

少し調子をくずしたために休講となり、今日は申し訳しありませんでした。
休みつつ、少しずつ、調子をもとに戻していきたいと思います。

前回の講義で $N \rightarrow \infty$ $SU(N)$ で独立なカラー因子を導入して、 $gg \rightarrow gg$ 振幅を
3つのチャンネル不変なセ、トに分解しました。カラー因子の対角成分の二乗和が全て
同じであることは、ラベル (a_1, a_2, a_3, a_4) の読み換えが明らかですが、非対角
要素が全部同じであるかどうか、(私には) 分かりません。もし、この計算して
みます。

$$\begin{aligned}
 (S31) \quad \sum_{\text{color}} T(1234) T(1324)^* &= \frac{1}{T_F^2} \sum_{a_1, a_2, a_3, a_4} \text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4}) \text{tr}(T^{a_4} T^{a_3} T^{a_2} T^{a_1}) \\
 &= \frac{1}{T_F} \sum_{a_1, a_2, a_3} \left\{ \text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_2} T^{a_1}) - \frac{1}{N} \text{tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3}) \text{tr}(T^{a_3} T^{a_2} T^{a_1}) \right\} \\
 &= \frac{1}{T_F} \sum_{a_2, a_3} \left\{ C_F \text{tr}(T^{a_2} T^{a_3} T^{a_2} T^{a_3}) - \frac{T_F}{N} \left[\text{tr}(T^{a_2} T^{a_3} T^{a_2} T^{a_3}) - \frac{1}{N} \text{tr}(T^{a_2} T^{a_3}) \text{tr}(T^{a_3} T^{a_2}) \right] \right\} \\
 &= \sum_{a_2, a_3} \left\{ \left(\frac{C_F}{T_F} - \frac{1}{N} \right) \text{tr}(T^{a_2} T^{a_3} T^{a_2} T^{a_3}) + \frac{1}{N^2} T_F^2 \delta^{a_2, a_3} \delta^{a_3, a_2} \right\} \\
 &= \sum_{a_2} \left\{ \left(\frac{C_F}{T_F} - \frac{1}{N} \right) \left(-\frac{T_F}{N} \right) \text{tr}(T^{a_2} T^{a_2}) + \frac{T_F^2}{N^2} \delta^{a_2, a_2} \right\} \\
 &= - \left(C_F - \frac{T_F}{N} \right) \frac{T_F}{N} (N^2 - 1) + \frac{T_F^2}{N^2} (N^2 - 1) = (N^2 - 1) \left\{ -C_F \frac{T_F}{N} + 2 \frac{T_F^2}{N^2} \right\}
 \end{aligned}$$

これは (S30) の非対角要素と全く同じである。ここで全ての非対角要素は同じだ
との見当がつかます。「証明」もできそうなのでここでやめます。上で述べた規則をまとめ

$$(S32) \quad \begin{cases} (T^{a_1} T^{a_2} \dots T^{a_n})^* = (T^{a_1})^T (T^{a_2})^T \dots (T^{a_n})^T = (T^{a_n} \dots T^{a_2} T^{a_1})^T \\ \sum_a T^a T^b T^a = \sum_a T_{ij}^a T_{jk}^b T_{ka}^a = T_F T_{jk}^b (\delta_{ia} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{ka}) = -\frac{T_F}{N} T^b \end{cases}$$

前頁の「証明」が心もとないからで、カラム因子の計算を確信かきてる3Tで、2つは、

結果をまとめると

$$(S33a) \quad \sum |T(ijkl)|^2 = (N^2-1) \left[C_R^2 - C_R \frac{T_R}{N} + \frac{T_R^2}{N^2} \right] = T_R^2 (N^2-1) \left[N^2 - 3 + \frac{3}{N^2} \right]$$

$$(S33b) \quad \sum T(1234) T(1243)^* = \sum T(1234) T(1324)^* = \sum T(1234) T(1342)^* \\ = \sum T(1234) T(1423)^* = (N^2-1) \left[-C_R \frac{T_R}{N} + 2 \frac{T_R^2}{N^2} \right] = T_R^2 (N^2-1) \left[-1 + \frac{3}{N^2} \right]$$

$$(S33c) \quad \sum T(1234) T(1432)^* = T_R^2 (N^2-1) \left[1 + \frac{3}{N^2} \right]$$

つまり、対角成分 (S33a) が全て $O(N^4)$ で、非対角成分 (S33b) と (S33c) が $O(N^2)$

であることに間違いないが、その値は (S33c) がだけ異なる。それは

$$(S34) \quad T(1432)^* = T(2341) = T(1234)$$

のためである。実際 (S27b) は

$$(S35) \quad \left\{ \begin{aligned} M &= g^2 \left\{ [T(1234) + T(1234)^*] \hat{M}(1234) \right. \\ &\quad + [T(1243) + T(1243)^*] \hat{M}(1243) \\ &\quad \left. + [T(1324) + T(1324)^*] \hat{M}(1324) \right\} \\ \hat{M}(1234) &= M(1342) - M(1423) \\ \hat{M}(1243) &= M(1423) - M(1234) \\ \hat{M}(1324) &= M(1234) - M(1342) \end{aligned} \right.$$

