ などと同じである.

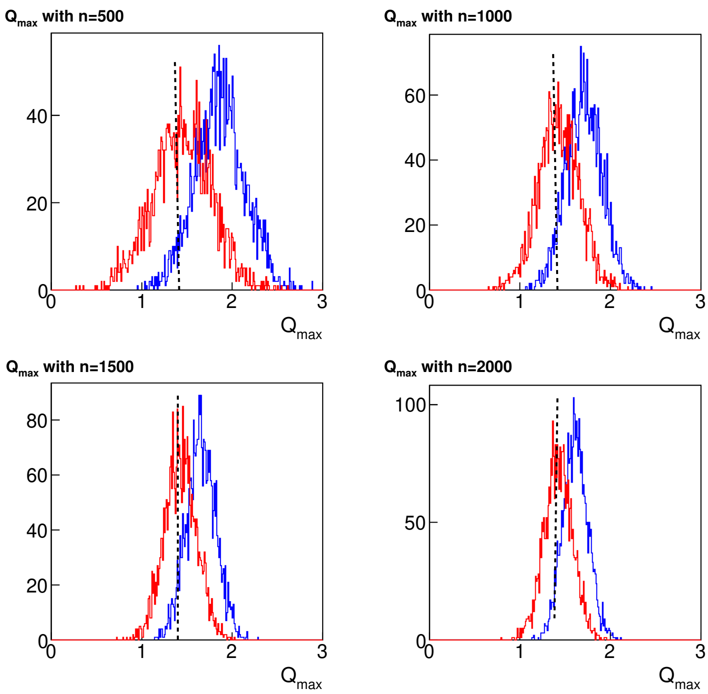

図 5.6: $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$ において, $Q_{\max}$ の推定として $Q^M_{\max}$(青), $Q^D_{\max}$ を用いた場合の分布. 点線は $Q_{\max}$ の真値 (理論値)

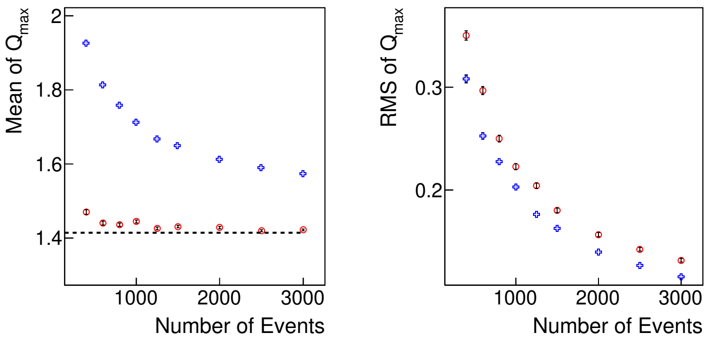

図 5.7: $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ において, $Q_{\max}$ の推定として $Q^M_{\max}$(青), $Q^D_{\max}$ を用いた場合の分布の平均値と RMS. 点線は $Q_{\max}$ の真値 (理論値). $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ も同じ挙動を示す.

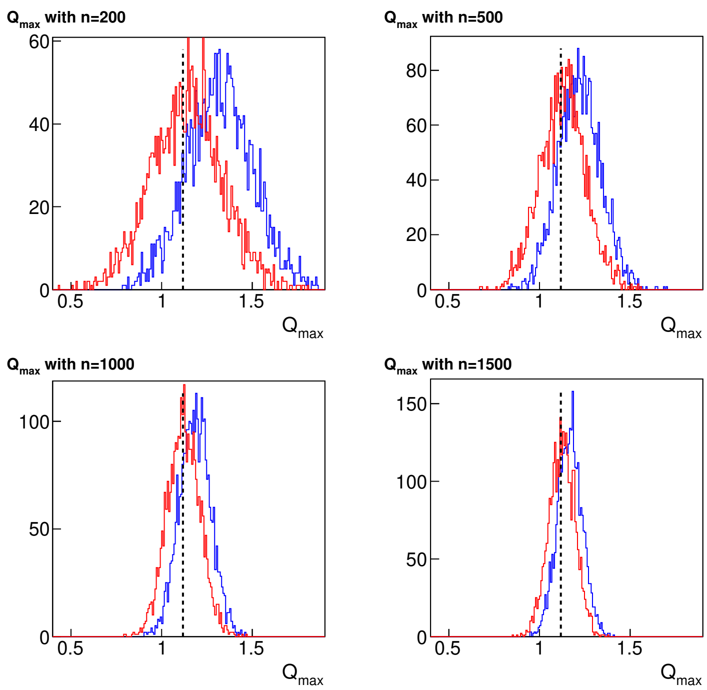

図 5.8: $Z \to \tau\tau$ において, $Q_{\max}$ の推定として $Q^M_{\max}$(青), $Q^D_{\max}$ を用いた場合の分布. 点線は $Q_{\max}$ の真値 (理論値).

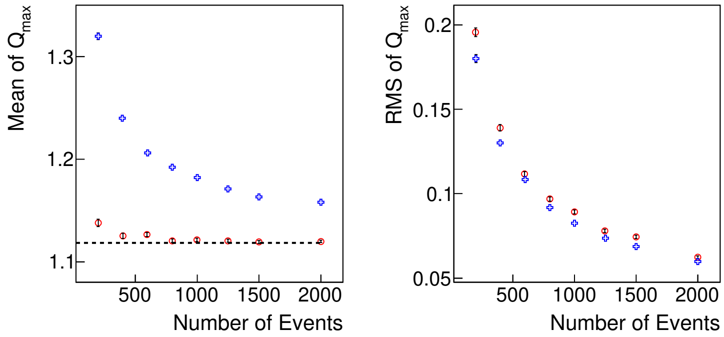

図 5.9: $Z \to \tau\tau$ において, $Q_{\max}$ の推定として $Q^M_{\max}$(青), $Q^D_{\max}$ を用いた場合の分布の平均値と RMS. 点線は $Q_{\max}$ の真値 (理論値). $ee \to \gamma^* \to \tau\tau$ と $H \to \tau\tau$ も同様の挙動を示す.

$Q^D_{\max}$ の分布の性質に対しても何点かコメントする.

- $Q^D_{\max}$ の方も C_{11} と C_{33} を非線形な格好で含んでいるので, C_{11} と C_{33} がバイアスのない非常にきれいなガウシアンであっても N が小さいところでは, 分布が非ガウスな tail を持ちバイアスを生じる. $H \to \tau\tau$ 以外のチャネルは後述の通りサンプルサイズが十分大きく影響はないが, $H \to \tau\tau$ は期待できる統計量が $N < 50$ で多少まじめに考える必要がある. これについては 5.2.5 でまた論じる.

- ガウス分布に漸近するのはチャネルよって異なるが大体
$$N \sim \begin{cases} 150 & (\Lambda \text{ チャネル}) \\ 20 & (\tau \text{ チャネル}) \end{cases} \tag{5.1.7}$$
である. (図 5.10, 5.11 を参照) 非ガウス性は C_{11} と C_{33} のふらつきによって発生するが, ふらつきの大きさは (5.1.6) より α にしか依存しないことから, ガウス分布への収束の速さは α の大きさのみで決まっている.

- $Q^D_{\max}$ がガウス分布に収束した後の RMS は伝搬則を用いて簡単に求めることができる.
$$Q^D_{\max} = 2\sqrt{C_{11}^2 + C_{33}^2}$$
なので, C_{11} と C_{33} の分布は無相関であることを用いると
$$\begin{aligned}\sigma(Q^D_{\max})^2 &= \left(\frac{\partial Q^D_{\max}}{\partial C_{11}}\right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{\partial Q^D_{\max}}{\partial C_{33}}\right)^2 \sigma_{33}^2 \\ &= \left(2\frac{C_{11}}{\sqrt{C_{11}^2 + C_{33}^2}}\right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(2\frac{C_{33}}{\sqrt{C_{11}^2 + C_{33}^2}}\right)^2 \sigma_{33}^2 \\ &= \frac{4}{C_{11}^2 + C_{33}^2}(C_{11}^2\sigma_{11}^2 + C_{33}^2\sigma_{33}^2)\end{aligned}$$
σ_{11}, σ_{33} は (5.1.6) より全てのチャネルで
$$\begin{aligned}\sigma_{11} = \sigma_{33} &= \frac{1}{2\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4} - 1} \\ &=: \sigma_C\end{aligned}$$

従って

$$
\begin{aligned}
\sigma(Q_{\max}^{D})^2 &= 4\sigma_C^2 \\
\sigma(Q_{\max}^{D}) &= 2\sigma_C \\
&= \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4}-1}
\end{aligned}
\tag{5.1.8}
$$

