QCD for Collider Physics IX

2005. 7. 25

Errata

ずい分と沢山の誤りを訂正しなければなりませんので、まず、誤りのリストを作ります。

① (626)式の計算結果の符号が逆だったので、原因を調べたところ、遠因は、私が20年前に、$-z$軸(z軸と反対)の向きのベクトルを極座標で$(\theta, \phi) = (\pi, 0)$ととったことに帰着することに気がつきました。$(\theta, \phi) = (\pi, \pi)$ととっておけばこのエラーは避けられたはずなので、HELASコードを含め、変更しようと思います。

② $gg \to gg$ の振幅 (507), (508b) と断面積 (510)、(511), (583d), (584c) に多くの誤りがありました。(507)での「書き移しミス」が伝播したものです。

③ $gg \to q\bar{q}$ と $q\bar{q} \to gg$ のカラー因子の計算 (p.116の最後の式, p.130 (376)) で $\frac{1}{2}$ の誤りがあり、断面積 (380)、(585b), (585c) を $\frac{1}{2}$倍します。

④ $qq \to qq$ の干渉項の符号 (409), (410), (412), (488), (583b), (583c), (584b) は逆であり、$uu \to uu$ 散乱の high p_T 分布は干渉により20%程度小さくなります。これは、u-channel交換の振幅(409)の符号が誤っていたためで、私が計算をせずに「直観」で答えを書いてしまったことによる誤りでした。何故「直観」が間違っていたかは興味深い問題なので、検討してみます。

以上、③と④の誤りは馬渡健太郎さんが指摘してくれました。感謝します。私の講義は正しい結果を伝えることが目的ではなく（なるべくそうしようとは努めていますけれど）、QCDの方法、技術、考え方などを説明しようと思っています。私の誤りから学べることの方がより大切だと思いますので、一つ一つ説明をします。上記②、③、④のエラーを修正した結果、全ての2→2過程断面積が既知の結果

(627) R. Cutler, D. Sivers, PRD17, 196 (1978);
B. L. Combridge, J. Kripfganz, J. Ranft, PL70B, 234 (1977);
J. F. Owens, E. Reya, M. Glück, PRD18, 1501 (1978)

と一致しましたので、④の解説の後で、まとめの式 (583)-(585) を再掲します。//

さて、①の符号（位相）の問題の原因は、出発点として使った (602)式が z軸の正の向きの e^- と負の向きの e^+ の衝突カレントであり、z軸の負の向きのスピノールを $(\theta,\phi)=(\pi,0)$ ととったためでした。$(\theta,\phi)=(\pi,\pi)$ ととっておけば

(628) $$J^{\mu}_{\lambda,-\lambda} \equiv \bar{v}(k,-\lambda)\gamma^{\mu}u(p,\lambda) \qquad \text{p. 86 (231)}$$

$$= -\sqrt{s}\,\chi^{+}_{\lambda}(\mathbb{k})\sigma^{\mu}_{\lambda}\chi_{\lambda}(\mathbb{P}) \qquad \text{p. 86 (233)}$$

$$= \sqrt{s}\,(0,1,\lambda i,0) \qquad \text{p. 87 (236)} \times (-1)$$

となり、一般の light-cone gauge の表式 (603)、(606) は

(629) $$\epsilon^\mu(p,\lambda;n=k) = \frac{1}{2\sqrt{p\cdot k}}\bar{v}(k,-\lambda)\gamma^\mu u(p,\lambda) = -\frac{\sqrt{|\mathbb{P}||\mathbb{K}|}}{\sqrt{p\cdot k}}\chi_\lambda^\dagger(\mathbb{K})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{P})$$

となります。結果、HELAS ベクトル (625) は

(630) $$\epsilon^\mu(p,\lambda)_{HELAS} = -\lambda\,\epsilon^\mu(p,\lambda;n=\tilde{p}) = \lambda\frac{1}{\sqrt{2}}\chi_\lambda^\dagger(-\mathbb{P})\sigma_\lambda^\mu\chi_\lambda(\mathbb{P})$$

$$p^\mu = (|\mathbb{P}|,\ \mathbb{P})$$
$$\tilde{p}^\mu = (|\mathbb{P}|,\ -\mathbb{P})$$

となって符号の不一致は消滅します。実際、

(631) $$\begin{aligned}\epsilon^\mu(p,\lambda)_{HELAS} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -\lambda\cos\theta\cos\phi+i\sin\phi,\ -\lambda\cos\theta\sin\phi-i\cos\phi,\ \lambda\sin\theta)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{-\lambda(0,\cos\theta\cos\phi,\cos\theta\sin\phi,-\sin\theta)\\ &\qquad -i(0,\ -\sin\phi,\ \cos\phi,\ 0)\Big\}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -\lambda,\ -i,\ 0) \quad \cdots (\theta,\phi)=(0,0)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -\lambda,\ i,\ 0) \quad \cdots (\theta,\phi)=(\pi,\pi)\end{aligned}$$

スピノールについては、p.65 の (142)、(145) をもとにして

(632) $$\begin{cases}\chi_+(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix} \begin{cases} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi)=(0,0)\\ = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi)=(\pi,\pi)\end{cases}\\[2ex] \chi_-(\mathbb{P}) = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \begin{cases} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi)=(0,0)\\ = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \cdots (\theta,\phi)=(\pi,\pi)\end{cases}\end{cases}$$

//

2005. 7. 25

次に②の $gg\to gg$ のエラーは、p. 167 (507) で $(1/k_2\cdot k_4)$ を $(1/k_1\cdot k_4)$ と書き移しまちがってしまったことに起因します。ちょっとでも気をつければ気がつくはずのエラーです。結果、(507) の第三式では $\frac{1}{1+\cos\theta}\to\frac{1}{1-\cos\theta}$ と直し、第四式と (508b) 式は、全く違ってしまいます。ここで (508) 全体を書き直します。

$$(633a)\quad \hat{M}^{I\ \lambda_2}_{\lambda\lambda_2} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda\lambda_2}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}+\frac{2}{1+\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}\right]\right\}$$

$$(633b)\quad \hat{M}^{II\ \lambda_2}_{\lambda\lambda_2} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda\lambda_2}\left[-\frac{2}{1-\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[-\frac{2}{1-\cos\theta}+1\right]\right\}$$

$$(633c)\quad \hat{M}^{II\ -\lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = \hat{M}^{I\ -\lambda_2}_{\lambda\ \lambda_2} = 0$$

従って (510) と (511) は次の様になり、(583d) は $(634)''$ に (584c) は $(634)''''$ に変更。

$$(634)\quad \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\left\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\left[\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{5+c}{8}\right] + \left(-\frac{T_F^2}{N^2}\right)\left[-\frac{4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$(634)'\quad = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\left\{\frac{2}{9}\left[\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{5+c}{8}\right]+\left(-\frac{1}{36}\right)\left[-\frac{4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right]\right\}$$

$$(634)''\quad = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{1-c}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+c}+\frac{11+2c}{16}\right]$$

$$(634)'''\quad \xrightarrow{c\to 1}\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{1-c}+\frac{17}{16}\right]$$

$$(634)''''\quad \xrightarrow{c\to 0}\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left[\frac{55}{16}\right]$$

//

③のエラー（$gg \to q\bar{q}$, $q\bar{q} \to gg$ のカラー因子）も単に $\frac{1}{2}$ の書き忘れでした。

p.116の最後の式で、下から2行目の $|A|^2$ と $|B|^2$ の係数がそれぞれ $\frac{1}{2}$ 倍で、最後の式と p.132 (380) は次の通りです。

$$(635)\quad \sum_{color}\sum_{spin}|M_{ij}^{ab}(\lambda_k)|^2 = \frac{7}{3}\sum_{\lambda_k}|\hat{A}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2 + 3\sum_{\lambda_k}|\hat{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2$$

$$+8\sum_{\lambda_k}\mathrm{Re}\left[(\hat{L}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4})(\hat{M}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4})^*\right] + 24\sum_{\lambda_k}|\hat{L}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}|^2$$

その結果、(585b) と (585c) は $\frac{1}{2}$ 倍となり、更に、$25+c^2$ は $25+9c^2$ の誤りです。正しい表式は、次のエラーの解析の後で整理します。//

④のエラー（$qq \to qq$ の干渉項の符号）は、p.139 (409) で、カレントを実際に計算せずに、(409) 式を書き下してしまったことが原因でした。