と表すことができ、(S27b) = (S35) が tree 振幅が実数 (散乱位相をもたない)

であることの帰結であることがわかる。ゲージ不変な振幅 $\hat{M}(ijkl)$ は

$$(536) \hat{M}(1234) + \hat{M}(1243) + \hat{M}(1324) = 0$$

を満たすので、2つだけ独立で、

$$(537) M = g^2 \left\{ [T(1234) + T(1234)^* - T(1324) - T(1324)^*] \hat{M}(1234) \right. \\ \left. + [T(1243) + T(1243)^* - T(1324) - T(1324)^*] \hat{M}(1243) \right\}$$

と表すことができる。スピンとカラー和は

$$(538) \sum_{color} \sum_{spin} |M|^2 = g^4 \left\{ \sum_{color} |T(1234) + T(1234)^* - T(1324) - T(1324)^*|^2 \sum_{spin} |\hat{M}(1234)|^2 \right. \\ + \sum_{color} |T(1243) + T(1243)^* - T(1324) - T(1324)^*|^2 \sum_{spin} |\hat{M}(1243)|^2 \\ + \sum_{color} (T(1234) + T(1234)^* - T(1324) - T(1324)^*) (T(1243) + T(1243)^* - T(1324) - T(1324)^*) \\ \left. \times \sum_{spin} 2 \operatorname{Re} \hat{M}(1234) \hat{M}(1243)^* \right\}$$

カラー和則(533a, b, c)を用いるとカラー和は直ちに実行できて $\begin{bmatrix} (533a) \times 4 \\ + (533c) \times 4 \\ - (533b) \times 4 \end{bmatrix}$

$$(539) \sum_{color} \sum_{spin} |M|^2 = g^4 \left\{ \underbrace{4T_F^2(N^2-1)N^2}_{\downarrow} \cdot \left[\sum_{spin} |\hat{M}(1234)|^2 + \sum_{spin} |\hat{M}(1243)|^2 \right] \right. \\ \left. + 2T_F^2(N^2-1)N^2 \cdot \left[\sum_{spin} 2 \operatorname{Re} \hat{M}(1234) \hat{M}(1243)^* \right] \right\}$$

干渉項のカラー因子が丁度半分ののは等式(536)の結果で、(539)は

$$(539)' \sum_{color} \sum_{spin} |M|^2 = g^4 \cdot \underbrace{2T_F^2(N^2-1)N^2}_{\downarrow} \cdot \sum_{spin} \left(|\hat{M}(1234)|^2 + |\hat{M}(1243)|^2 + |\hat{M}(1324)|^2 \right)$$

と表すこともできます。(539)'は(539)から(536)を用いて導けるから、(535)を出発点

に12次の式を使えば、2 check できます。

$$(540) |a + b + c|^2 = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 - 2 \operatorname{Re}[ab^* + bc^* + ca^*] = 0 \\ \text{if } a + b + c = 0$$

以下 (S39) を

$$(S41) \sum_{\text{color}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = g^4 \cdot 4T_F^2 (N^2 - 1) N^2 \cdot \sum_{\text{spin}} \left(|\hat{M}(1234)|^2 + |\hat{M}(1243)|^2 + \text{Re} \hat{M}(1234) \hat{M}(1243)^* \right)$$

と表すか。 Re の前には 2 が無 " " には 1/2 をつけて下す。

また、ゲージ不変振幅 $\hat{M}(1234)$ と $\hat{M}(1243)$ を計算して下す。(S35), (S26),

(S18) による。

$$(S42) \hat{M}(1234) = M(1342) - M(1423) \\ = (\Gamma(1342) - \Gamma(1423)) \varepsilon_{\mu_1}(k_1, \lambda_1) \varepsilon_{\mu_2}(k_2, \lambda_2) \varepsilon_{\mu_3}^*(k_3, \lambda_3) \varepsilon_{\mu_4}^*(k_4, \lambda_4)$$

$$(S43) \Gamma(1342) - \Gamma(1423) = -\frac{1}{P_1 P_4} [(-P_1 P_4 - 2P_1 P_3) g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_3 \mu_2} + (P_1 - P_4)^{\mu_1} (P_3 - P_2)^{\mu_4} g^{\mu_3 \mu_2} \\ + (P_1 - P_4)^{\mu_3} (P_3 - P_2)^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_4} - 2P_1^{\mu_4} P_3^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3} + 2P_3^{\mu_2} P_4^{\mu_1} g^{\mu_3 \mu_4} - 2P_4^{\mu_1} P_2^{\mu_3} g^{\mu_4 \mu_2} \\ + 2P_2^{\mu_3} P_1^{\mu_4} g^{\mu_1 \mu_2}] + g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_4 \mu_2} - g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} \\ + \frac{1}{P_1 P_2} [(-P_1 P_2 - 2P_1 P_4) g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} + (P_1 - P_2)^{\mu_1} (P_4 - P_3)^{\mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} \\ + (P_1 - P_2)^{\mu_4} (P_4 - P_3)^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_2} - 2P_1^{\mu_2} P_4^{\mu_3} g^{\mu_1 \mu_4} + 2P_4^{\mu_3} P_2^{\mu_1} g^{\mu_4 \mu_2} - 2P_2^{\mu_1} P_3^{\mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} \\ + 2P_3^{\mu_4} P_1^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3}] - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} + g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4}$$