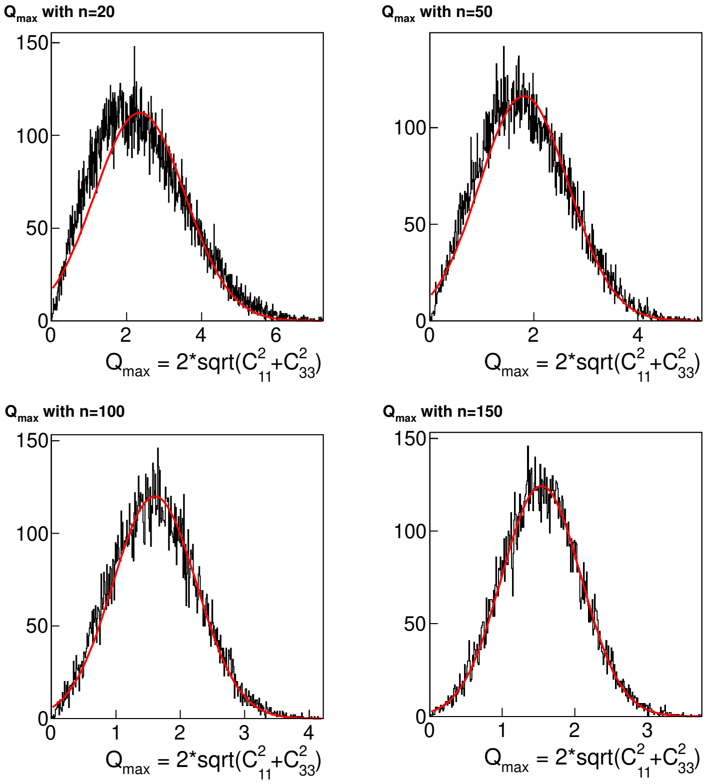

図 5.10: $\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$ において，サンプルサイズ $N = 20, 50, 100, 150$ を用いたときの $Q_{\max}^{D}$ の分布．$N = 150$ ではほぼガウス分布に収束する．この性質は $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ でも同様である．

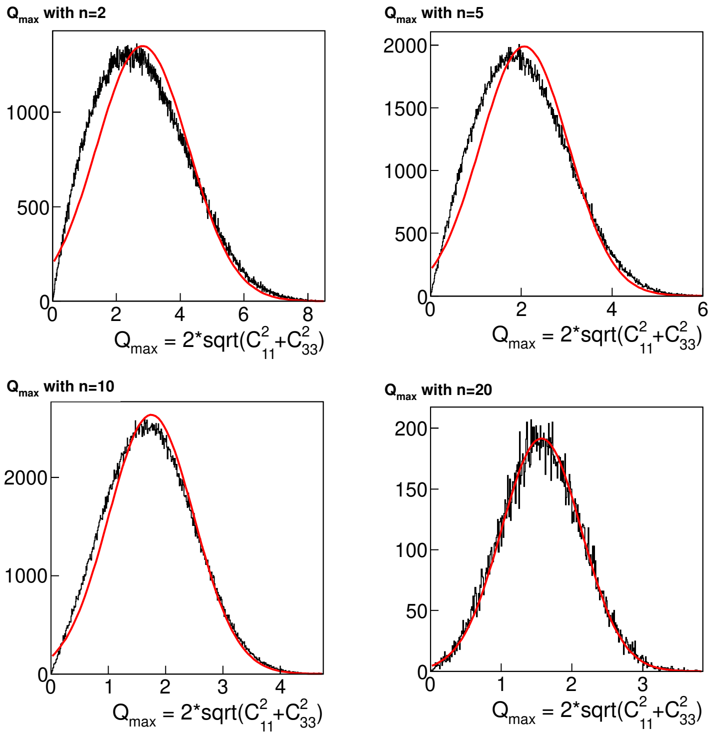

図 5.11: $H \to \tau\tau$ において，サンプルサイズ $N = 2, 5, 10, 20$ を用いたときの $Q^D_{\max}$ の分布．$N = 20$ でほぼガウス分布に収束する．この性質は $Z \to \tau\tau$ と $ee \to \gamma^* \to \tau\tau$ でも同様である．

以上の議論より，我々は $Q_{\max}$ の実験値を $Q^D_{\max}$ で定めることにする．また今後 $Q_{\max}$ は特に断りがない限り $Q^D_{\max}$ をさすことにする．

5.1.4　予測感度とその近似式

サンプルサイズ N に対して，期待されるベル不等式の破れの統計有意度を求める．$Q_{\max}$ の分布が Gaussian に漸近しているとき，有意度は

$$\Delta =: \frac{\mu(Q_{\max}) - \mathrm{CL}}{\sigma(Q_{\max})} \tag{5.1.9}$$

である．例えば $\Delta = 1$ のときは 1σ の有意度を表す．$\mu qmax$ は理想的な状況では 4 章で求めた $Q_{\max}$ の理論値 $\tilde{Q}_{\max}$ であり

$$\tilde{Q}_{\max} = \begin{cases} \sqrt{2} & (Z, \gamma^{\to}\tau\tau \text{ 以外}) \\ \dfrac{\sqrt{5}}{2} & (Z \to \tau\tau) \\ \dfrac{\sqrt{5 - 2\Gamma^2 + 2\Gamma^4}}{2 + \Gamma^2}; \quad \Gamma^2 := \dfrac{4m_\tau^2}{s} & (e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau) \end{cases}$$

($\sqrt{s}$ は e^+e^- の重心系エネルギー．Belle 実験の $\sqrt{s} = 10.58$ (GeV) を想定した場合は $Q_{\max} = 1.037$) CL はベル不等式の古典上限で，理想的な場合では 1 である．N が (5.1.7) より大きく，$Q_{\max}$ の分布がガウス分布に漸近したときは，(5.1.8) が使えて

$$\Delta =: (\mu(Q_{\max}) - \mathrm{CL}) \frac{\alpha^2}{\sqrt{9 - \alpha^4}} \sqrt{N}. \tag{5.1.10}$$

これが実験感度を与える公式である（統計量が極端に少ない H channel では近似式だが, 他のチャネルではほぼ解析解である）.

これを見ると感度 Δ を決める因子は 3 つある. 1 項目の $\mu(Q_{\max})$ - CL は, 各チャネルにおける $\Lambda\bar{\Lambda}$ および $\tau\tau$ のスピン・エンタングルメントの強さを反映しており, ベル不等式を破る原理的な要素である. 2 項目の $\frac{\alpha^2}{\sqrt{9-\alpha^4}}$ はその崩壊 $\Lambda \to p\pi$ および $\tau \to \pi\nu$ の偏極計としての性能を表していて, α が大きいほどスピン・エンタングルメントが観測量に反映され感度が上がる. 3 項目は統計量に関する項である. 各チャネルにおいて達成できる有意度と統計量の関係を表したのが図 5.12 である.

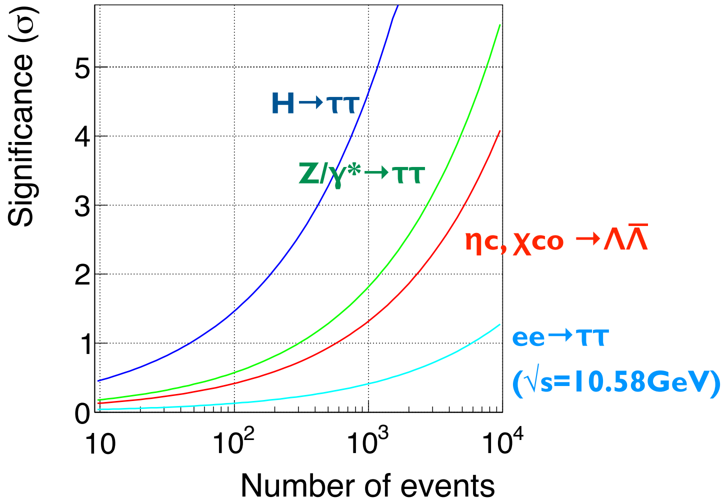

図 5.12: 各チャネルのサンプルサイズ N に対する統計有意度 Δ

1σ, 2σ, 3σ の有意度を与える統計量は表 5.1 の通りである.

表 5.1: 各チャネルの 1σ, 2σ, 3σ の統計有意度 Δ を与える統計量

Channel	N(1σ)	N(2σ)	N(3σ)
$\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$	600	2200	5000
$Z \to \tau\tau$	300	1200	1700
$ee \to \gamma^* \to \tau\tau$	6000	26500	60000
$H \to \tau\tau$	45	180	400

5.2 現在および将来実験における使用可能なサンプルサイズと破れの検証可能性

前章で一定の感度を得るのに必要な統計量を各チャネルについて求めたが, 実際に現実的に調達可能な量はどれくらいあるかをこの節で考察する.