カレントを計算すると、

$$(636a)\quad J_\lambda^\mu(k_1,k_4) = 2E\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\cos\frac{\theta}{2},\ -\lambda i\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$(636b)\quad J_{\lambda'}^\mu(k_1,k_3) = 2E\left(\sin\frac{\theta}{2},\ \cos\frac{\theta}{2},\ -\lambda' i\cos\frac{\theta}{2},\ -\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

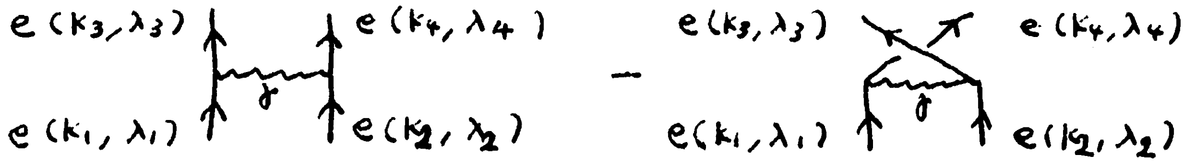
となり、(409) の符号が逆転します。

$$(637)\quad \hat{M}_{\lambda\lambda'}^{(u)} \equiv \frac{g^2}{u}J_\lambda(k_1,k_4)\cdot J_{\lambda'}(k_2,k_3) = g^2\left(\frac{s}{u}\right)\times\begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4 \\ 1-\cos\theta & \cdots\ \lambda_1=-\lambda_2=\lambda_4=-\lambda_3 \end{cases}$$

この結果、(410)、(412)、(488)、(583b)、(583c)、(584b)の干渉項の符号が逆転します［(583b)では $\frac{1}{3}\to\frac{2}{3}$、(583c)では $\frac{2}{3}\to\frac{4}{3}$ です］。正しい表式は、少し後で他の2→2過程と一緒にリストします。

ここでは何故、私が(409)式の計算をせずに、誤った符号の式を書いてしまったか、という点について反省をしたいと思います。私の直観は、「同種フェルミオンの波動関数は反対称」⇒だから「干渉項は相殺」というものでした。どうして逆になってしまったのでしょうか？

電子・電子散乱の計算をていねいにやり直してみようと思います。

(638)


$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ の場合を考えます。4-momenta は

$$
\begin{aligned}
(639)\quad k_1^\mu &= E(1,\ 0,\ 0,\ \beta)\\
k_2^\mu &= E(1,\ 0,\ 0,\ -\beta)\\
k_3^\mu &= E(1,\ \beta\sin\theta\cos\phi,\ \beta\sin\theta\sin\phi,\ \beta\cos\theta)\\
k_4^\mu &= E(1,\ -\beta\sin\theta\cos\phi,\ -\beta\sin\theta\sin\phi,\ -\beta\cos\theta)
\end{aligned}
$$

ととり、非相対論的($\beta\to0$)及び相対論的($\beta\to1$)極限がとれるようにします。$(\theta,\phi)\leftrightarrow(\pi-\theta,\pi+\phi)$ の交換が明らかなように、ϕ を有限にとります。振幅は(394)と同様

(640) $$M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{e^2}{t}\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\bar{u}(k_4,\lambda_4)\gamma_\mu u(k_2,\lambda_2)$$
$$-\frac{e^2}{u}\bar{u}(k_4,\lambda_4)\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1)\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma_\mu u(k_2,\lambda_2)$$
$$\equiv \frac{e^2}{t} J^\mu_{31} J_{42\mu} - \frac{e^2}{u} J^\mu_{41} J_{32\mu}$$

となります。$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \underbrace{\lambda}_{=+1}$ のとき

(641) $$J^\mu_{31} = \bar{u}(k_3,+)\gamma^\mu u(k_1,+)$$
$$= E(1+\beta)\chi^\dagger_+(\mathbb{k}_3)\sigma^\mu_+\chi_+(\mathbb{k}_1) + E(1-\beta)\chi^\dagger_+(\mathbb{k}_3)\sigma^\mu_-\chi_+(\mathbb{k}_1)$$
$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[1, \beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$
$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, \beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}, i\beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}, \beta\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

(641)′ $$J^\mu_{42} = \bar{u}(k_4,+)\gamma^\mu u(k_2,+)$$
$$= E(1+\beta)\chi^\dagger_+(\mathbb{k}_4)\sigma^\mu_+\chi_+(\mathbb{k}_2) + E(1-\beta)\chi^\dagger_+(\mathbb{k}_4)\sigma^\mu_-\chi_+(\mathbb{k}_2)$$
$$= 2E\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[1, \beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$
$$= 2E\left(\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)\left[\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}i\\0\end{pmatrix}, \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}, -\beta\sin\frac{\theta}{2}, i\beta\sin\frac{\theta}{2}, -\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)$$

(641)″ $$J_{31}\cdot J_{42} = 4E^2 e^{-i\phi}\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$$
$$= 4E^2 e^{-i\phi}\begin{cases}\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\\[2ex] 2 - (1-\beta^2)\left(1+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\end{cases}$$

(642) $J^\mu_{41} = \bar{u}(k_4,+)\gamma^\mu u(k_1,+)$

$$= 2E^{(\sin\frac{\theta}{2},\, -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}\left[\binom{1}{0},\ \beta\binom{0}{1},\ \beta\binom{0}{i},\ \beta\binom{1}{0}\right]$$

$$= 2E\left(\sin\frac{\theta}{2},\ -\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ -i\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ \beta\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

(642)$'$ $J^\mu_{32} = \bar{u}(k_3,+)\gamma^\mu u(k_2,+)$

$$= 2E^{(\cos\frac{\theta}{2},\, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}\left[\binom{0}{-1},\ \beta\binom{-1}{0},\ \beta\binom{i}{0},\ \beta\binom{0}{1}\right]$$

$$= 2E\left(-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi},\ -\beta\cos\frac{\theta}{2},\ +i\beta\cos\frac{\theta}{2},\ \beta\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\right)$$

(642)$''$ $J_{41}\cdot J_{32} = 4E^2e^{-i\phi}\left(-\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2} - \beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$

$$= 4E^2e^{-i\phi}\begin{cases} -\sin^2\frac{\theta}{2} - \beta^2(1+\cos^2\frac{\theta}{2}) \\ -2 + (1-\beta^2)(1+\cos^2\frac{\theta}{2}) \end{cases}$$

高エネルギー極限（$\beta\to1$）は既知なので、上の方の表式を用いて、

(643) $$M^{++}_{++} = e^2 s\left\{\frac{\cos^2\frac{\theta}{2} + \beta^2(1+\sin^2\frac{\theta}{2})}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2} + \beta^2(1+\cos^2\frac{\theta}{2})}{u}\right\}e^{-i\phi}$$

干渉項は正です。低エネルギーでは他のヘリシティー振幅も干渉するので計算します。

パリティー不変性を考慮すると、M^{++}_{++}、M^{+-}_{++}、M^{-+}_{++}、M^{--}_{++}、M^{++}_{+-}、M^{+-}_{+-}、M^{-+}_{+-}、M^{--}_{+-}で完全です。沢山ですが、独立なカレントはそれほどないので何とかなるでしょう。まずM^{+-}_{++}。

(644) $(J^\mu_{42})^-_+ = \bar{u}(k_4,-)\gamma^\mu u(k_2,+) = E\sqrt{1-\beta^2}\left\{\chi^\dagger_-(k_4)\sigma^\mu_+\chi_+(k_2) + \chi^\dagger_-(k_4)\sigma^\mu_-\chi_+(k_2)\right\}$

$$= 2m^{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\, \sin\frac{\theta}{2})}\left[1,\ \vec{0}\right]\binom{0}{-1}$$

$$= -2m\sin\frac{\theta}{2}(1,0,0,0)$$

(644)' $(J_{41})^-_+ = \bar{u}(k_4,-)\gamma^\mu u(k_1,+) = m\{\chi^\dagger_-(\mathbb{k}_4)[\sigma^\mu_+ + \sigma^\mu_-]\chi_+(\mathbb{k}_1)\}$

$$= 2m\,(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \sin\tfrac{\theta}{2})[1, \vec{0}]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2m\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1,0,0,0)$$

(644)'' $M^{+-}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^+_+(J_{42\mu})^-_+ - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^-_+(J_{32\mu})^+_+$

$$= 4Eme^2\left\{\frac{(\cos\frac{\theta}{2})(-\sin\frac{\theta}{2})}{t} - \frac{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}{u}\right\}$$

$$= 4Eme^2\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

次は M^{-+}_{++}.