$$(S43)' = -\frac{1}{P_1 P_4} \left\{ (-2P_1 P_3) g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_3 \mu_2} + [(-P_4)^{\mu_1} (P_3 - P_2)^{\mu_4} + P_1^{\mu_4} (P_3 - P_2)^{\mu_1}] g^{\mu_3 \mu_2} \right. \\ \left. + [(P_1 - P_4)^{\mu_3} P_3^{\mu_2} + (P_1 - P_4)^{\mu_2} (-P_2)^{\mu_3}] g^{\mu_1 \mu_4} - 2P_1^{\mu_4} P_3^{\mu_2} g^{\mu_1 \mu_3} + 2P_3^{\mu_2} P_4^{\mu_1} g^{\mu_3 \mu_4} \right. \\ \left. - 2P_4^{\mu_1} P_2^{\mu_3} g^{\mu_4 \mu_2} + 2P_2^{\mu_3} P_1^{\mu_4} g^{\mu_1 \mu_2} \right\} + g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_3 \mu_2} + g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{P_1 P_2} \left\{ (-2P_1 P_4) g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} + [(-P_2)^{M_1} (P_4 - P_3)^{M_2} + P_1^{M_2} (P_4 - P_3)^{M_1}] g^{M_4 M_3} \right. \\
 & \quad + [(P_1 - P_2)^{M_4} P_4^{M_3} - (P_1 - P_2)^{M_3} P_3^{M_4}] g^{M_1 M_2} - 2P_1^{M_2} P_4^{M_3} g^{M_1 M_4} + 2P_4^{M_3} P_2^{M_1} g^{M_4 M_2} \\
 & \quad \left. - 2P_2^{M_1} P_3^{M_4} g^{M_2 M_3} + 2P_3^{M_4} P_1^{M_2} g^{M_1 M_3} \right\} - g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} - g^{M_1 M_4} g^{M_2 M_3} + g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (S43)'' &= g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} \left\{ -\frac{2P_1 P_4}{P_1 P_2} - 2 \right\} + g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4} \{ 2 \} + g^{M_1 M_4} g^{M_2 M_3} \left\{ \frac{2P_1 P_3}{P_1 P_4} \right\} \\
 & + g^{M_1 M_2} \left\{ -2 \frac{P_2^{M_3} P_1^{M_4}}{P_1 P_4} + \frac{(P_1 - P_2)^{M_4} P_4^{M_3} - (P_1 - P_2)^{M_3} P_3^{M_4}}{P_1 P_2} \right\} + g^{M_1 M_3} \left\{ \frac{2P_1^{M_4} P_3^{M_2}}{P_1 P_4} + \frac{2P_3^{M_4} P_1^{M_2}}{P_1 P_2} \right\} \\
 & + g^{M_1 M_4} \left\{ \frac{(P_1 - P_4)^{M_2} P_2^{M_3} - (P_1 - P_4)^{M_3} P_3^{M_2}}{P_1 P_4} - 2 \frac{P_1^{M_2} P_4^{M_3}}{P_1 P_2} \right\} + g^{M_2 M_3} \left\{ \frac{P_4^{M_1} (P_3 - P_2)^{M_4} - P_1^{M_4} (P_3 - P_2)^{M_1}}{P_1 P_4} - 2 \frac{P_2^{M_1} P_3^{M_4}}{P_1 P_2} \right\} \\
 & + g^{M_2 M_4} \left\{ 2 \frac{P_4^{M_1} P_3^{M_2}}{P_1 P_4} + 2 \frac{P_3^{M_3} P_2^{M_1}}{P_1 P_2} \right\} + g^{M_3 M_4} \left\{ -2 \frac{P_2^{M_2} P_4^{M_1}}{P_1 P_4} + \frac{P_1^{M_2} (P_4 - P_3)^{M_1} - P_2^{M_1} (P_4 - P_3)^{M_2}}{P_1 P_2} \right\}
 \end{aligned}$$

上式の対称不変性は4重に $(P_1^{M_1}, P_2^{M_2}, P_3^{M_3}, P_4^{M_4})$ check 可同位群 $P_1^{M_1} \in G$ にて