5.2.1 $\chi_{c0}, \eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$

BES3, CLEO などチャームファクトリーでの実験が現実的である．これらは e^+e^- 実験であるが, J/ψ, ψ' などの特定のチャーモニウム共鳴状態の質量にエネルギーを合わせて衝突させ, それらの粒子を大量に生産している．η_c と χ_{c0} はそれぞれ J/ψ と ψ' の radiative deexcitation

$$J/\psi \to \eta_c \to \gamma \qquad\qquad \psi' \to \chi_{c0} \to \gamma$$

によって作られる．その後の η_c, $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi p\pi$ までの各崩壊を含めた崩壊分岐比のまとめが表 5.2 である．

表 5.2: $c\bar{c} \to \eta_c$, $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi p\pi$ における各崩壊の崩壊分岐比

チャネル	崩壊分岐比
$\mathrm{J}/\psi \to \eta_\mathrm{c} + \gamma$	$(1.7 \pm 0.4) \times 10^{-2}$
$\psi' \to \chi_\mathrm{c0} + \gamma$	$(9.7 \pm 0.3) \times 10^{-2}$
$\eta_\mathrm{c} \to \Lambda + \overline{\Lambda}$	$(1.41 \pm 0.17) \times 10^{-3}$
$\chi_\mathrm{c0} \to \Lambda + \overline{\Lambda}$	$(3.3 \pm 0.4) \times 10^{-4}$
$\Lambda \to \mathrm{p} + \pi^-$	$(6.39 \pm 0.05) \times 10^{-1}$
$\overline{\Lambda} \to \overline{\mathrm{p}} + \pi^+$	$(6.39 \pm 0.05) \times 10^{-1}$
$\mathrm{J}/\psi \to \gamma\eta_\mathrm{c};\ \eta_\mathrm{c} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to \mathrm{p}\pi\mathrm{p}\pi$	$(9.8 \pm 2.6) \times 10^{-6}$
$\psi' \to \gamma\chi_\mathrm{c0};\ \chi_\mathrm{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to \mathrm{p}\pi\mathrm{p}\pi$	$(1.31 \pm 0.16) \times 10^{-5}$

BES3 をまず想定すると, 2013 年末までに J/ψ と ψ' がそれぞれ 1.2×10^9, 3.0×10^8 生成されているのでシグナルイベント $J/\psi \to \eta_c\gamma; \eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi p\pi$, $\psi' \to \chi_{c0}\gamma; \chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi p\pi$ はそれぞれおよそ 1.2×10^4, 4×10^3 ほどと見積もられる．イベント取得効率は $\Lambda \to p\pi^-$ と $\overline{\Lambda} \to \bar{p}\pi^+$ が space-like なものだけを拾ってくると BES3 を想定した場合はおよそ 20 ∼ 30% であり，（表 5.3）$\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$, $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ それぞれで 4000, 1500 前後のイベント数と 3.5σ, 2σ 前後の感度が期待できる．

5.2.2 $Z \to \tau\tau$

まずこのチャネルのテストに適した実験であるが, 単純に Z の統計量で考えた場合は LHC が飛び抜けて多い．しかし LHC は陽子陽子の衝突で, 内部で実際に対消滅して Z を発生させるプロセス（Drell-Yan 過程）に寄与するクオークのエネルギーがわからないため, 毎イベントの重心系がわからず, エネルギー運動量保存則から missing 4 momentum を特定することができない．我々が測りたいのは τ 静止系における π の方向なので, τ の運動量が 3 成分全て再構成する必要があるので missing 4 momentum の情報が肝心である．その点を踏まえると毎回の衝突で重心系が決まっている e^+e^- コライダーが望ましく, なおかつ Z の統計量が豊富な LEP 実験が現在唯一の候補となる．LEP では加速器のリングに 4ヶ所に DELPHI, ALEPHE, L3, OPAL の 4 つの検出器があり, それぞれで e^+e^- の衝突を行って約 10^6 の Z が生成された [81]．$Z \to \tau\tau\pi\nu\pi\nu$ の数は表 5.4 より 1 実験あたり約 400 である．イベントの取得効率は典型的に 20% 前後なので [82], 期待されるサンプルの統計量は 1 実験あたり 80, 4 実験合わせて 300 前後である．感度は低い．それぞれ 75%CL, 85%CL 程度の強さで不等式の破れが確認される．

LEP 以外での潜在的な可能性としては ILC も考えられる．ILC での最も重要な物理プログラムは Higgs factory であるが, その結果次第では電弱スケールの物理の超精密測定を目的とした Giga-Z という運転シナリ

表 5.3: BES3 を想定した $\eta_c\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ のイベント選択のカットフローと選択効率．$|\cos\theta_\Lambda|$ のカットはトラッカーのアクセプタンスによるもの．飛跡取得効率は BES3 の発表 [79] をもとに $p\pi\bar{p}\pi$ のうち 3 本以上の飛跡を取得できる確率を算出した．再構成質量のカットの効率は BES3 の $\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ 解析 [80] からの推定値である．space-like イベントの割合は式 2.3.4 で求めた結果（表 2.2）より．

カット	効率	
	$\eta_c \to \Lambda\bar{\Lambda}$	$\chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$
$\lvert\cos\theta_\Lambda\rvert < 0.93$	0.86	0.86
飛跡取得効率 (3, 4 prong)	0.95	0.98
Λ, η_c, χ_{c0} 再構成質量カット	(0.6)	(0.6)
space-like イベント率	0.66	0.76
計	0.32	0.38

表 5.4: $Z \to \tau^-\tau^+ \to \pi^-\nu\pi^+\bar{\nu}_\tau$ における各崩壊の崩壊分岐比

チャネル	崩壊分岐比
$Z \to \tau\tau$	$(3.37 \pm 0.0008)\%$
$\tau^- \to \pi^-\nu_\tau$	$(10.83 \pm 0.0006)\%$
$\tau^+ \to \pi^+\bar{\nu}_\tau$	$(10.83 \pm 0.0006)\%$
$Z \to \tau^-\tau^+ \to \pi^-\nu\pi^+\bar{\nu}_\tau$	$(3.95 \pm 0.04) \times 10^{-4}$

オも予定されている [53]．これは 10^9 オーダーの Z を生成するという計画であり，もしそれが実現した場合は LEP の 1000 倍程度の統計量が期待でき，$4\sigma - 5\sigma$ 前後の極めて高い感度ベル不等式のテストを行うことができる．

5.2.3 $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$

このチャネルで $Q_{\max}$ が 1 を超えるには重心系エネルギーは少なくとも 8.5 GeV 必要である．Belle 実験は $\upsilon(5S)$ の質量に合わせて重心系エネルギー 10.58 GeV で長期運転を行っていたが，この場合 $Q_{\max} = 1.03$ でギリギリである．その代わりこの統計量は尋常でなく多い．2010 年までの積分ルミノシティ$\mathcal{L} = 771\mathrm{fb}^{-1}$ で $e^+e^- \to \tau\tau$ がおよそ 7×10^8 イベント，$e^+e^- \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ は 8×10^6 イベントほど望める．理想的な条件下ではイベント取得効率を厳しめに仮定しても（$\sim 5\%$）4×10^5 の統計量で 7σ を超える極めて高い感度が期待できるが，古典上限のギリギリのところに $Q_{\max}$ があるせいで後で考察するように BG のコンタミの影響が極めて大きく，解析の最適化を行わないとはっきりしたことはわからないが現実的には $\sim 2\sigma$ 程度の感度しかないと考えられる．

5.2.4 $H \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$

最後にオマケとして考えてみる．候補となるコライダー実験は ILC 一択である．Higgs の生成チャネルとしては 2 つ考えられる．ZH 随伴生成チャネル (Fig.5.13) と WW fusion チャネル（図 5.14）である．低エネルギー

運転 ($\sqrt{s} = 250, 350$ GeV) では ZH, 高エネルギー ($\sqrt{s} = 500$ GeV) になると WW fusion が主要なプロセスとなる (図??).