(645) $(J^\mu_{31})^-_+ = \bar{u}(k_3,-)\gamma^\mu u(k_1,+) = m\{\chi^\dagger_-(\mathbb{k}_3)[\sigma^\mu_+ + \sigma^\mu_-]\chi_+(\mathbb{k}_1)\}$

$$= 2m\,(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2})[1, \vec{0}]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = -2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1,0,0,0)$$

(645)' $(J^\mu_{32})^-_+ = \bar{u}(k_3,-)\gamma^\mu u(k_2,+) = m\,\chi^\dagger_-(\mathbb{k}_3)[\sigma^\mu_+ + \sigma^\mu_-]\chi_+(\mathbb{k}_2)$

$$= 2m\,(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2})[1, \vec{0}]\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -2m\cos\tfrac{\theta}{2}(1,0,0,0)$$

(645)'' $M^{-+}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^-_+(J_{42\mu})^+_+ - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^+_+(J_{32\mu})^-_+$

$$= 4Eme^2\left\{\frac{1}{t}(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}) - \frac{1}{u}(\sin\tfrac{\theta}{2})(-\cos\tfrac{\theta}{2})\right\}$$

$$= 4Eme^2\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

快調ですね。次は M^{--}_{++} ですが、これは既に計算したカレントを使って

(646) $M^{--}_{++} = \frac{e^2}{t}(J^\mu_{31})^-_+(J_{42\mu})^-_+ - \frac{e^2}{u}(J^\mu_{41})^-_+(J_{32\mu})^-_+$

$$= 4m^2e^2\left\{\frac{1}{t}(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\sin\tfrac{\theta}{2}) - \frac{1}{u}(\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi})(-\cos\tfrac{\theta}{2})\right\}$$

$$= 4m^2e^2\,e^{i\phi}\left[\frac{1}{t}\sin^2\tfrac{\theta}{2} + \frac{1}{u}\cos^2\tfrac{\theta}{2}\right]$$

2005. 7. 25

そろそろ分かって来ましたが、最後までやりますね。次は $M^{+\pm}_{+-}$ なので、

(647) $$(J^{\mu}_{32})^{+}_{-} = \bar{u}(k_3,+)\gamma^{\mu}u(k_2,-) = m\,\chi^{\dagger}_{+}(k_3)[\sigma^{\mu}_{+}+\sigma^{\mu}_{-}]\chi_{-}(k_2)$$

$$= 2m^{(\cos\frac{\theta}{2},\,\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}[1,\vec{0}]\binom{1}{0} = 2m\cos\frac{\theta}{2}\,(1,0,0,0)$$

(647)′ $$(J^{\mu}_{42})^{+}_{-} = \bar{u}(k_4,+)\gamma^{\mu}u(k_2,-) = m\,\chi^{\dagger}_{+}(k_4)[\sigma^{\mu}_{+}+\sigma^{\mu}_{-}]\chi_{-}(k_2)$$

$$= 2m^{(\sin\frac{\theta}{2},\,-\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi})}[1,\vec{0}]\binom{1}{0} = 2m\sin\frac{\theta}{2}\,(1,0,0,0)$$

(647)″ $$M^{++}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{+}_{+}(J_{42\mu})^{+}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{+}_{+}(J_{32\mu})^{+}_{-}$$

$$= 4Eme^2\left\{\frac{1}{t}(\cos\frac{\theta}{2})(\sin\frac{\theta}{2}) - \frac{1}{u}(\sin\frac{\theta}{2})(\cos\frac{\theta}{2})\right\}$$

$$= 4Eme^2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)$$

(648) $$(J^{\mu}_{42})^{-}_{-} = \bar{u}(k_4,-)\gamma^{\mu}u(k_2,-)$$

$$= E\,\chi^{\dagger}_{-}(k_4)\left[(1+\beta)\sigma^{\mu}_{-} + (1-\beta)\sigma^{\mu}_{+}\right]\chi_{-}(k_2)$$

$$= 2E^{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\,\sin\frac{\theta}{2})}[1,-\beta\vec{\sigma}]\binom{1}{0}$$

$$= 2E^{(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\,\sin\frac{\theta}{2})}\left[\binom{1}{0},-\beta\binom{0}{1},-\beta\binom{0}{i},-\beta\binom{1}{0}\right]$$

$$= 2E\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi},\,-\beta\sin\frac{\theta}{2},\,-i\beta\sin\frac{\theta}{2},\,-\beta\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

(648)′ $$M^{+-}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{+}_{+}(J_{42\mu})^{-}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{-}_{+}(J_{32\mu})^{+}_{-}$$

$$= \frac{e^2}{t}\left[4E^2\left(\cos^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi} + \cancel{\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}} - \cancel{\beta^2\sin^2\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}} + \beta^2\cos^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\right]$$

$$-\frac{e^2}{u}\left[4m^2\left(\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

$$= \underbrace{4m^2}_{(e^2)}\cos^2\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{t} - \frac{1}{u}\right]$$

$$(649)\quad (J^{\mu}_{32})^{-}_{-} = \bar{u}(k_3,-)\gamma^{\mu} u(k_2,-)$$

$$= E\,\chi^{\dagger}_{-}(k_3)\left[(1+\beta)\sigma^{\mu}_{-} + (1-\beta)\sigma^{\mu}_{+}\right]\chi_{-}(k_2)$$

$$= 2E\,\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[1, -\beta\vec{\sigma}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2E\,\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\tfrac{\theta}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}?\\i\end{pmatrix}, -\beta\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E\left(-\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi},\ -\beta\cos\tfrac{\theta}{2},\ -i\beta\cos\tfrac{\theta}{2},\ +\beta\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$(649)'\quad M^{-+}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{+}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{+}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{-}$$

$$= \frac{e^2}{t}\left(-2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(2m\sin\tfrac{\theta}{2}\right) - \frac{e^2}{u}4E^2\left(-\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi} \cancel{-\beta^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}} \cancel{+\beta^2\cos^2\tfrac{\theta}{2}e^{-i\phi}} - \beta^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$= -4m^2e^2\frac{1}{t}\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi} + \frac{e^2}{u}4E^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}(1+\beta^2)$$

$$= 4m^2e^2\sin^2\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\left[-\frac{1}{t} + \frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{u}\right]$$

$$(650)\quad M^{--}_{+-} = \frac{e^2}{t}(J^{\mu}_{31})^{-}_{+}(J_{42\mu})^{-}_{-} - \frac{e^2}{u}(J^{\mu}_{41})^{-}_{+}(J_{32\mu})^{-}_{-}$$

$$= \frac{e^2}{t}\left(-2m\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(2E\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right) - \frac{e^2}{u}\left(2m\cos\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)\left(-2E\sin\tfrac{\theta}{2}e^{i\phi}\right)$$

$$= 4mE\,e^2\cos\tfrac{\theta}{2}\sin\tfrac{\theta}{2}e^{2i\phi}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)$$

さて 以上で ヘリシティー振幅の完全系が完成したので、何でも計算できます。

まずは 振幅の自乗のスピン和を求めてみましょう。$E=m\gamma$ として、

$$(651)\quad \sum_{\lambda_i}\left|M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 = 2\left\{|M^{++}_{++}|^2 + |M^{+-}_{++}|^2 + |M^{-+}_{++}|^2 + |M^{--}_{++}|^2 + |M^{++}_{+-}|^2 + |M^{+-}_{+-}|^2 + |M^{-+}_{+-}|^2 + |M^{--}_{+-}|^2\right\}$$

$$= 8m^4e^4\left\{\left[\gamma^2(1+3\beta^2)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) + c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + (\sin\theta\,\gamma)^2\left[\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2\times 4\right] + \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u} - c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2\right.$$

$$\left. + (1+c)^2\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{t} - \frac{1}{u}\right]^2 + (1-c)^2\left[\frac{\gamma^2(1+\beta^2)}{u} - \frac{1}{t}\right]^2 \right\}$$

まずは $\gamma \gg 1$ limit をとりましょう。この場合は γ^4 項だけが生き残るので

$$(652)\quad \sum_{\lambda_i} \left| M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \right|^2 \xrightarrow[\gamma \gg 1]{\beta \to 1} 8E^4e^4 \left\{ \left[4\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)\right]^2 + (1+c)^2\left(\frac{2}{t}\right)^2 + (1-c)^2\left(\frac{2}{u}\right)^2 \right\}$$

$$= 8e^4 \left[\left(\frac{s}{t}+\frac{s}{u}\right)^2 + \left(\frac{1+c}{2}\right)^2\left(\frac{s}{t}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{2}\right)^2\left(\frac{s}{u}\right)^2 \right]$$

$$= 8e^4 \left[\left(\frac{s}{t}+\frac{s}{u}\right)^2 + \left(\frac{u}{t}\right)^2 + \left(\frac{t}{u}\right)^2 \right]$$

$$= 2\left\{ \left|M^{++}_{++}\right|^2 + \left|M^{+-}_{+-}\right|^2 + \left|M^{-+}_{+-}\right|^2 \right\}$$