$$(S44) [\Gamma(1342) - \Gamma(1423)] P_{1,1}$$

$$\begin{aligned}
 &= g^{M_3 M_4} \left\{ -\left(\frac{2P_1 P_4}{P_1 P_2} + 2\right) P_1^{M_2} - 2P_3^{M_2} + P_1^{M_2} \frac{(P_4 - P_3) \cdot P_1}{P_1 P_2} - (P_4 - P_3)^{M_2} \right\} \\
 & + g^{M_2 M_4} \left\{ 2P_1^{M_3} + 2P_2^{M_3} + 2P_4^{M_3} \right\} + g^{M_2 M_3} \left\{ \frac{2P_1 P_2}{P_1 P_4} P_1^{M_4} + (P_3 - P_2)^{M_4} - P_1^{M_4} \frac{(P_3 - P_2) P_1}{P_1 P_4} - 2P_3^{M_4} \right\} \\
 & - 2 \frac{P_1^{M_2} P_2^{M_3} P_1^{M_4}}{P_1 P_4} + \frac{P_1^{M_2} P_4^{M_3} (P_1 - P_2)^{M_4} - P_1^{M_2} (P_1 - P_2)^{M_3} P_3^{M_4}}{P_1 P_2} + 2 \frac{P_3^{M_2} P_1^{M_3} P_1^{M_4}}{P_1 P_4} + 2 \frac{P_1^{M_2} P_1^{M_3} P_3^{M_4}}{P_1 P_2} \\
 & + \frac{(P_1 - P_2)^{M_2} P_2^{M_3} P_1^{M_4} - P_3^{M_2} (P_1 - P_2)^{M_3} P_1^{M_4}}{P_1 P_4} - 2 \frac{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}}{P_1 P_2} \\
 &= g^{M_3 M_4} \left\{ -(P_1 + P_3 + P_4)^{M_2} \right\} + g^{M_2 M_4} \left\{ 2(P_1 + P_2 + P_4)^{M_3} \right\} + g^{M_2 M_3} \left\{ -(P_1 + P_2 + P_3)^{M_4} \right\} \\
 & + \frac{1}{P_1 P_4} \left\{ -\cancel{P_1^{M_2} P_2^{M_3} P_1^{M_4}} + \cancel{P_3^{M_2} P_1^{M_3} P_1^{M_4}} + \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} - \cancel{P_4^{M_2} P_3^{M_3} P_1^{M_4}} - \cancel{P_3^{M_2} P_1^{M_3} P_1^{M_4}} + \cancel{P_3^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} \right\} \\
 & + \frac{1}{P_1 P_2} \left\{ \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} - \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} - \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} + \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} + \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} - \cancel{P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (544)' &= g^{\mu_3 \mu_4} (p_2^{\mu_2}) + g^{\mu_2 \mu_4} (-2p_3^{\mu_3}) + g^{\mu_2 \mu_3} (p_4^{\mu_4}) \\
 &+ \frac{1}{p_1 p_4} \left\{ \underbrace{-(p_1+p_4)^{\mu_2} p_3^{\mu_3} p_1^{\mu_4}}_{\hookrightarrow (p_2+p_3)^{\mu_2} \rightarrow p_3^{\mu_2}} + p_3^{\mu_2} \underbrace{(p_1+p_4)^{\mu_3} p_1^{\mu_4}}_{\hookrightarrow (-p_2-p_3)^{\mu_3} \rightarrow (-p_2)^{\mu_3}} \right\} \\
 &+ \frac{1}{p_1 p_2} \left\{ -p_1^{\mu_2} p_4^{\mu_3} \underbrace{(p_2+p_1)^{\mu_4}}_{\hookrightarrow (-p_3+p_4)^{\mu_4} \rightarrow (-p_3)^{\mu_4}} + p_1^{\mu_2} \underbrace{(p_2+p_1)^{\mu_3} p_3^{\mu_4}}_{\hookrightarrow (-p_3-p_4)^{\mu_3} \rightarrow (-p_4)^{\mu_3}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (544)'' &= g^{\mu_3 \mu_4} (p_2^{\mu_2}) + g^{\mu_2 \mu_4} (-2p_3^{\mu_3}) + g^{\mu_2 \mu_3} (p_4^{\mu_4}) \\
 &+ \frac{1}{p_1 p_4} (p_2^{\mu_2} p_3^{\mu_3} p_1^{\mu_4} - p_3^{\mu_2} p_2^{\mu_3} p_1^{\mu_4}) + \frac{1}{p_1 p_2} (p_1^{\mu_2} p_4^{\mu_3} p_3^{\mu_4} - p_1^{\mu_2} p_3^{\mu_3} p_3^{\mu_4})
 \end{aligned}$$

ここで、QCDのゲージ不変性は、 $\epsilon^{\mu_i}(p_i, \lambda_i) \rightarrow p_i^{\mu_i}$ の変換を1にするとき、他の全てのクォークは $p_i^{\mu_i} \epsilon_{\mu_i}(p_i, \lambda_i) = 0$ ($i=2,3,4$) を満たすときにだけ、ゼロを与えることに気をつけてください。式としては

$$(545) \quad [\Gamma(1342) - \Gamma(1423)]^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}^*(p_4, \lambda_4) = 0$$

が (544)' の導かれるわけです。これが QED [U(1)ゲージ理論] の Ward 則と全く異なる点で、私の講義の最重要ポイントの一つです。QED では何れは $\gamma \rightarrow \gamma$ 振幅は 1-loop 振幅ですか。それを

$$(546) \quad M = \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}^*(p_4, \lambda_4)$$

と表記すると、散乱振幅の U(1)ゲージ不変性は

$$(547) \quad \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{1\mu_1} = \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{2\mu_2} = \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{3\mu_3} = \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{4\mu_4} = 0$$