この中で我々が使うことができるのは ZH チャネルのみである．なぜなら WW fusion では終状態でさらに 2 つニュートリノが現れ, $\tau\tau$ が再構成できなくなるからである．しかも ZH チャネルでも解析は容易ではない．まず missing 4 momentum を正確に知る必要があるので, 反跳した Z のエネルギーと運動量を正確に測ることが求められる．レプトン対に崩壊するチャネル $Z \to ee, \mu\mu$ では Z のエネルギーと運動量は正確に測れるがこれらは Z の崩壊の 6% を占めるにすぎず, 統計量の観点から $Z \to q\bar{q}$ (braching 70%) も使わざるを得ない．幸いにして ILC ではこういった $q\bar{q}$ ジェットの精密測定に特化した測定器システム [83, ?] と Particle Flow Algorithm [84] によって, それぞれ $\sigma/E \sim 4\%$ のエネルギー分解能を達成できると考えられている [83]. また運動量分解能に関しては, ILD の検出器フルシミュレーションを行った結果, 1 ジェットあたり運動量の各成分に対して σ2GeV の精度で決定できることが明らかになった．詳しい解析はまだ進行中であるが, これは $\tau\tau$ の運動量を再構成するのに十分な精度であると考えている．

最後に期待されるイベント数を見積もる．各崩壊ステップの分岐比は表 5.5 の通りである．ルミノシティに関

表 5.5: $H \to \tau\tau$ は理論値を使用している．質量 125 GeV の Higgs を仮定している．

チャネル	崩壊分岐比
$H \to \tau\tau$	$(6.32 \pm 0.36)\%$
$\tau^- \to \pi^- \nu_\tau$	$(10.83 \pm 0.0006)\%$
$\tau^+ \to \pi^+ \bar{\nu}_\tau$	$(10.83 \pm 0.0006)\%$
$Z \to q\bar{q}, e^+e^-, \mu^+\mu^-$	$(76.6 \pm 0.06)\%$
$e^+e^- \to Z^* \to ZH; H \to \tau^-\tau^+ \to \pi^-\nu\pi^+\bar{\nu}_\tau$	$(5.70 \pm 0.33) \times 10^{-4}$

しては 3 つのシナリオ; 250fb^{-1}, 1000fb^{-1}, 2000 fb^{-1} を考えた．重心系エネルギーは全て 250 GeV である．H の生成量はそれぞれ 8×10^4, 32×10^4, 64×10^4 であり, $H \to \tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ のイベントは表 5.5 の値を使うとそれぞれおよそ 45, 180, 360 イベントである．イベント取得効率は現在の解析ではおよそ 25% であるが, これはまだ改善の余地が大いにあり, 期待も込めて最終的に 50% 前後になると仮定すると得られるサンプルの量はそれぞれ 20, 90, 180 イベントで, 感度は他のチャネルと比べて著しく低くなるが, それでも 1000fb^{-1} で 80%CL, 2000fb^{-1} で 95%CL を超える強さでベル不等式の破れが確認できるが, 次節で説明するように, BG の影響で現実的には感度はもっと低くなる。BG レベル 15% で 2000fb^{-1} で 68%CL が一つの目安である．しかしそれでもこれは Higgs を応用する初めての試みであり．非常に面白い結果と筆者は考えている．

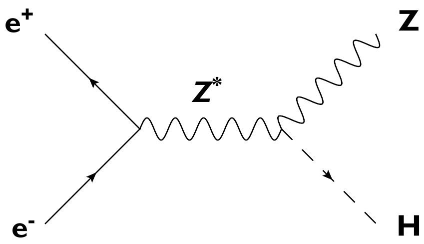

図 5.13: ZH 随伴生成．ILC の低エネルギー運転 ($\sqrt{s} = 250\mathrm{GeV}$) における主要な Higgs 生成プロセス

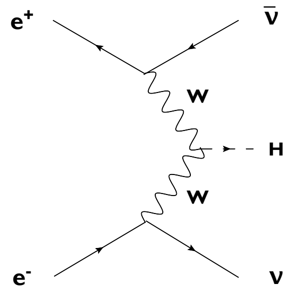

図 5.14: WW fusion による Higgs の生成．ILC の高エネルギー運転 ($\sqrt{s} = 500, 1000\mathrm{GeV}$) における主要な Higgs 生成プロセス

5.3　バックグラウンドによる影響

バックグラウンド（BG）はここで信号として考慮している以外の物理過程，または崩壊が time-like になる信号過程を指す．BG がもたらすネガティブな効果は 2 つある．

1. 相関 $\langle n_i n'_j \rangle$ が薄まるため $Q_{\max}$ が小さくなる．一般に BG となるイベントは π の誤認定といった偶発的なものが多く，特別な相関を持たないことが多い．（$\langle n_i n'_j \rangle \sim 0$）したがって BG のイベントを取得することによって相関は薄められることが予想される．

   BG イベントの n_i, n'_j は全く相関を持たず等方的とすると，$x = n_i n'_j$ の分布は (5.1.2) で $\alpha = 0$ とおいたものに相当するので

$$P(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{|x|}$$

   である．シグナルイベントの $x = n_i n'_j$ の分布は (5.1.2) なので単純な混合を考えると

$$\begin{aligned} P_b(x) &= (1-b)\frac{1}{2}(1+\alpha^2 x)\ln\frac{1}{|x|} + b\frac{1}{2}\ln\frac{1}{|x|} \\ &\propto \frac{1}{2}\left(1 + (1-b)^2\alpha^2 x\right)\ln\frac{1}{|x|} \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

   b は BG イベントの割合を表す（以降 BG レベルと呼ぶ）．従ってこれは理想的な測定のときの分布 (5.1.2) を実効的に

$$\alpha^2 \to (1-b)\alpha^2$$

   で置き換えた分布となり，期待値と RMS はそれぞれ

$$\begin{aligned} \mu &= (1-b)\frac{\alpha^2}{9} \\ \sigma &= \frac{1}{3}\sqrt{1-(1-b)^2\left(\frac{\alpha^2}{9}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

そのため $C_{ij} = \dfrac{9}{2\alpha^2}\langle n_i n'_j \rangle$ の分布は

$$\begin{aligned}\mu &= (1-b)\tilde{C}_{ij} \\ \sigma &= \frac{1}{2\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4} - (1-b)^2}\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

チルダ記号は BG がなかったときの理論値を表す．$Q_{\max}$ の分布もガウス分布に近づいたときは 5.1.3 の議論を繰り返して

$$\mu(Q_{\max}) = (1-b)\tilde{Q}_{\max} \tag{5.3.4}$$

$$\sigma(Q_{\max}) = \frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{9}{\alpha^4} - (1-b)^2} \tag{5.3.5}$$

である．BG によって相関が薄められた結果 $Q_{\max}$ の平均値 $\mu(Q_{\max})$ は真値 $\tilde{Q}_{\max}$ から 1-b でスケールダウンする．一方で RMS の方は BG レベルにほとんど依存せず, 理想測定のときとほぼ同じ値を取る．
BG レベル b に対する各チャネルで得られる有意度の変化は図 5.15~5.19 の通りである．各チャネルで想定される BG レベルは, $\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ では現在の解析では 0.5% 以下である．（効率も 25% と低い．ベル不等式のテストのために解析を最適化する余地はまだある）τ チャネルでは終状態に π, π しかないため難易度は上がるが, LEP での $Z \to \tau\tau$, Belle での $e^+e^- \to \gamma^* \to \tau\tau$ ともに 2% 程度に BG を抑えることができている．

$H \to \tau\tau$ の場合は複雑である．$ee \to Z^* \to ZH$ 随伴生成チャネル (図 5.13) から H を作るので, missing の情報を正しく得るためには反対側の Z もまじめに再構成する必要がある．Z は崩壊分岐の 23% がニュートリノ, 約 70% が $q\bar{q}$ ジェットであることを考えるとこれは非常に厄介である．現段階の解析では効率 25% に対して BG レベルは 45% 前後であるが, まだ改善の余地は大いにある．例えばこのチャネルでは $ee \to ZZ \to \tau\tau q\bar{q}$ が主要な BG であるが, これはシグナルの $ee \to Z^* \to HZ \to \tau\tau q\bar{q}$ 終状態が同じトポロジーなので, $\tau\tau$ の再構成質量でしか区別ができない．現在 $\tau\tau$ の解析ではこの再構成質量を collinear 近似という粗い方法で組んでおり, 図 5.20 を見てわかるようにこの精度が悪いため再構成質量の cut が緩く残留 BG が依然として多い．[78] この再構成質量の精度は, 2 章の最後（2.4）で述べた方法を用いて missing 4 momentum や衝突点の情報を最大限に活用することによって大きく改善できると考えられており, これによって BG レベルは 15% 前後まで抑えられると期待されている．

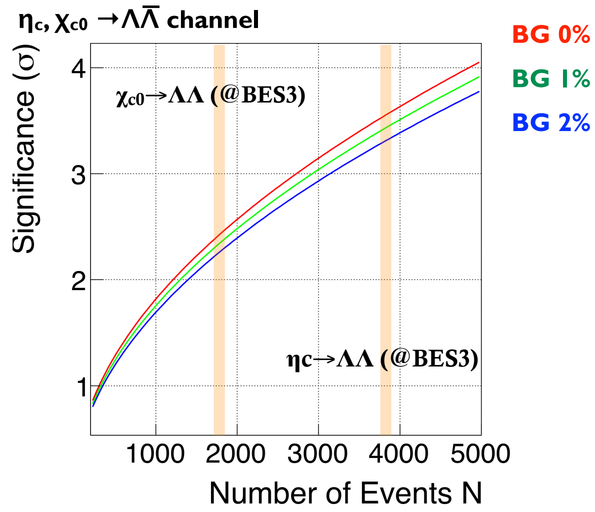

図 5.15: $\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\bar{\Lambda}$ チャネルの BG レベルに対する到達感度