これが QED の結果で、M^{++}_{++} に t-channel と u-channel の2振幅が効くけれど、干渉項は正であるわけです。今度は逆に $\gamma \to 1, \beta \to 0$ 極限をとります。

$$(653)\quad \sum_{\lambda_i} \left| M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \right|^2 \xrightarrow[\gamma \to 1]{\beta \to 0} 8m^4e^4 \left\{ \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u}+c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + 4(1-c^2)\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{1}{t}+\frac{1}{u}-c\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right]^2 + \left[(1+c)^2+(1-c)^2\right]\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2 \right\}$$

$$= 8m^4e^4 \left\{ 2\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)^2 + \left[\cancel{2c^2}+4-\cancel{4c^2}+2+\cancel{2c^2}\right]\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2 \right\}$$

$$= 32m^4e^4 \left\{ \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{u}\right)^2 \right\}$$

今度は負の干渉項となりました。(652)と(653)の結果はQEDの既知の結果と一致しますので、今度は正しく計算できたようです。私の頭の中に、20年以上も前のかすかな記憶として(653)式が残っていて、深く考えずに、「フェルミ統計から反対称で負の干渉」という連想ができてしまっていたようです。

さて、せっかく(653)の非相対論極限の式が求まったのですから、{ }の中の

3項それぞれが、散乱の前後でスピンが保存する3振幅の寄与であることを説明しましょう。有明な「重クォーク有効理論(HQET)」の定理、「重いフェルミオンのスピンは変化しない(変化はβに比例する)」の具体例です。HQETはBメソンの物理の道具だ、なんて思わないでくださいね。LHCやLCでtopや更に重いフェルミオンが生成されたらとても役に立ちますから。(スピン1でも$\frac{3}{2}$でも2でも重ければ役に立つと思います。)

さて、ヘリシティー振幅からスピン振幅を求めますが、この違い分かりますか?ヘリシティーは粒子の運動量の向きのスピンの成分です。運動量の向きが変わる散乱過程では、「ヘリシティー保存」は「スピン非保存」です。ここでは、入射電子の向き$(\mathbb{k}_1)$を角運動量の量子化の軸とし、全てのスピンをこの向きで測る(量子化する)ことにします。すると、入射電子$(\mathbb{k}_1)$のヘリシティースピノールがそのままスピンベクトルとなります。

(654) $|\uparrow\rangle_1 = \chi_+(\mathbb{k}_1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\qquad |\downarrow\rangle_1 = \chi_-(\mathbb{k}_1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

入射電子$(\mathbb{k}_2)$のスピンベースは、

(655) $|\uparrow\rangle_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \chi_-(\mathbb{k}_2)$ $\qquad |\downarrow\rangle_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\chi_+(\mathbb{k}_2)$

要するに、$\mathbb{k}_2$電子の場合、スピンとヘリシティーは逆なのですね。当然。$\mathbb{k}_3$と$\mathbb{k}_4$の

電子についても $|\uparrow\rangle_i=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $|\downarrow\rangle_i=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $(i=3,4)$ を使ってスピン振幅を求めるのですが、これらをヘリシティー固有ベクトルで表わさなければなりません。

(656a) $\chi_+(\mathbb{k}_3)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}=\cos\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_3+\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle_3$

$\chi_-(\mathbb{k}_3)=\begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}|\uparrow\rangle_3+\cos\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_3$

(656b) $\chi_+(\mathbb{k}_4)=\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\end{pmatrix}=\sin\frac{\theta}{2}|\uparrow\rangle_4-\cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}|\downarrow\rangle_4$

$\chi_-(\mathbb{k}_4)=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}=\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}|\uparrow\rangle_4+\sin\frac{\theta}{2}|\downarrow\rangle_4$

従って

(657a) $\begin{pmatrix}|\uparrow\rangle_3\\|\downarrow\rangle_3\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}\chi_+(\mathbb{k}_3)\\ \chi_-(\mathbb{k}_3)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} & \cos\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_+(\mathbb{k}_3)\\ \chi_-(\mathbb{k}_3)\end{bmatrix}$

(657b) $\begin{pmatrix}|\uparrow\rangle_4\\|\downarrow\rangle_4\end{pmatrix}=V\begin{bmatrix}\chi_+(\mathbb{k}_4)\\ \chi_-(\mathbb{k}_4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}e^{i\phi}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} & \sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\chi_+(\mathbb{k}_4)\\ \chi_-(\mathbb{k}_4)\end{bmatrix}$

これで全てのスピン振幅が計算できます。$|s_i\rangle$ を $|\uparrow\rangle_i$ か $|\downarrow\rangle_i$ として、

(658) $$M^{s_3s_4}_{s_1s_2}=\langle s_4|\langle s_3|\,T\,|s_1\rangle|s_2\rangle$$

$$=\sum_{\lambda_3,\lambda_4}\left(V_{s_4\lambda_4}\chi_{\lambda_4}(\mathbb{k}_4)\right)\left(U_{s_3\lambda_3}\chi_{\lambda_3}(\mathbb{k}_3)\right)^{\dagger}T\,\chi_{s_1}(\mathbb{k}_1)\chi_{-s_2}(\mathbb{k}_2)s_2$$

$$=\sum_{\lambda_3,\lambda_4}(U_{s_3\lambda_3})^*(V_{s_4\lambda_4})^*\,\underline{\chi^{\dagger}_{\lambda_4}(\mathbb{k}_4)\chi^{\dagger}_{\lambda_3}(\mathbb{k}_3)\,T\,\chi_{s_1}(\mathbb{k}_1)\chi_{-s_2}(\mathbb{k}_2)\,s_2}$$

$$=\sum_{\lambda_3,\lambda_4}(U_{s_3\lambda_3})^*(V_{s_4\lambda_4})^*\,M^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}s_2(\lambda_1=s_1,\lambda_2=-s_2)$$

ここで $|s_i=+\rangle=|\uparrow\rangle_i$, $|s_i=-\rangle=|\downarrow\rangle_i$ としました。つまり、任意のスピン振幅はヘリシティー振幅の線型重ね合わせで表わせるわけです。ではスピン不変振

幅、$M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow}$ と $M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow}$ と $M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow}$ を計算してみましょう。$M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow}$ は t-channelだけ，$M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow}$ は u-channel だけ，$M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow}$ は両方寄与するはずです。

(659a) $$M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\uparrow\lambda_3})^* (V_{\downarrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{++} (-1)$$

$$= -\left\{ \cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\right) M^{++}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{+-}_{++} + \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} M^{-+}_{++} - \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} M^{--}_{++} \right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{u}\right) - \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{u}\right)\right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \frac{1}{t}\left(\cos^4\frac{\theta}{2} + \cos^2\sin^2\frac{\theta}{2}\times 2 + \sin^4\frac{\theta}{2}\right) + \frac{1}{u}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)(1-1-1+1)\right\}$$

$$= 4m^2e^2\frac{1}{t}$$ （$\beta \to 0$ limit をとりました）.