を導きます。(545) と (547) の違 は、可換ゲージ理論と非可換ゲージ理論の違 は

根ざ(てあり), 非可換ゲージ理論では共変ゲージの摂動論がユニタリ-
を満たすたのには ゴースト を導入することが不可避であることの起源です。

もう少し説明しますね, (547)を満たす QED の振幅 (546) の二重スピン和は,

$$(548) \sum_{spin} |M_{QED} (546)|^2 = \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \Gamma^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 *} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\nu_1}^*(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\nu_2}^*(p_2, \lambda_2) \\ \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\nu_3}(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}(p_4, \lambda_4) \epsilon_{\nu_4}^*(p_4, \lambda_4) \\ = \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \Gamma^{\nu_1 \nu_2 \nu_3 \nu_4 *} (-g_{\mu_1 \nu_1}) (-g_{\mu_2 \nu_2}) (-g_{\mu_3 \nu_3}) (-g_{\mu_4 \nu_4})$$

Ward 則 (547) の結果, 光子のスピン和

↑ QED の場合

$$(549) \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(p, \lambda) \epsilon_{\nu}^*(p, \lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} n_{\nu} + p_{\nu} n_{\mu}}{p \cdot n} \quad (\text{light-cone gauge}) \\ n^2 = 0$$

を $-g_{\mu\nu}$ で代行できるのです。またこれは, Feynman ツー-ツのループ計算を
しても, ユニタリ-が保たれることを保証しています。一方 QCD の Ward 則

(BRS 則) は (547) ではなく [振幅 (546) を $gg \rightarrow gg$ 振幅と思ふと]

$$(550) \left\{ \begin{array}{l} \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} p_{\mu_1} \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\mu_3}(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}(p_4, \lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) p_{\mu_2} \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}^*(p_4, \lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) p_{\mu_3} \epsilon_{\mu_4}^*(p_4, \lambda_4) = 0 \\ \Gamma^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) p_{\mu_4} = 0 \end{array} \right.$$

を導きます。 $p^{\mu} (-g_{\mu\nu}) = -p_{\nu} \neq 0$ ですから, (548) の様々な置か換えはできます。

スピン和で $(-g_{\mu\nu})$ の置か換えかできるのは 1774オン についてだけ となります。 //

さて、ゲージ不変性が (544)'' (545) で証明されたので、振幅 (542)-(543)'' を求めます。[$\epsilon_{\mu_2}(p_2) \rightarrow p_{2\mu_2}$ 等のテストはしていいから、(544)のテストで、(543)'' 式の全ての項が関与していることから、(543)'' に誤りが無いことは既に確信がもてるのです。] (542) 式を

$$(551) \quad M(1234) = \Gamma((543)'')^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1}(p_1, \lambda_1) \epsilon_{\mu_2}(p_2, \lambda_2) \epsilon_{\mu_3}^*(p_3, \lambda_3) \epsilon_{\mu_4}^*(p_4, \lambda_4)$$

$$(551)' \quad = M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \quad (\text{全ての } \lambda_i \text{ は物理的 } \Lambda \text{ の } \tau_i -)$$

$$(551)'' \quad = M_{\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4} \quad (\text{終ケルオンの } \Lambda \text{ の } \tau_i - \text{ を逆 sign にとる})$$

と表記して、具体的に Λ の振幅を求める。(551)' と (552)'' の様に

Λ -添え字が上下にある場合は全て物理的 Λ 、添え字が全て下の

ときは終ケルオンの Λ の逆サインをとることとする。重心系で

$$(552) \quad \begin{aligned} P_1^\mu &= E(1, 0, 0, 1) & P_1 P_2 &= P_3 P_4 = 2E^2 \\ P_2^\mu &= E(1, 0, 0, -1) & P_1 P_3 &= P_2 P_4 = -E^2(1 - \cos\theta) \\ P_3^\mu &= -E(1, \sin\theta, 0, \cos\theta) (= -K_3^\mu) & P_1 P_4 &= P_2 P_3 = -E^2(1 + \cos\theta) \\ P_4^\mu &= -E(1, -\sin\theta, 0, -\cos\theta) (= -K_4^\mu) \end{aligned}$$

$$(553) \quad \begin{aligned} \epsilon_1^\mu &= \epsilon^\mu(p_1, \lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda_1, -i, 0) & ; (333) \\ \epsilon_2^\mu &= \epsilon^\mu(p_2, \lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \lambda_2, -i, 0) \\ \epsilon_3^\mu &= \epsilon^\mu(p_3, \lambda_3)^* \equiv \epsilon^\mu(k_3, \lambda_3)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda_3 \cos\theta, i, \lambda_3 \sin\theta) & ; (332) \\ \epsilon_4^\mu &= \epsilon^\mu(p_4, \lambda_4)^* \equiv \epsilon^\mu(k_4, \lambda_4)^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda_4 \cos\theta, -i, \lambda_4 \sin\theta) \end{aligned}$$