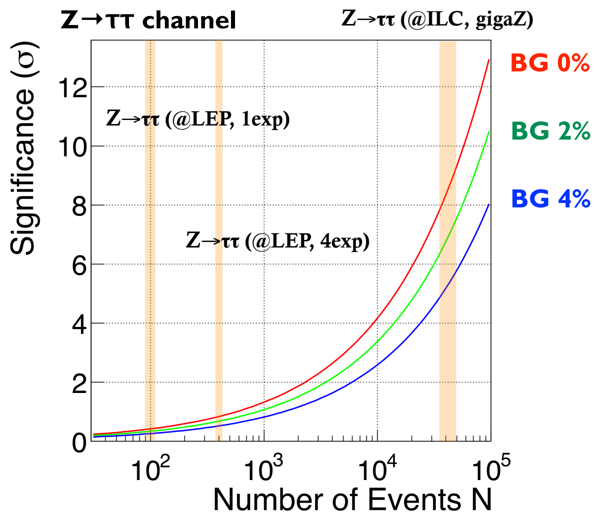

図 5.16: $Z \to \tau\tau$ チャネルの BG レベルに対する到達感度

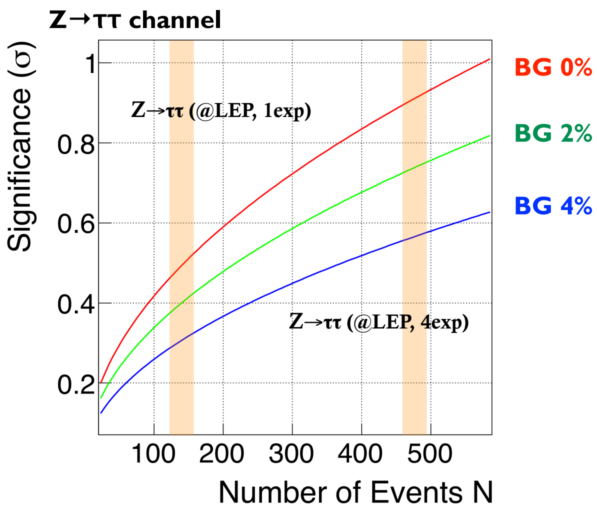

図 5.17: $Z \to \tau\tau$ チャネルの BG レベルに対する到達感度．図 5.16 の統計量が少ない領域拡大したものである．

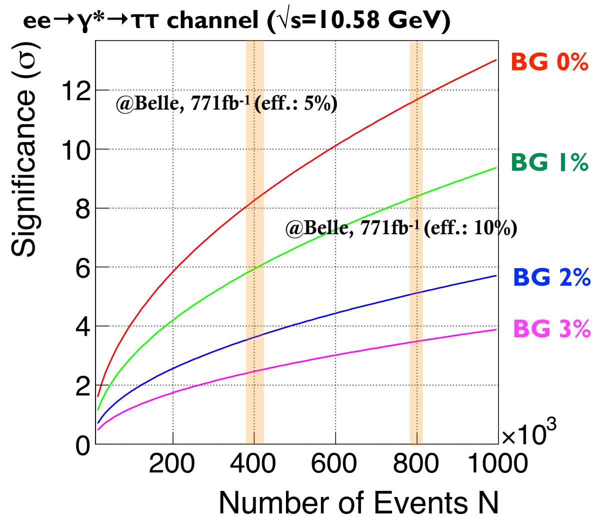

図 5.18: $ee \to \gamma^* \to \tau\tau$ チャネルの BG レベルに対する到達感度

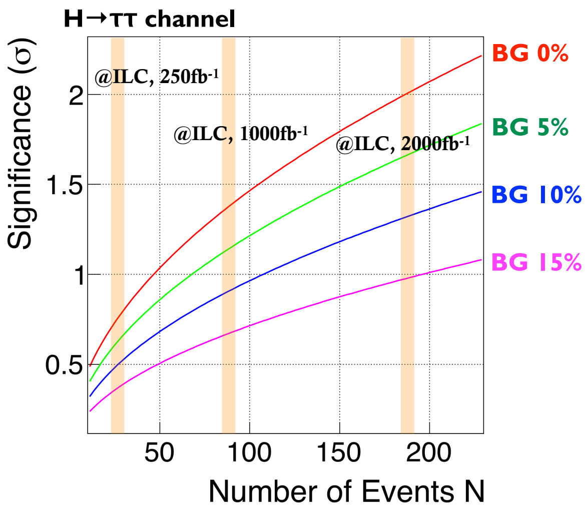

図 5.19: $H \to \tau\tau$ チャネルの BG レベルに対する到達感度

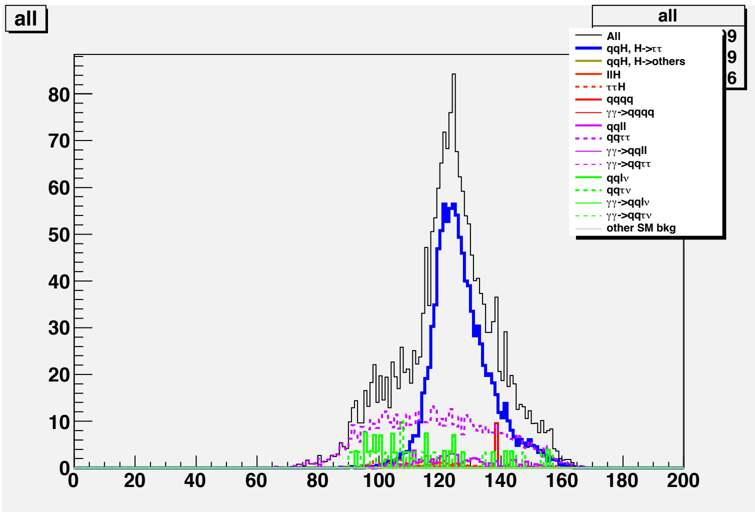

図 5.20: $H \to \tau\tau; Z \to q\bar{q}$ チャネルの ILD におけるシミュレーション (Higgs 質量 120GeV) の解析. 横軸は $\tau\tau$ の再構成質量で, シグナル（青線）は Higgs 質量のまわりにピークを持つが, collinear 近似ではピークの幅は広いため $ee \to ZZ \to \tau\tau q\bar{q}$ の BG（ピンク）の混入が大きい.

2. 不等式の Classical limit が大きくなる我々が 3 章で定式化したベル不等式 (3.2.6) は, 関係式 (3.2.5) の上に成り立っているが, これは Λ, τ と π の関係 (2.3.1) を実験結果として要請しているため, シグナルイベント $\Lambda\bar{\Lambda} \to p\pi p\pi$ と $\tau\tau \to \pi\nu\pi\nu$ 以外が従う保証はない. (3.2.5) を要請しなかった場合に一般の 2 粒子の方向に課せられる条件は

$$|\langle n_a\, n_b' \rangle + \langle n_a\, n_d' \rangle + \langle n_c\, n_b' \rangle - \langle n_c\, n_d' \rangle| \leq 2.$$

これは 3 次元のベクトル $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}'$ が満たす一般的な代数不等式にすぎない. 一方シグナルイベントの方のベ

ル不等式は (3.3.14) より

$$|\langle n_a n_b' \rangle + \langle n_a n_d' \rangle + \langle n_c n_b' \rangle - \langle n_c n_d' \rangle| \le \frac{2\alpha^2}{9}.$$

BG の不等式 (2) は相関に大した制限を与えられないので元々の不等式より上限が $9/\alpha^2 \sim 9-20$ 倍大きい．これは非常に頭の痛い事実である．結局 BG 混入率が b のイベントサンプルが満たすべきベル不等式は, シグナルの不等式 (3.2.6) と BG 不等式 (2) の単純に重み付きの平均を取って

$$|\langle n_a n_b' \rangle + \langle n_a n_d' \rangle + \langle n_c n_b' \rangle - \langle n_c n_d' \rangle| \le (1-b) \times \frac{2\alpha^2}{9} + b \times 2.$$

$Q_{\max}$ で書くと

$$Q_{\max} \le CL \tag{5.3.6}$$

$$CL = (1-b) \times 1 + b \times \frac{9}{\alpha^2} \tag{5.3.7}$$

$$= 1 + b\left(\frac{9}{\alpha^2} - 1\right) \tag{5.3.8}$$

$Q_{\max}$ の Quantum limit が高々$\sqrt{2}$ であったことを考えると, BG が混入することによって不等式が著しく破り辛くなるがわかる．$\alpha_\Lambda = 0.642 \pm 0.013$, $\alpha_\tau = 0.998 \pm 0.005$ より, Λ チャネルでは BG rate を $b \le 1.7\%$, τ チャネルでは $b \le 5.2\%$ に抑えないとこの不等式は QM でも破れなくなることがわかる．