(659b) $$M^{\downarrow\uparrow}_{\uparrow\downarrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\downarrow\lambda_3})^* (V_{\uparrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{++} (-1)$$

$$= -\left\{ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} M^{++}_{++} + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{+-}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{-+}_{++} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{--}_{++} \right\}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ -\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{u}\right) - \sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right)\times 2 - \cos^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}}{t} + \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{u}\right)\right\}$$

$$= -4m^2e^2\frac{1}{u} + O(\beta)$$

(659c) $$M^{\uparrow\uparrow}_{\uparrow\uparrow} = \sum_{\lambda_3\lambda_4} (U_{\uparrow\lambda_3})^* (V_{\uparrow\lambda_4})^* M^{\lambda_3\lambda_4}_{+-}$$

$$= \cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} M^{++}_{+-} + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{+-}_{+-} + \left(-\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\right)\sin\frac{\theta}{2} M^{-+}_{+-} + \left(-\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi}\right)\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} M^{--}_{+-}$$

$$= 4m^2e^2\left\{ \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \cos^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \sin^4\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right)\right\}$$

$$= 4m^2e^2\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{u}\right) + O(\beta)$$

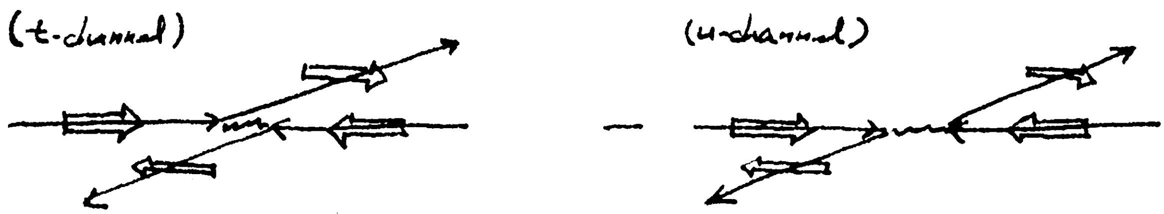
ここまでで、$\beta \to 0$ 極限の振幅の自乗のスピン和の式(653)を再現しましたから（パリティー不変性で全てのスピンを反転したものの和を×2で代用しています）、HQETの定理、「$\beta \to 0$ で

フェルミオンのスピンは変化しない」が実証されたことになります。そして、(659c)で、t-channel振幅とu-channel振幅が相殺することが見てとれます。スピンの量子化の軸を共通にとったので、波動関数の反対称化がそのまま振幅の相殺となったわけです。$\beta\to 1$極限のヘリシティー振幅 M^{++}_{++} (643)の場合は、反対称化の結果、振幅が増幅します。始状態と終状態の量子化の軸が$\theta=90^\circ$のとき直交するのですが、この時、干渉によって振幅はゼロになるのでなく2倍になります。(−1)の因子がスピン波動関数にあるはずです。そろそろ道草が長くなったのでこれ以上追求しませんが、前方散乱($\theta\to 0$)の極限でスピンとヘリシティーの量子化軸が一致することを利用して考えたことを述べます。(659a)で$\beta\to 1$極限をとると、

(660)
$$
\begin{aligned}
M^{\uparrow\downarrow}_{\uparrow\downarrow} &= \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} M^{++}_{++} - \cos^2\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\left(M^{+-}_{++} + M^{-+}_{++}\right) + \sin^2\frac{\theta}{2}\, e^{-i\phi} M^{--}_{++} \\
&\xrightarrow[\beta\to 1]{} \cos^2\frac{\theta}{2}\, e^{i\phi} M^{++}_{++} \\
&= e^2 s\,(1+\cos\theta)\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) \\
&\xrightarrow[\theta\to 0]{} 2e^2 s\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{u}\right) = M^{++}_{++}
\end{aligned}
$$

であるわけです。この極限でスピン(z軸の向きのスピン)を考えると、

(661)



t-channel過程のカレントは共にスピン保存、u-channel過程のカレントは共に

スピンフリップであることが分かります。このスピンフリップカレントの積が、(−1)因子の起源だろうと思うのですが、ここらで次に進まないといけません。干渉項の符号を間違えたことが少しshockだったので、ずい分と長いより道をしてしまいました。このより道で、ヘリシティー振幅の完全系はrelative phaseを含めて物理(観測量)の完全な情報を有しており、任意のスピン振幅を構成できる、ということを学んで下さい。HELASやMadGraphといった数値プログラムでヘリシティー振幅が簡単に計算できるので、任意の過程の任意の粒子のスピン偏極や、偏極相関も、この様にして簡単に求められるわけです。解析的な計算は面倒でしたけれど、数値計算なら簡単だし、誤りも避けられます。

ここまでで、QCDの2→2過程の計算のcheckは完全に終了したので、p. 193〜195の(583)−(585)のまとめを再掲します。ヘリシティー振幅を再掲することはしませんが、Web上のコピーで、全ての誤りを訂正しておきますので、使用して下さい。今回のまとめでは、同種粒子の場合、phase spaceが $0<\cos\theta<1$ である旨を必ず書き加えることにしました。この方が $\cos\theta\to 1$ での比較等をするときに誤解が少ないと思うからです。

2005. 7. 26

QCD 2→2 過程の断面積のまとめ。[p.193 - p.195 (583)-(585) の再掲]

(662a) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq'\to qq'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{s^2+u^2}{t^2}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}-\frac{1}{(1-c)}+\frac{1}{4}\right\}$$

(662b) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qq\to qq} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{s^2+t^2}{u^2}+\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2s^2}{tu}\right\}$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{1}{(1-c)}-\frac{1}{(1+c)}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{1-c}+\frac{1}{1+c}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{4}{3(1-c)}-\frac{4}{3(1+c)}+\frac{1}{2}\right\}$$

(662c) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{qg\to qg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}-\frac{s^2+u^2}{2su}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{s^2+u^2}{t^2}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{4}{(1-c)^2}-\frac{2}{(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}+\frac{5+c}{8}+\left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{-4}{(1-c)^2}+\frac{2}{1-c}-\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{9}{2}\frac{1}{(1-c)^2}-\frac{9}{4}\frac{1}{(1-c)}+\frac{11+2c}{16}+\frac{1}{2(1+c)}\right\}$$

(662d) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{4T_F^2N^2}{N^2-1}\cdot\frac{1}{2}\left\{3-\frac{tu}{s^2}-\frac{su}{t^2}-\frac{st}{u^2}\right\}$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{9}{8}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}+\frac{2}{(1+c)^2}-\frac{1}{(1-c)}-\frac{1}{(1+c)}+\frac{11+c^2}{8}\right\}$$

(662e) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)^2}{N^3}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2+u^2}{s^2}-\frac{t^2+u^2}{2tu}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right\}\times(-1)$$

$\boxed{0<\cos\theta<1}$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{16}{27}\cdot\left\{\frac{1}{2(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}-\frac{25+9c^2}{32}\right\}$$

(662f) $$\left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{gg\to q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2}{N}\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{t^2+u^2}{s^2}-\frac{t^2+u^2}{2tu}+\left(\frac{-1}{N^2-1}\right)\left(-\frac{t^2+u^2}{s^2}\right)\right\}\times(-1)$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{1}{12}\cdot\left\{\frac{1}{2(1-c)}+\frac{1}{2(1+c)}-\frac{25+9c^2}{32}\right\}$$

$$(662g)\quad \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to q'\bar{q}'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{t^2+u^2}{s^2}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{1+c^2}{8}\right\}$$

$$(662h)\quad \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q}\to q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{1}{4}\left\{\frac{s^2+u^2}{t^2}+\frac{t^2+u^2}{s^2}+\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2u^2}{st}\right\}$$
$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\cdot\frac{2}{9}\cdot\left\{\frac{2}{(1-c)^2}-\frac{2}{3(1-c)}+\frac{3-2c+3c^2}{24}\right\}$$

以上です。それぞれの断面積の一行目の表式にはカラー因子を顕わに記し、第二カラー因子は主要な因子との比（$\frac{1}{N}$ や $\frac{1}{N^2-1}$）で表わしました。又、s, t, u 変数を用いることによって、$qg\to qg$ と $q\bar{q}\to gg$、$gg\to q\bar{q}$ が $s\leftrightarrow t$ 交換、$qq\to qq$ と $q\bar{q}\to q\bar{q}$ が $s\leftrightarrow u$ 交換で得られることを示しました。$gg\to gg$ 断面積が $s\leftrightarrow t\leftrightarrow u\leftrightarrow s$ 対称なことも見てとれます。これらの関係（交差対称性）はヘリシティー振幅の段階では見にくいので、計算の check に有効です。

(662) 式の結果は原著論文 (627) の結果と一致し、ヘリシティー振幅の計算の誤りもほぼ完全に駆逐できたと思います。

$c=\cos\theta\to 1$ の振舞の普遍性 (universality) は重要です。

$4\pi\alpha_s^2/s$ を単位として、次の三過程

$$(663)\quad \begin{cases} \dfrac{4}{9}\dfrac{1}{(1-c)^2} & \cdots\quad qq'\to qq' = \overbrace{q\bar{q}'\to q\bar{q}'}^{(662a)},\ \overbrace{qq\to qq}^{(662b)},\ \overbrace{q\bar{q}\to q\bar{q}}^{(662h)} \\ 1\,\dfrac{1}{(1-c)^2} & \cdots\quad qg\to qg = \bar{q}g\to\bar{q}g \quad (662c) \\ \dfrac{9}{4}\dfrac{1}{(1-c)^2} & \cdots\quad gg\to gg \quad (662d) \end{cases}$$