$$(554) \quad \text{HELAS } \tau\text{-ツ} : \begin{aligned} P_2 \cdot \epsilon_1 &= P_1 \cdot \epsilon_2 = P_4 \cdot \epsilon_3 = P_3 \cdot \epsilon_4 = 0 \\ P_3 \cdot \epsilon_1 &= -P_4 \cdot \epsilon_1 = -\lambda_1 \sin\theta (E/\sqrt{2}) \\ P_3 \cdot \epsilon_2 &= -P_4 \cdot \epsilon_2 = \lambda_2 \sin\theta (E/\sqrt{2}) \\ P_1 \cdot \epsilon_3 &= -P_2 \cdot \epsilon_3 = -\lambda_3 \sin\theta (E/\sqrt{2}) \\ P_1 \cdot \epsilon_4 &= -P_2 \cdot \epsilon_4 = -\lambda_4 \sin\theta (E/\sqrt{2}) \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 (555) \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 \lambda_2 + 1) = \delta_{\lambda_1 \lambda_2} & \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 &= -\frac{1}{2} (1 + \lambda_1 \lambda_3 \cos \theta) \\
 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 &= \frac{1}{2} (-\lambda_3 \lambda_4 - 1) = -\delta_{\lambda_3 \lambda_4} & \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 &= -\frac{1}{2} (1 - \lambda_2 \lambda_3 \cos \theta) \\
 & & \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_1 \lambda_4 \cos \theta) \\
 & & \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 &= \frac{1}{2} (1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos \theta)
 \end{aligned}$$

この準備をすれば何とかなると思えます。まず

$$\begin{aligned}
 (556) \quad M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} &= \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left[-\frac{-2E^2(1+c)}{2E^2} - 2 \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 [2] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{-2E^2(1-c)}{-E^2(1+c)} \right] \\
 &+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \left[-2 \frac{P_2 \cdot \epsilon_3 P_1 \cdot \epsilon_4}{-E^2(1+c)} \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{2 P_1 \cdot \epsilon_4 P_3 \cdot \epsilon_2}{-E^2(1+c)} \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{-P_4 \cdot \epsilon_2 P_3 \cdot \epsilon_3 - P_1 \cdot \epsilon_3 P_3 \cdot \epsilon_2}{-E^2(1+c)} \right] \\
 &+ \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{P_4 \cdot \epsilon_1 (-P_2 \cdot \epsilon_4) P_1 \cdot \epsilon_4 P_3 \cdot \epsilon_1}{-E^2(1+c)} \right] + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{2 P_4 \cdot \epsilon_1 P_2 \cdot \epsilon_3}{-E^2(1+c)} \right] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{-2 P_3 \cdot \epsilon_2 P_4 \cdot \epsilon_1}{-E^2(1+c)} \right] \\
 &= \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [1+c-2] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 [2] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[2 \frac{1-c}{1+c} \right] \\
 &+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \left[\frac{\lambda_3 s \cdot (-\lambda_4 s)}{1+c} \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \left[-\frac{(-\lambda_4 s)(\lambda_2 s)}{1+c} \right] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{(-\lambda_2 s)(\lambda_3 s) + (-\lambda_3 s)(\lambda_2 s)}{2(1+c)} \right] \\
 &+ \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{(\lambda_1 s)(-\lambda_4 s) - (-\lambda_4 s)(-\lambda_1 s)}{-2(1+c)} \right] + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left[-\frac{(\lambda_1 s)(\lambda_3 s)}{1+c} \right] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{(\lambda_2 s)(\lambda_1 s)}{1+c} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (556)' &= \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [-1+c] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 [2] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{4}{1+c} - 2 \right] \\
 &+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 [-\lambda_3 \lambda_4 (1-c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 [\lambda_2 \lambda_4 (1-c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 [-\lambda_2 \lambda_3 (1-c)] \\
 &+ \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 [\lambda_1 \lambda_4 (1-c)] + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 [-\lambda_1 \lambda_3 (1-c)] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [\lambda_1 \lambda_2 (1-c)] \\
 &= \frac{4}{1+c} [\epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3] + 2 [\epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 - \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3] \\
 &+ (1-c) \left[-\epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 - \lambda_3 \lambda_4 \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 + \lambda_2 \lambda_4 \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 - \lambda_2 \lambda_3 \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_1 \lambda_4 \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 - \lambda_1 \lambda_3 \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 + \lambda_1 \lambda_2 \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (556)'' &= -\frac{1}{1+c} (1 - \lambda_1 \lambda_4 c)(1 - \lambda_2 \lambda_3 c) - \frac{1}{2} [(1 + \lambda_1 \lambda_3 c)(1 + \lambda_2 \lambda_4 c) - (1 - \lambda_1 \lambda_4 c)(1 - \lambda_2 \lambda_3 c)] \\
 &+ (1-c) \left[\delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_3 \lambda_4} - \delta_{\lambda_1 \lambda_2} \lambda_3 \lambda_4 - \delta_{\lambda_3 \lambda_4} \lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_4 (1 + \lambda_1 \lambda_3 c) - \frac{1}{2} \lambda_2 \lambda_3 (1 - \lambda_1 \lambda_4 c) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_4 (1 - \lambda_2 \lambda_3 c) - \frac{1}{2} \lambda_1 \lambda_3 (1 + \lambda_2 \lambda_4 c) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (557) M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda} &= -\frac{1}{1+c} (1-c)^2 - \frac{1}{2} [(1+c)^2 - (1-c)^2] + (1-c) [-1 - 1 + 1 - \frac{1}{2}(1+c+1-c+1-c+1+c)] \\
 &= -\frac{1}{1+c} [2 - (1+c)]^2 - \frac{1}{2} [4c] + (1-c) [-1 - \frac{1}{2}(4)] \\
 &= -\frac{1}{1+c} [4 - 4(1+c) + (1+c)^2] - 2c + (1-c)(-3) \\
 &= -\frac{4}{1+c} + 4 - 1 - c - 2c - 3 + 3c \\
 &= -\frac{4}{1+c}
 \end{aligned}$$