ところで, BG rate b はどう見積もればよいだろうか．通常の高エネルギー実験では SM に基づいた MC simulation を使って推定するが, LHVT をテストする今回の実験では QM を論拠を置いている処理はなるべく慎むべきである．しかし古典モデルに普遍的な性質と実験事実のみを使って BG level を推定するのは, 可能かどうかも含めて全く明らかではないのも実情である．結局近似だとしても何か BG のモデルを仮定する必要がある．これが解析の段階で生じる新たな loophole である．しかし BG のモデルとして何を採用するか, それが妥当かどうかを評価するのは簡単なことではない．フォトンの実験でも主なバックグラウンドはダークカレントと仮定し, 較正時に測定した値を使用してはいるが, 今回のケースはそれよりはるかに自明ではない強い仮定をおくことになる．

現実的には BG として 1. で想定したような, 方向にほとんど相関のないものを仮定するほかないと思われる．実際に (2) の不等式で最大値 2 を与えるケースはかなり大変なものである．（例: π^- が 100%$\boldsymbol{a}$ の方向, $\boldsymbol{n}$ が 100%$\boldsymbol{b}$ に飛ぶような分布）我々は 2. で譲歩しすぎであり, 実際に BG が従う角度分布はこれよりはるかに小さいことは, これまでの素粒子実験の歴史を通じての常識として要請するのは荒唐無稽なことではない．さらに $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ は実験室系ではなく Λ, τ の静止系から見た方向ベクトルであり, 正しいチャネルの $\pi\pi$ 候補を取ってこない限りそれぞれ誤った boost back を受けるため $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ 相関が残ることはとても考えづらい．よって loophole は生じるが, 我々はここで「BG は π, π の方向の相関を enhance しない」というもっともらしい仮定をおくことにする．
これによって再び古典上限が 1 の不等式 (3.2.6) が使用できることになり, BG の影響は 1. のみ考えればよい．

5.4　検出器分解能による影響

最後に検出器の分解能がもたらす効果を考察する．我々はここまで $\pi\pi$ の方向 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n}'$ について理想的な測定を仮定して議論を進めてきたが, 有限の測定精度が相関 $\langle n_i n_j' \rangle$, $Q_{\max}$ の推定に与える影響はどうだろうか．
結果から述べるとこの効果はほとんど影響はない．なぜなら 5.1.1 で考察したように $n_i n_j'$ は元々非常に広い分布を持っているため, $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ がよほどとんでもない測定精度でない限り分布がこれ以上 smear されることはな

いからである．図 5.21 は $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi p\pi$ における $n_z n'_z$ の分布であるが, 理想測定の場合の曲線（赤）と測定精度を考慮した曲線（青）の差は $\delta n_z \leq 0.1$ まではほとんど相違が見られない．一方で荷電粒子の実験室系での運動量と運動方向の精度はそれぞれ $\sigma_{pT}/p_T \sim 1\%$, $\sigma_\theta, \sigma_\phi \sim 10^{-3}$(rad) のオーダーであり，このような大きさの測定誤差が生じることは考えにくい．

図 5.22 はある統計量を仮定したときの各チャネルの測定精度に対する $Q_{\max}$ の測定値を表したものである．点が $Q_{\max}$ の分布の平均値, エラーバーはその誤差ではなく $Q_{\max}$ の RMS である．$\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n'}$ の測定精度が与える影響は $Q_{\max}$ の統計のふらつきに比べて微々たるものである．

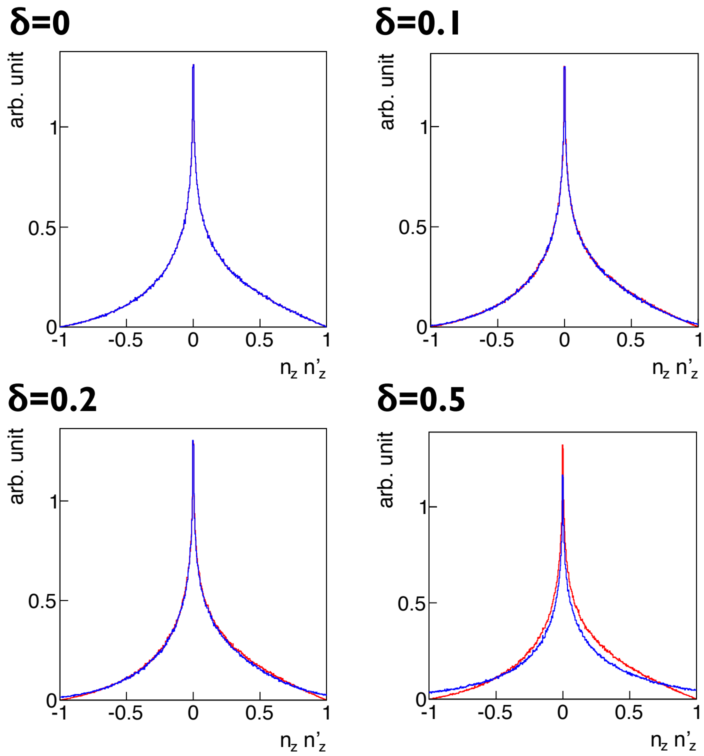

図 5.21: MC シミュレーションで求めた $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$ における $n_z n'_z$ の分布．赤線は測定誤差がない場合, 青線は各イベント n_z, n'_z の値を, 分散 $\delta = 0, 0, 1, 0.2, 0, 5$ のガウス分布で smear したものである．$\delta = 0.1$ までは全く変化がない．他のチャネルでも同様である．

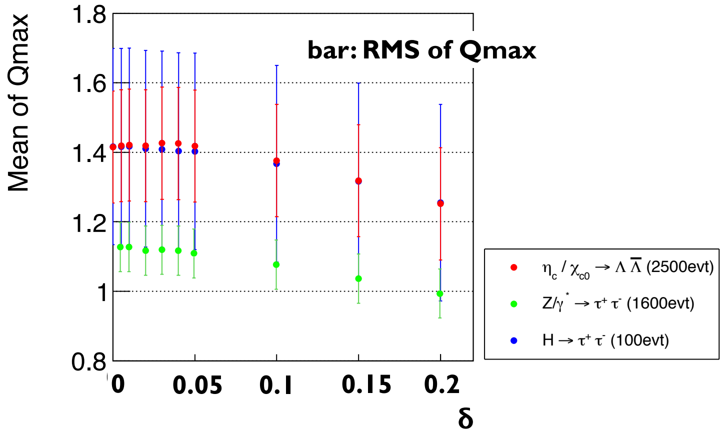

図 5.22: $n_i n'_j$ $(i, j = x, y, z)$ を一様に分散 δ のガウス分布で smear した場合の $Q_{\rm max}$ の分布の変化. 点は分布の平均, バーは RMS を表している. δ は 0.1 以下と現在見積もっており, 問題としている統計量の範囲では統計誤差に比べて, 測定の系統誤差 δ による影響は無視できる.

第6章　結論

高エネルギーコライダー実験は, そこで生成される不安定粒子がエンタングル状態のソースとなること, その崩壊の様子からスピンの情報を取得できること, 様々な粒子・相互作用を含んだ系が実現されることから, ベル不等式の破れの検証のプラットフォームとしての役割が期待されている. 特に粒子のスピンのエンタングルメントを用いた測定は 1970 年代より提唱されているもののまだ決定的な結果は出ていない. 本論文ではこれらを踏まえた上で, (i) もう一度理論的背景を見直し, (ii) この方法に適した新たなベル不等式の定式化を行い, (iii) また現在および将来のコライダー実験におけるベル不等式の破れの検証可能性と感度を見積もった.

議論の対象としたチャネルは以下の 5 つである:

- $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$
- $Z/\gamma^* \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu\pi^+\bar{\nu}$
- $H \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu_\tau\pi^+\bar{\nu}.$

これに対してベル不等式は, 3 章で定義される $\pi^+\pi^-$ の運動量相関行列の固有値 $\lambda_{1,2}$ を用いて:

$$Q_{\max} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2}$$
$$Q_{\max} \le 1$$

と書くことができ, この $Q_{\max}$ は量子力学では

$$Q_{\max} = \begin{cases} \sqrt{2} & (\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+, H \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu_\tau\pi^+\bar{\nu}) \\ 0.976 \pm 0.048 & (J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+) \\ \sqrt{5}/2 & (Z \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu_\tau\pi^+\bar{\nu}) \\ \sqrt{5}/2 & (ee \to \tau^+\tau^- \to \pi^-\nu_\tau\pi^+\bar{\nu}) \end{cases}$$

となることが予言される.