は全て t-channel に gluon を交換します。カラー因子と振幅の積が、$\frac{4}{9}:1:\frac{9}{4}$ となることは覚えておくと役に立ちそうですね。

通常のコライダー実験では、$q, q', \bar{q}, \bar{q}', g$ 等の jet を区別できない場合がほとんどです。上記の $2\to 2$ 過程は全て、2ジェット生成への寄与と考えることができますが、この場合、$\cos\theta = |c|$ と $\cos\theta = -|c|$ は区別できません。ジェット生成断面積を

$$(664)\quad \left(\frac{d\sigma}{d|c|}\right)^{ab\to cd} \begin{cases} = \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=|c|} + \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=-|c|} & c \neq d \text{ の場合} \\ = \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{ab\to cd}_{c=|c|} & c = d \text{ (同種粒子の場合)} \end{cases}$$

と定義してから、$|c|=0$ でのジェット生成の大きさを比較すると、やはり $4\pi\alpha_s^2/s$ を単位として、大きい順に

$$(665)\quad \left.\begin{aligned} &\frac{243}{64} = 3.8 && \cdots\ gg\to gg \\ &\frac{55}{36} = 1.5 && \cdots\ qg\to qg \\ &\frac{35}{54} = 0.65 && \cdots\ q\bar{q}\to q\bar{q} \\ &\frac{5}{9} = 0.56 && \cdots\ qq'\to qq' \\ &\frac{11}{27} = 0.41 && \cdots\ qq\to qq \end{aligned}\right\} \frac{1}{(1-c)^2} \text{ を持つ過程です。}$$

$$\begin{aligned} &\frac{7}{54} = 0.13 && \cdots\ q\bar{q}\to gg \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{18} = 0.056 && \cdots\ q\bar{q}\to q'\bar{q}' \\ &\frac{7}{192} = 0.036 && \cdots\ gg\to q\bar{q} \end{aligned}\right\} t\bar{t} \text{ 生成に寄与する過程です。}$$

簡単な計算ばかりですが、ミスがあるかも知れません。checkしてくださいね。(665)の数字をながめていると、いくつか記憶しておくべきことがあるように思います。

- (665)の過程は全て$O(\alpha_s^2)$の2→2過程で、且つ、$\cos\theta = 0$でt-とu-channelに交換する粒子の寄与が最小の場合であるにもかかわらず、断面積の大きさが100:1以上違うこと。
- $\cos\theta \to 1$の普遍性から、$(gg \to gg) : (qg \to qg) : (qq' \to qq') = \frac{9}{4} : 1 : \frac{4}{9}$ $= 2.25 : 1 : 0.44$ だが、$\cos\theta = 0$ではこの比が、

  $2.5 : 1 : 0.42\ (q\bar{q} \to q\bar{q}) : 0.36\ (qq' \to qq') : 0.27\ (qq \to qq)$

  になっています。これは、干渉等により、$\cos\theta$分布の形が違うことを反映しているわけです。high P_Tの極限で、Tevatronでは$u\bar{u} \to u\bar{u}$、LHCでは$uu \to uu$が優性になりますが、$\cos\theta = 0$の断面積が3:2以上も違うのは驚きです。$uu \to uu$は$gg \to gg$の$\frac{1}{9}$しかありません。
- 初期状態に無い$q\bar{q}$対を生成する断面積2過程が最低で、$q\bar{q} \to q'\bar{q}'$は$gg \to gg$の$\frac{1}{70}$、$gg \to q\bar{q}$は$\frac{1}{100}$しかありません。これは$\frac{m^2}{s} \to 0$極限の値ですから、topの様に有限質量だと、更に小さくなります。

輻射過程.

さて待望の輻射過程の講義に入ります。出発点として、QEDの「等価光子の近似」"Equivalent real photon (particle) approximation"

(666) C.Weizäcker, ZP 612 (1938); E.J.Williams, PR45, 729 (1934)

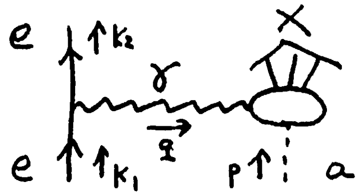
をヘリシティー振幅を使って導出します。電子の質量が有限でαが小さいことから、不定性が無く、電子中の電子、光子の分布、光子中の電子の分布が定義できることを確認します。つまり、QEDからパートン模型（パートンは電子、陽電子と光子です）が導出されるわけです。この類推から、QCDでも摂動QCDを用いてパートン模型の基礎づけができることに気がついたのが、

(667) V.N.Gribov & L.Lipatov, SJNP 15, 438 (1972);
G.Altarelli & G.Parisi, NPB126, 298 (1977)

です。GLAP方程式を導き、その基本的性質の解説までを解説したいと思います。

まずは、$e\to\gamma$ 分岐から始めましょう。考慮する過程は

$$(666)\quad \begin{cases} e + a \longrightarrow e + X \\ \\ e(k_1, \lambda_1) + a(p) \longrightarrow e(k_2, \lambda_2) + X(p_X) \end{cases}$$



電子の質量を有限にして、有限なQEDの振幅を求めたいので、

(667) $k_1 + p = k_2 + p_X$, $k_1 - k_2 = q$
$k_1^2 = k_2^2 = m^2$, $p^2 = 0$, $p_X^2 = \hat{s} = (q+p)^2 = 2qp + q^2$
$(k_1+p)^2 = m^2 + 2k_1 p = s$

とします。振幅は、

(668) $$M^{\lambda_2}_{\lambda_1} = \bar{u}(k_2,\lambda_2)\, e\gamma^\mu u(k_1,\lambda_1) \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} T^\nu(q,p)$$
$$\equiv e\, J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} T^\nu(q,p)$$

と書けます。ここで $\gamma^* + a \to X$ 振幅のゲージ不変性は仮定します。

(669) $q_\nu T^\nu(q,p) = 0$.

断面積は

(670) $$d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\lambda_1\lambda_2} |M^{\lambda_2}_{\lambda_1}|^2 \quad d\Phi(k_2 + p_X)$$
$$= \frac{1}{4s}\cdot \sum_{\lambda_1\lambda_2} e^2 J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} J^{\nu *}_{\lambda_1\lambda_2} \frac{1}{(q^2)^2} T_\mu T_\nu^* \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2} d\Phi_X$$
$$= \frac{1}{4s}\cdot L^{\mu\nu} W_{\mu\nu} \cdot \frac{1}{(q^2)^2}\cdot \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E_2}$$

$$L^{\mu\nu} = e^2 \sum_{\lambda_1\lambda_2} J^\mu_{\lambda_1\lambda_2} J^{\nu *}_{\lambda_1\lambda_2} = e^2\, \mathrm{tr}[(\not{k}_2 + m)\gamma^\mu(\not{k}_1 + m)\gamma^\nu]$$
$$= 4e^2 [k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1\cdot k_2 - m^2) g^{\mu\nu}]$$

$$W^{\mu\nu} = T^\mu T^{*\nu} d\Phi_X$$
$$= \left(-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{q^2}\right) W_1(p\cdot q, q^2) + \left(p^\mu - \frac{q\cdot p}{q^2} q^\mu\right)\left(p^\nu - \frac{q\cdot p}{q^2} q^\nu\right)\frac{1}{q\cdot p} W_2(p\cdot q, q^2)$$

おなじみのDISの表式ですが、全断面積を考えると、$q^2 \to 0$ 極限(実光子

極限)の寄与が主要なことがわかります。この極限で、$L^{\mu\nu}W_{\mu\nu} \sim O(q^2)$、$d^3k_2/2E_2 \sim dE_2 dq^2$ なので、断面積は $dE_2\, d\ln(-q^2)$ の様に振る舞います。このことを、(668) の γ^* propagator を実光子の積の和で表現します。

(671) $$-g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=\pm1} \varepsilon^{\mu}(q,\lambda)^{*}\varepsilon^{\nu}(q,\lambda) - \frac{n^{\mu}q^{\nu} + n^{\nu}q^{\mu}}{n\cdot q}$$

(669) とカレントの保存 $q_{\mu}J^{\mu}_{\lambda_1\lambda_2} = 0$ により、右辺の余分な項は寄与しませんから、

(672) $$M^{\lambda_2}_{\lambda_1} = \frac{e}{q^2}\sum_{\lambda=\pm} J^{\mu}_{\lambda_1\lambda_2}\cdot\varepsilon_{\mu}(q,\lambda)^{*}\ \varepsilon_{\nu}(q,\lambda)T^{\nu}(q,p)$$
$$= \frac{e}{q^2}\sum_{\lambda=\pm} J_{\lambda_1\lambda_2}\cdot\varepsilon^{*}_{\lambda}\ \hat{M}_{\lambda}$$