これは「か」にも正(そ)に見えますね。(でも誰か check して下さい。Mad Graphとか)

次に

$$\begin{aligned}
 (558) M_{\lambda\lambda}^{-\lambda-\lambda} &= -\frac{1}{1+c} (1+c)^2 - \frac{1}{2} [(1-c)^2 - (1+c)^2] + (1-c) [-1 - 1 + 1 + \frac{1}{2}(1-c+1+c+1+c+1-c)] \\
 &= -(1+c) - \frac{1}{2} [-4c] + (1-c) [-1 + \frac{1}{2}(4)] \\
 &= -1 - c + 2c + 1 - c \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

これは「バンザーイ!」ものです。(558)式を(551)"の notation で表わすと、

$$(559) M_{\lambda\lambda}^{-\lambda-\lambda} = M_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$$

これが「かの有名な「全てのハリシテ-が等しい」状態の振幅はゼロである」定理の一番簡単な例です。振幅(559)は入射粒子のハリシテ-が全てフリップしているので、「完全にハリシテ-保存が破れている振幅」と叫びます。(557)はハリシテ-保存振幅です。「ハリシテ-保存が最大に破れているゼロである振幅」のことを Maximal Helicity Violating amplitude

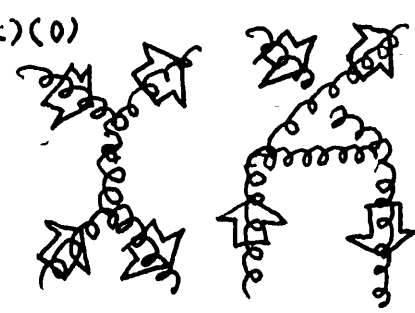
と呼び、多グルオン振幅の系統的な計算の鍵だと思っております。

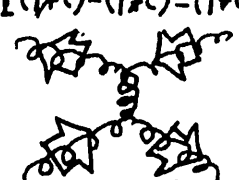
残りの4グルオン振幅の場合のMHV振幅は実はHelicity Conservingです。

$$\begin{aligned}
 (560) M_{\lambda\lambda}^{-\lambda\lambda} &= M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1-c)(1+c) - \frac{1}{2}[(1-c)(1+c) - (1-c)(1+c)] \\
 &\quad + (1-c)[-0 - (-1) + 0 - \frac{1}{2}[(1-c) - (1-c) + (1+c) - (1+c)]] \\
 &= -1+c + (1-c)[1 - \frac{1}{2}(0)] = 0
 \end{aligned}$$

$$(560') M_{\lambda\lambda}^{\lambda-\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = 0$$

たかすです。ゼロなのは、 Λ と $\bar{\pi}$ -保存の(557)と

$$\begin{aligned}
 (561) M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda} &= M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1-c)(1-c) - \frac{1}{2}[(1-c)^2 - (1-c)^2] + (1-c)[- \frac{1}{2}(-1+c+1-c+1-c-1+c)] \\
 &= -\frac{1}{1+c}(1-c)^2 - \frac{1}{2} \cdot (0) - \frac{1}{2}(1-c)(0) \\
 &= -\frac{(1-c)^2}{1+c} \\
 &= -\frac{4}{1+c} + 4 - 1-c \\
 &= -\frac{4}{1+\cos\theta} + 3 - \cos\theta
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 (562) M_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda} &= M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda} = -\frac{1}{1+c}(1+c)^2 - \frac{1}{2}[(1+c)^2 - (1+c)^2] + (1-c)(-\frac{1}{2})[(1+c) - (1+c) - (1+c) + (1+c)] \\
 &= -(1+\cos\theta)
 \end{aligned}$$


となります。(557), (561), (562) が正(負)かどうかわからないのか(HELASで check

(2下さいわ)、(557)は u-channel で Λ と $\bar{\pi}$ -保存、(561)は u-channel と s-channel

で Λ と $\bar{\pi}$ -保存、(562)は s-channel で Λ と $\bar{\pi}$ -保存 であることは言葉でわかります。

$\lambda=+$ 振幅と $\lambda=-$ 振幅が等しいのは QCD の Parity 不変性の帰結です。

カラ-因子の計算則

ここで、(533 a, b, c) の因子を計算するときに使ったル-ルを整理しておきます。

全ては Fierz 則 (314) (p.109) の帰結です。次の notation を使います。

$$(563) \quad a, b, c \dots T^a, T^b, T^c \text{ 等の generator} \\ A, B, C \dots A = abc = T^a T^b T^c \text{ 等の matrix} \\ (A) = \text{tr}(A)$$