$J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ では推定値に不定性があるため破れの有無は定かではないが, **それ以外のチャネルでベル不等式は破れ潜在的に実験で検証が可能である**こと, また既存のコライダー実験の現状を分析した結果 $\eta_c, \chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda} \to p\pi^-\bar{p}\pi^+$ **の 2 つのチャネルでは既存のデータを用いてそれぞれ** $2\sigma, 3\sigma$ **の有意度でベル不等式の破れが確認が可能であることを示した.**

Maybe knowledge is as fundamental, or even more fundamental than reality.

Anton Zeillinger

謝辞

私と指導教員である駒宮幸男先生 (図 6.1) との出会いは学部 3 年の頃のメスバウアー実験に遡る。学生実験のガイダンスで無難に自分の研究室が担当する実験の紹介をこなしていく教授たちの中にあってファンキーさは際立っており (”この実験に特に意味はない．根性をつけるために存在している．”)、理研のデータ解析とかに意識の高い連中が息巻く中、 同期の湯本郷 (図 6.3) と半信半疑で志願した。雑魚であった自分の中に何かを見たのか大変高く評価してくださった。手書きのモジャモジャなレポートをブチまけた湯本とのクオリティの差は歴然であった。

後で大したことないのがバレて落胆させるのも何だかなあという気持ちもあったので、その後はモリモリと勉強に打ち込むことができた。院試前の 1ヶ月は今までの人生で最も集中できた期間だった。毎日 15 時間くらい何かしらの計算をし（大抵はくだらないものであったが）中断した計算結果への期待で夜興奮のあまり寝付けなくなるみたいな一丁前に仕上がった状態で臨んだ結果院試は轟沈した。筆記もひどかったし、謎な受け答えを繰り返した面接は狂乱と慷慨憤激の沙汰となり、チャックも開いていた。また工学部の院試では全員スーツの中ネクタイプリント T シャツで臨んで不本意ながらコミュニティーを愚弄する格好となった。その後も合格発表までの間に色々なことが起き何が何やら前後不覚な状態で私は駒宮研の門を叩いた。そういったものがあって M1 の後期にメスバウアー実験の TA になったときは思う所は色々あった。後輩たちにも師匠と素敵な出会いをしてほしいものである。

助教の神谷さんは同じ高校から出ているだけあって風紀よりファンキーさ優先する波長の合う先輩であり、素晴しい指導者であった。M1 の最初に ALPS 落ちてガン萎えするあまり功利心のはやったしょうもない研究に手を出そうとした際に止められたおかげで、その後腰を据えて自分の大事だと思う問題に取り組んで充実した修士生活を送ることとなった。ダニエルはケンブリッジ出身の極めてナイスなガイである。カロリメーターはただ突っ込んできた粒子のエネルギーを測るだけのものではなく、人々に夢と感動を与えてくれる物体だと説いてくれた。また英語に関しては常に最高の手本であり、あまり自由に操れない状態で sh*t と f*ck とか言ってもスベるということを、自分を見つめる穏やかな目線を通じて教えてくれた。第 2 分室の河野さん、葭本さん、田中さんは、謎の日程の出張が連発したにも関わらず快く処理していただいて、大変お世話になった。速やかに振り込まれた出張の立替返金は、毎月カード破産の危機に晒されていた著者の脆弱な生活基盤をエンパワーするものであった。

また執筆が詰んで萎えたときに常に Youtube 越しに著者に joy を与えてくれたサッカープレイヤーのリオネル・メッシ（バルセロナ FC)、クリスティアーノ・ロナウド (レアル・マドリード) 両氏、170km/h という気違いじみた球速を連発し Youtube 越しに筆者にインスピレーションを与え続けたメジャーリーガーのアロルディス・チャップマン氏（シンシナティ・レッズ）にも格別な感謝の意を表したい。あなた方の活躍は人間は限界を打ち破れるということを教えてくれ、マクロなタマでも頑張れば二重スリットで干渉させられるのではという投機的な疑惑を持たせるものがあった。

図 6.1: ダルマを持つボス

図 6.2: 私

図 6.3: 湯本郷

参考文献

[1] J. von Neumann, "Mathematical foundations of quantum mechanics", Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. , (1955).

[2] M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgange." Zeitschrift fur Physik. **38**, 803-827 (1926).

[3] H. Everett, "Theory of the Universal Wave function", Thesis, Princeton University, (1956, 1973); H. Everett, "Relative State Formulation of Quantum Mechanics". Reviews of Modern Physics **29**, 454 (1957).

[4] O. Stern, W. Gerlach, "Das magnetische Moment des Silberatoms". Zeitschrift für Physik **9**: 353 (1922).

[5] J. J. Sakurai, 『現代の量子力学 (上)』, pp.3, 吉岡書店 (1989).

[6] http://www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/SternGerlach/Images/ChargeSpinDown.jpg.

[7] Bernard D'Espanga, "Conceptual Foundations of Quantum Mechanics" 2nd edn., Reading, Mass. Benjamin (1976).

[8] Colin Blues, 『量子力学の解釈問題』, 和田純夫 訳, 講談社 (2008).

[9] Michael Redhead, "Incompleteness, Nonlocality, and Realism: A Prolegomenon to the Philosophy of Quantum Mechanics", Clarendon Press (1989). [レッドヘッド『不完全性・局所性・実在主義-量子力学の哲学序説』 石垣壽郎訳, みすず書房, (1997)].

[10] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", Phys. Rev. **47**, 777 (1935).

[11] D. Bohm,"A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. I", Phys. Rev. **85**, 166 (1952); "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. II", Phys. Rev. **85**, 180 (1952).

[12] J. S. Bell, "On The Einstein Podolsky Rosen Paradox", Physics **1**, 195 (1964).

[13] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories", Phys. Rev. Lett. **23**, 880 (1969).

[14] (Picture of the earth): http://www.mt-planning.com/img2/eorc03.jpg, JAXA.

[15] 清水明『現代の量子力学の基礎』, サイエンス社 (2003).

[16] Y. B. Ding, J. Li, and C.F. Qiao, "Bell Inequalities in High Energy Physics", High Ener. Phys. & Nucl. Phys. **31**, 1086 (2007), arXiv:0702271.

[17] 筒井泉, 「量子力学の基礎問題と近年の話題」http://kincha.kek.jp/kincha020_tsutsui.pdf, 金茶会, KEK (2008).

[18] J. F. Clauser, M.A. Horne, "Experimental consequences of objective local theories", Phys. Rev. D **10**, 526 (1974).

[19] S. J. Freedman and J. F. Clauser, "Experimental Test of Local Hidden-Variable Theories", Phys. Rev. Lett. **28**, 938 (1972).

[20] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem", Phys. Rev. Lett. **47** 460 (1981).

[21] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm *Gedankenexperiment*: A New Violation of Bell's Inequalities", Phys. Rev. Lett. **49**, 91 (1982).

[22] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers", Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).

[23] Y. H. Shih and C. O. Alley, "New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion", Phys. Rev. Lett. **61**, 2921 (1988).

[24] A. Aspect "Bell's Theorem: The Naive View of an Experimentalist ", from R. A. Bertlmann and A. Zeilinger (eds.) "Quantum (Un)speakables - From Bell to Quantum information", Springer (2002) arXiv:0402001.

[25] P. M. Pearle, "Hidden-Variable Example Based upon Data Rejection", Phys. Rev. D **2**, 1418 (1970).

[26] E. Santos, "Critical analysis of the empirical tests of local hidden-variable theories", Phys. Rev. A **46**, 3646 (1992); "Unreliability of performed tests of Bell ’ s inequality using parametric down-converted photons", Phys. Lett. A **212**, 10 (1996); "The Failure to Perform a Loophole-Free Test of Bell ’ s Inequality Supports Local Realism", Found. of Phys., **34**, 1643 (2004).

[27] "Background level and counter efllciencies required for a loophole-free Einstein-Podolsky-Rosen experiment", P. H. Eberhard, Phys. Rev. A **47**, 747 (1993).

[28] M. Giustina *et al.*, "Bell violation with entangled photons, free of the fair-sampling assumption", Nature, **497**, 227 (2013).

[29] M. A. Rowe *et al.*, "Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection", Nature (London) **409**, 791 (2001).

[30] G. Weihs *et al.*, "Violation of Bell ’ s Inequality under Strict Einstein Locality Conditions", Phys. Rev. Lett. **81**, 5039 (1998).

[31] W. Tittel *et al.*, "Violation of Bell Inequalities by Photons More Than 10 km Apart", Phys. Rev. Lett. **81**, 3563 (1998).

[32] R. Ursin, *et al.*, "Entanglement-based quantum communication over 144km", Nature Physics **3**, 481 (2007).