と書けるわけです。ここで $\hat{M}_{\lambda}$ は

(673) $$\gamma^* + a \to X$$

のヘリシティー振幅で

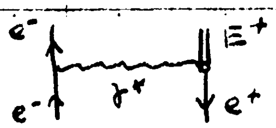
(674) $$\hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, q^2) = \varepsilon_{\mu}(q,\lambda)T^{\mu}(q,p)$$

で定義されます。$q^2=0$ のときは実光子の振幅ですから、

(675) $$\hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, q^2) = \hat{M}_{\lambda}(q\cdot p, 0)\left\{1 + O\left(\frac{q^2}{Q^2}\right)\right\}$$

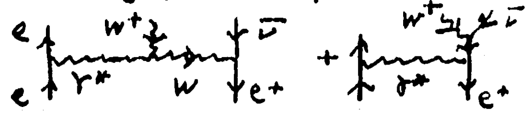
と書けるはずです。ここで Q^2 は、$\gamma^*+a\to X$ 過程の振幅が、実光子の振幅から大きくずれるスケールで、この過程の詳細に依存します。例えば X が一粒子 ($\hat{s}=M^2$) であったなら、$Q^2=M^2$ ですし、$a=e^+$ で $X=e^+\Sigma$ であったら、$Q^2=p_T^2(e^+)$ となります。

(676) $e^-e^+ \to e^-E^+$ (重いE$^+$)



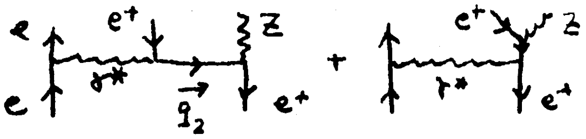
$Q^2 \approx M^2 = m_{E^+}^2$

$e^-e^+ \to e^-\bar{\nu}W^+$



$Q^2 \approx m_W^2 - p_W^2$

$e^-e^+ \to e^-e^+Z$



$Q^2 \approx |q_2^2|$

つまり、Q^2は、$\gamma^*+a \to X$ が局所的な（一点における）相互作用と見なせるスケールで、γ^*の波長が$\frac{1}{Q}$以下になる（$|q^2|>Q^2$）と、過程の非局所的構造が見えてしまって振幅が小さくなるわけです。

以後、(675)を

(677) $$\hat{M}_\lambda(q\cdot p,\, q^2) = \hat{M}_\lambda(q\cdot p,\, 0)\,\theta(Q^2-|q^2|)$$

と近似します。「実光子近似」と呼びます。この近似で全振幅(672)を評価します。

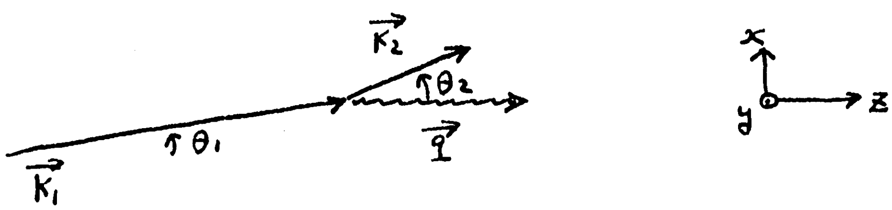
実際の計算は $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ が z 軸になる系で行います。

(678) $$k_1^\mu = E(1,\ \beta\sin\theta\cos\phi,\ \beta\sin\theta\sin\phi,\ \beta\cos\theta)$$

$$k_2^\mu = E'(1,\ \beta'\sin\theta'\cos\phi,\ \beta'\sin\theta'\sin\phi,\ \beta'\cos\theta')$$

$$q^\mu = k_1^\mu - k_2^\mu = (\nu,\ 0,\ 0,\ \sqrt{\nu^2-q^2})$$

$$q^2 = (k_1-k_2)^2 = 2m^2 - 2EE'(1-\beta\beta'\cos(\theta-\theta'))$$



この系で $\varepsilon^{\mu}(q, \lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0)$ だから．

(679) $\mathcal{M}_{\lambda_1}^{\lambda_2 \lambda} \equiv J^{\mu}_{\lambda_1 \lambda_2}(k_1, k_2)\ \varepsilon^{*}_{\mu}(q, \lambda) = \bar{u}(k_2, \lambda_2)\gamma^{\mu} u(k_1, \lambda_1)\,\varepsilon^{*}_{\mu}(q, \lambda)$

とおくと［$J^{\mu}_{\lambda_1 \lambda_2}(k_1, k_2)$ の計算はくり返しませんけれど，簡単ですね！］

(680a) $\mathcal{M}_{+}^{++} = -\mathcal{M}_{-}^{--*} = 2\sqrt{2EE'} \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta'}{2}\, e^{-i\phi} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

(680b) $\mathcal{M}_{+}^{+-} = -\mathcal{M}_{-}^{-+*} = -2\sqrt{2EE'} \sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2}\, e^{i\phi} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

(680c) $\mathcal{M}_{+}^{-+} = \mathcal{M}_{-}^{+-} = \sqrt{2}\, m \left(\sqrt{\frac{E}{E'}} - \sqrt{\frac{E'}{E}}\right) \cos\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta'}{2} \times \left\{1 + O\left(\frac{m^2}{E^2}\right)\right\}$

他の項は $m^2/E^2 \to 0$ 極限で断面積に寄与しません。(680c) が $m \to 0$ 極限で有限の寄与を与えることは既に述べたと思いますが，くり返します。

ここで γ^* の energy $\nu = Ex$ と置くと

(681a) $E' = E - \nu = E(1-x)$

(681b)
$$
\begin{aligned}
q^2_{min} &= -q^2 \quad (\cos(\theta-\theta') = 1) \\
&= 2EE'(1-\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2EE'(1-\beta^2\beta'^2)/(1+\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2E^2E'^2\left[(1-\beta^2)+(1-\beta'^2)-(1-\beta^2)(1-\beta'^2)\right]/EE'(1+\beta\beta') - 2m^2 \\
&= 2m^2\left\{\left[E^2+E'^2-m^2\right]/EE'(1+\beta\beta') - 1\right\} \\
&= m^2(E-E')^2/EE' \times \left[1 + O(m^2/E^2)\right] \\
&= m^2 x^2/(1-x) \times \left[1 + O(m^2/E^2)\right]
\end{aligned}
$$

(681c)
$$
\begin{aligned}
q^2_{min} - q^2 \equiv \tilde{q}^2 &= 2EE'\beta\beta'\left[1 - \cos(\theta-\theta')\right] \\
&= 4EE'\beta\beta' \sin^2\frac{\theta-\theta'}{2} \\
&= 4EE'\beta\beta'\left[\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2} - \sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right]^2 \\
&\approx 4EE'\left[\sin\frac{\theta}{2} - \frac{E}{E'}\sin\frac{\theta}{2}\right]^2 = 4E^2\frac{x^2}{1-x}\sin^2\frac{\theta}{2} \\
&\approx 4EE'\left[\frac{E'}{E}\sin\frac{\theta'}{2} - \sin\frac{\theta'}{2}\right]^2 = 4E^2x^2(1-x)\sin^2\frac{\theta'}{2}
\end{aligned}
$$

(681) を (680) に代入すると.