[33] J. Conway and S. Kochen, "The Free Will Theorem", Found. of Phys, **36**, 10 (2006).

[34] M.M. Lamehi-Rachti and W. Mittig, "Quantum mechanics and hidden variables: A test of Bell's inequality by the measurement of the spin correlation in low-energy proton-proton scattering", Phys. Rev. D **14**, 2543 (1976).

[35] H. Sakai *et al.*, "Spin Correlations of Strongly Interacting Massive Fermion Pairs as a Test of Bell ' s Inequality", Phys. Rev. Lett. **97**, 150405 (2006).

[36] A. Apostolakis *et al.* (CPLEAR Collaboration), "An EPR experiment testing the non-separability of the $K^0\overline{K}^0$ wave function", Phys. Lett. B **422**, 339 (1998)

[37] A. Go, "Observation of Bell inequality violation in B mesons", Journal of Modern Optics **51**, 991 (2004);

[38] A. GO *et al.* (Belle Collaboration), "Measurement of Einstein-Podolsky-Rosen-Type Flavor Entanglement in $\Upsilon(4S) \to B^0\overline{B}^0$ Decays", Phys. Rev. Lett. **99**, 131802 (2007).

[39] R.A. Bertlmann, A. Bramon, G. Garbarino, B.C. Hiesmayr, "Violation of a Bell inequality in particle physics experimentally verified?", Phys. Lett. A **332**, 355 (2004).

[40] T. Ichikawa, S. Tamura, and I. Tsutsui, "Testing EPR locality using B-mesons", Phys. Lett. A **373**, 39 (2008).

[41] A. Pompili and F. Selleri, "On a possible EPR experiment with $B_d^0\overline{B}_d^0$ pairs", Eur. Phys. J. C **14**, 469 (2000).

[42] S. Kochen and E.P. Specker, "The problem of hidden variables in quantum mechanics", Journal of Mathematics and Mechanics **17**, 59 (1967).

[43] A. J. Leggett, "Nonlocal Hidden-Variable Theories and Quantum Mechanics: An Incompatibility Theorem", Found. of Phys., **33**, 1469 (2003).

[44] S. Gröblacher *et al.*, "An experimental test of non-local realism", Nature **446**, 871 (2007)

[45] Bohm and Y. Aharonov, "Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky", Phys. Rev. 108 1070 (1957).

[46] N. A. Törnqvist, "Suggestion for Einstein-Podolsky-Rosen Experiments Using Reactions Like $e^+e^- \to \Lambda\overline{\Lambda} \to \pi^- p\pi^+\bar{p}$ ", Found. Phys. **11**, 171 (1981).

[47] 山本祐靖『高エネルギー物理学』, 培風館 (1973).

[48] J. Beringer *et al.* (Particle Data Group), Phys. Rev. D **86**, 010001 (2012).

[49] A. Stahl "Physcis with Tau Lepton", Springer (2000).

[50] ATLAS Collaboration, "Evidence for Higgs Boson Decays to the $\tau^+\tau^-$ Final State with the ATLAS Detector", ATLAS-CONF-2013-108. https://cds.cern.ch/record/1632191; CMS Collaboration, Search for the Standard-Model Higgs boson decaying to tau pairs in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV, CMS-PAS-HIG-13-004. https://cds.cern.ch/record/1528271.

[51] BESlll Experiment: http://bes3.ihep.ac.cn

[52] CLEO Experiment: http://w4.lns.cornell.edu/public/CLEO

[53] H. Baer *et al.* (eds.), "The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 2: Physics", arXiv: 1306.6352.

[54] LEP Experiment: http://cern.web.cern.ch/CERN/Divisions/SL/lep2page.html

[55] Belle Wxperiment: http://belle.kek.jp

[56] N. A. Törnqvist, "The Decay $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda} \to \pi^- p\pi^+\bar{p}$ as an Einstein-Podolsky-Rosen Experiment", Phys. Lett. A **117**, 1 (1986).

[57] M. H. Tixier *et al.* (DM2 Collaboration), "Looking at CP invariance and quantum mechanics in $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$ decay",Phys. Lett, B **212** 523 (1988).

[58] X. Q. Hao *et al.*, "Testing the Bell Inequality at Experiments of High Energy Physics", Chin. Phys. C **34**, 311 (2010).

[59] S. P. Baranov, "Bell's inequality in charmonium decays $\eta_c \to \Lambda\overline{\Lambda}$, $\chi_{c0} \to \Lambda\overline{\Lambda}$ and $J/\psi \to \Lambda\overline{\Lambda}$", J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **35** 075002 (2008).

[60] J. Li and C. F. Qiao, "Testing Local Realism in $P \to VV$ Decays", Sci. China G **53**, 870 (2010).

[61] X. Chen, S. G. Wang, and Y. Mao, "Understanding polarization correlation of entangled vector meson pairs", Phys. Rev. D **86**, 056003 (2012).

[62] A. J. Weinstein, "CLEO Results on Tau Michel Parameters", Nucl. Phys. Proc. Suppl. **76**, 165 (1999).

[63] P. Privitera, "Decay correlations in $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ as a test of quantum mechanics", Phys. Lett. B **275** 172 (1992).

[64] S. A. Abel, M. Dittmar, and H. Dreiner, "Testing locality at colliders via Bell's inequality?", Phys. Lett. B **280**, 304 (1992).

[65] H. Dreiner, "Bell's Inequality and τ-Physics at LEP", arXiv: 9211203.

[66] G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, "The intrinsic parity of elementary particles," Phys. Rev. **88**, 101 (1952).

[67] M. Peskin and D. Schröder, "An introduction to Quantum Filed Theory", pp.46 (1995).

[68] J. W. Cronin and O. E. Overseth, "Measurement of the Decay Parameters of the Λ^0 Particle", Phys. Rev. **129**, 1795 (1963).

[69] O. E. Overseth and R. F. Roth, "Time Reversal Invariance in Λ^0 Decays", Phys. Rev. Lett. **19**, 391 (1967).

[70] A. Afriat and F. Selleri, "The Einstein Podolsky and Rosen Paradox in atomic nuclear and particle physics", Plenum Press, New York, (1999).

[71] T. Behnke *et al.* (eds.), "The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 1: Exclusive summary", arXiv: 1306.6327.

[72] S. Chen, Y. Nakaguchi and S. Komamiya, "Testing Bell's Inequality using Charmonium Decays", Prog. Theor. Exp. Phys. 063A01 (2013).

[73] M. B. Voloshin, "Charmonium", pp. 14-21 "Charmonium Annihilation" (2008), arXiv: 0711.4556v3.

[74] M. Peskin and D. Schröder, "An introduction to Quantum Filed Theory", pp.68, equation (3.134) (1995).

[75] A.Peres, "Separability Criterion for Density Matrices", Phys. Rev. Lett. **77** 1413 (1996); M.Horodecki, P.Horodecki, R.Horodecki, "Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions", Phys. Lett. A 223 1 (1996).

[76] M. Ablikim *et al.* (BES Collaboration), "Study of the J/ψ decays to $\Lambda\overline{\Lambda}$ and $\Sigma^0\overline{\Sigma}^0$", Phys. Lett. B **632**, 181 (2006).

[77] A. Djouadi *et al.*, "The couplings of the Higgs boson and its CP properties from fits of the signal strengths and their ratios at the $7+8$ TeV LHC" (2013), arXiv: 1303.6591.

[78] S. Kawada *et al.*, "Evaluation of measurement accuracy of $h \to \tau^+\tau^-$branching ratio at the ILC with $\sqrt{s} = 250$GeV and 500GeV", arXiv:1308.5489.

[79] J. B. Liu *et al.* "A beam test of a prototype of the BES III drift chamber in magnetic field", Nucl. Instrum. Meth. A, **557**, 436 (2006); L. K. Jia *et al.*, "Study of low momentum track reconstruction for the BESIII main drift chamber", Chin. Phys. C **34**, 1866 (2010).

[80] M. Ablikim *et al.* (BES Collaboration), "Measurements of baryon pair decays of χ_{cJ} mesons", Phys. rev. D **87**, 032007 (2013).

[81] J. Drees, "Review of Final LEP Results or A Tribute to LEP" (2001), arXiv: 0110077.

[82] E. Etzion , "Analysis of the Tau Polarization and its Forward-Backward Asymmetry on the Z^0" (PhD. thesis), Tel Aviv University (1996), arXiv: 9606011.

[83] T. Benke *et al.* (eds.), "The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 4: Detectors", arXiv: 1306.6329.

[84] M. A. Thomson, "Particle Flow Calorimetry and the PandoraPFA Algorithm", Nucl. Instrum. Meth. A, **611**, 25 (2009).

[85] H. Baer *et al.* (eds.), "The International Linear Collider Technical Design Report - Volume 2: Physics", arXiv: 1306.6352.