(682a) $m_{+}^{++} = -m_{-}^{--*} = \sqrt{2}\,\frac{1}{x}\, e^{-i\phi}\,\tilde{q} + O(\tilde{q}^2)$ $\qquad \tilde{q} = \sqrt{q^2_{min} - q^2}$

(682b) $m_{+}^{+-} = -m_{-}^{-+*} = -\sqrt{2}\,\frac{1-x}{x}\, e^{i\phi}\,\tilde{q} + O(\tilde{q}^2)$

(682c) $m_{+}^{-+} = m_{-}^{+-} = \sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x}}\, m + O(m\tilde{q}^2)$

従って全振幅 (672) は

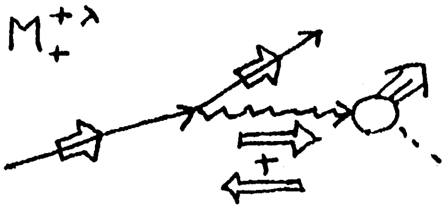
(683a)
$$M_{+}^{+} = \frac{e}{q^2}\left[m_{+}^{++}\hat{M}_{+} + m_{+}^{+-}\hat{M}_{-} \right]$$
$$= \sqrt{2}\, e\,\frac{\tilde{q}}{q^2}\left[\frac{1}{x} e^{-i\phi}\hat{M}_{+} - \frac{1-x}{x} e^{i\phi}\hat{M}_{-} \right].$$

(683b)
$$M_{-}^{-} = \frac{e}{q^2}\left[m_{-}^{-+}\hat{M}_{+} + m_{-}^{--}\hat{M}_{-} \right]$$
$$= \sqrt{2}\, e\,\frac{\tilde{q}}{q^2}\left[\frac{1-x}{x} e^{-i\phi}\hat{M}_{+} - \frac{1}{x} e^{i\phi}\hat{M}_{-} \right]$$

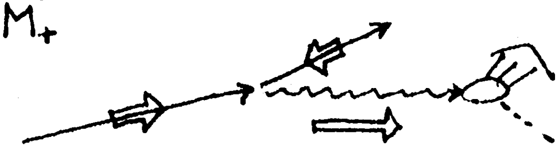
(683c)
$$\begin{cases} M_{+}^{-} = \frac{e}{q^2}\left[m_{+}^{-+}\hat{M}_{+} + O(m^2) \right] = \sqrt{2}\, e\,\frac{m}{q^2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\hat{M}_{+} \\ M_{-}^{+} = \frac{e}{q^2}\left[m_{-}^{+-}\hat{M}_{-} + O(m^2) \right] = \sqrt{2}\, e\,\frac{m}{q^2}\,\frac{x}{\sqrt{1-x}}\,\hat{M}_{-} \end{cases}$$

ここで $M_{\lambda_1}^{\lambda_2} = M_{+}^{+}$ と M_{-}^{-} は電子のヘリシティーが保存するため，$m\to 0$ で有限，γ^* のヘリシティーは $\lambda = \pm$ 共に存在しますが，M_{+}^{-} と M_{-}^{+} は電子のヘリシティーがフリップするため振幅が m に比例し，$\lambda = \lambda_1$（光子のヘリシティが入射電子のヘリシティーと一致する場合にだけ，有限の断面積を与えます．次図参照．

(684) $M_{+}^{+\lambda}$ $\qquad\qquad$ M_{+}^{-}



θ=0 でスピンは保存しない！



θ=0 でスピンが保存する.

断面積を計算するために、終電子の phase space を

(685) $$\frac{d^3K_2}{(2\pi)^3 2E_2} = \frac{1}{16\pi^3}\frac{K'^2 dK'}{E'}\, d\cos\theta' d\phi'$$

$$= \frac{1}{16\pi^3} K' dE'\, d\cos(\theta'-\theta)\, d\phi \qquad K'dK' = E'dE'$$

$$\approx \frac{1}{16\pi^3} K' dE' \frac{dq^2}{2EE'}\, d\phi \qquad (678)$$

$$\approx \frac{1}{16\pi^2}\, dx\, dq^2 \frac{d\phi}{2\pi} \qquad \frac{dE'}{E} = d(1-x) = dx$$

とし、$\gamma^* + a \to X$ 過程の密度行列

(686) $$\rho_{\lambda\lambda'} \equiv \frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\cdot \overline{\sum_{\lambda_a,\lambda_X}} \int \hat{A}_\lambda A^*_{\lambda'}\, d\Phi_X \quad = (\rho_{\lambda'\lambda})^*$$

を定義します。$\hat{s} = (p+q)^2 = xs$ とし、$\overline{\sum_{\lambda_a,\lambda_X}}$ は a については スピン平均、X については スピン和をとります。ρ のトレース $(\rho_{++} + \rho_{--})$ は通常のスピン平均断面積です。ρ の各成分の測定が、$\gamma^* + a \to X$ 過程の、スピン、パリティー、CP 特性の決定のために重要なので全成分を残した表式を求めます。

入射電子は100%偏極（$\lambda_1 = +$ か $-$）、終電子の偏極は観測しない（$\lambda_2 = +$ と $-$ を加える）場合だけを考えます。

(687) $$d\sigma_{\lambda_1} = \frac{1}{2s}\left\{ |M^{\lambda_1}_{\lambda_1}|^2 + |M^{-\lambda_1}_{\lambda_1}|^2 \right\} \frac{d^3K'}{(2\pi)^3 2E'}\cdot d\Phi_X$$

$$= \frac{1}{2s}\left(\frac{e}{q^2}\right)^2 \left\{ |m^{\lambda_1 +}_{\lambda_1} \hat{A}_+ + m^{\lambda_1 -}_{\lambda_1} A_-|^2 + |m^{-\lambda_1, +\lambda_1}_{\lambda_1} \hat{A}_{\lambda_1}|^2 \right\} \frac{d^3K'}{(2\pi)^3 2E'}\, d\Phi_X$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{ |m^{\lambda_1 +}_{\lambda_1} A_+ + m^{\lambda_1 -}_{\lambda_1} \hat{A}_-|^2 + |m^{\lambda_1, \lambda_1}_{\lambda_1} A_{\lambda_1}|^2 \right\} d\Phi_X \cdot x\, dx \cdot \frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

2005. 7. 28

(688a) $$d\sigma_+ = \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{2\tilde{q}^2\left|\frac{1}{x}e^{-i\phi}\hat{M}_+ - \frac{1-x}{x}e^{i\phi}\hat{M}_-\right|^2 + 2m^2\frac{x^2}{1-x}|\hat{M}_+|^2\right\}d\Phi_X\cdot x\,dx\cdot\frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{1}{2\hat{s}}\cdot\frac{1}{2}\left\{2\tilde{q}^2\left[\frac{1}{x^2}|\hat{M}_+|^2 + \left(\frac{1-x}{x}\right)^2|\hat{M}_-|^2 - 2\frac{1-x}{x^2}R_e(e^{-2i\phi}\hat{M}_+\hat{M}_-^*)\right]\right.$$

$$\left. + \underbrace{2m^2\frac{x^2}{1-x}}_{=q^2_{min}\ (681b)}|\hat{M}_+|^2\right\}d\Phi_X\cdot x\,dx\cdot\frac{dq^2}{(q^2)^2}\cdot\frac{d\phi}{2\pi}$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\left[\frac{1}{x}\rho_{++} + \frac{(1-x)^2}{x}\rho_{--} - \frac{1-x}{x}R_e(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\,x\,\rho_{++}\right\}dx\;d|q^2|\;\frac{d\phi}{2\pi}$$

(688b) $$d\sigma_- = \frac{\alpha}{\pi}\left\{\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\left[\frac{(1-x)^2}{x}\rho_{++} + \frac{1}{x}\rho_{--} - \frac{1-x}{x}R_e(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\right.$$

$$\left. + \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\,x\,\rho_{--}\right\}dx\;d|q^2|\;\frac{d\phi}{2\pi}$$

従って非偏極電子ビームの断面積は

(688c) $$d\sigma = \frac{1}{2}(d\sigma_+ + d\sigma_-)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}(\rho_{++}+\rho_{--}) - 2\frac{1-x}{x}R_e(2e^{-2i\phi}\rho_{+-})\right]\frac{\tilde{q}^2}{|q^2|^2}\right.$$

$$\left. + x\,(\rho_{++}+\rho_{--})\frac{q^2_{min}}{|q^2|^2}\right\}dx\,\frac{d\phi}{2\pi}\,d|q^2|$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}\right]\left[\ln\frac{Q^2}{q^2_{min}} - 1\right] + x\right\}(\rho_{++}+\rho_{--})\,dx$$

$$\equiv D^{WW}_{\gamma/e}(x, Q^2)\cdot\hat{\sigma}(\hat{s} = sx)\cdot dx$$

ここで

(689)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{q^2}{|q^2|^2} d|q^2| = \int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{|q^2| - q^2_{min}}{|q^2|^2} d|q^2| \\ \qquad = \log \dfrac{Q^2}{q^2_{min}} - 1 \\ \displaystyle\int_{q^2_{min}}^{Q^2} \frac{q^2_{min}}{|q^2|^2} d|q^2| = q^2_{min} \left[-\frac{1}{|q^2|} \right]_{q^2_{min}}^{Q^2} = 1 - \frac{q^2_{min}}{Q^2} \approx 1 \end{cases}$$

を用いました。

(690)
$$D^{WW}_{\gamma/e}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\left[\frac{1+(1-x)^2}{x}\left[\ln \frac{Q^2}{q^2_{min}} - 1\right] + x\right]$$

を Weisäcker-Williams の等価光子の分布と呼びます。

(688c) 式の表式が、パートン模型の表式と同型になることに注目してください。