くり返し文字は足しあがる、というル-ルを使うと Fierz 則 ⁽³¹⁴⁾ は

$$(564) \quad a_{ij} a_{kl} = T_F \left(\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) \dots (314)$$

で、色々な多くのル-ルが導かれます。

$$(567a) \quad a a = a_{ij} a_{jk} = T_F \left(N - \frac{1}{N} \right) \delta_{ik} \equiv C_F \delta_{ik}$$

$$(567b) \quad a A a = a_{ij} A_{jk} a_{kl} = T_F \left[(A) \delta_{il} - \frac{1}{N} A_{il} \right]$$

$$(567c) \quad (A a B a) = T_F \left[(A)(B) - \frac{1}{N} (AB) \right]$$

$$(567d) \quad (A a)(B a) = T_F \left[(AB) - \frac{1}{N} (A)(B) \right]$$

上のル-ルと規格条件

$$(568) \quad (a a) = T_F (N^2 - 1)$$

を用いることで、全て計算を簡単に実行できました。

20年くらい前は良く覚えていたんですけど、ずいぶん計算まちがいを

したので、ル-ルを整理しておきました。役にたててください。 //

さて、もう一つの独立な振幅 $\hat{M}(1243)$ [p.179 (535)-(539)] を計算 (たまたまはたまたま) いたす。 $\hat{M}(1234)$ を $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ と表わした (551) にたよって

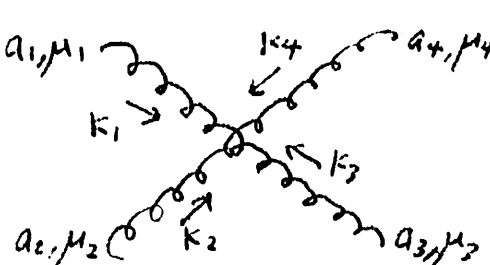
$$(569) \begin{cases} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv \hat{M}(1234) = (\Gamma(1342) - \Gamma(1423))^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1(p_1, \lambda_1)} \epsilon_{\mu_2(p_2, \lambda_2)} \epsilon_{\mu_3(p_3, \lambda_3)}^* \epsilon_{\mu_4(p_4, \lambda_4)}^* \\ N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv \hat{M}(1243) = (\Gamma(1423) - \Gamma(1234))^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{\mu_1(p_1, \lambda_1)} \epsilon_{\mu_2(p_2, \lambda_2)} \epsilon_{\mu_3(p_3, \lambda_3)}^* \epsilon_{\mu_4(p_4, \lambda_4)}^* \end{cases}$$

の様に $N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ を定義します。 $\Gamma(ijkl)^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ との対応は p.172 (527b) と p.170 (517)-(518) です。 カラー-因子の計算はできている [p.181 (541)] ので、

あとは $N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ を求めるだけで済みます。 p.169-170のカラー-因子とフeynman図の対応から、

$$(570) \begin{cases} M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv \hat{M}(1234) \sim \Gamma_u - \Gamma_s \dots \begin{array}{ccc} \text{Diagram 1} & - & \text{Diagram 2} \\ \text{Diagram 3} & + & \text{Diagram 4} \end{array} \\ N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} \equiv \hat{M}(1243) \sim \Gamma_s - \Gamma_t \dots \begin{array}{ccc} \text{Diagram 5} & - & \text{Diagram 6} \\ \text{Diagram 7} & + & \text{Diagram 8} \end{array} \end{cases}$$

ここで ~~この~~ 項は それぞれのカラー-因子成分が寄与する。 Feynman 則 (294) p.105 を標準カラー-ボース $T(ijkl) \equiv \frac{1}{16} \text{tr}(T^a_i T^a_j T^a_k T^a_l)$ で書いておくとも良いかも知れません。

$$(571) = (294) \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{a_1 a_2 a_3 a_4} = i g^2 \left\{ [T(1234) + T(1234)^*] [2g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}] \right. \\ \left. + [T(1243) + T(1243)^*] [2g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} - g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4}] \right. \\ \left. + [T(1324) + T(1324)^*] [2g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}] \right\}$$


p.170 (518) と p.181 (543) を参考に、 $\Gamma(1423) - \Gamma(1234)$ を計算します。

$$\begin{aligned}
 (572) \quad \Gamma(1423) - \Gamma(1234) &= -\frac{1}{P_1 P_2} \left\{ (-2P_1 P_4) g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} + [-P_2^{M_1} (P_4 - P_3)^{M_2} + P_1^{M_2} (P_4 - P_3)^{M_1}] g^{M_4 M_3} \right. \\
 &\quad + [(P_1 - P_2)^{M_4} P_4^{M_3} - (P_1 - P_2)^{M_3} P_4^{M_4}] g^{M_1 M_2} - 2P_1^{M_2} P_4^{M_3} g^{M_1 M_4} + 2P_4^{M_3} P_2^{M_1} g^{M_2 M_4} \\
 &\quad \left. - 2P_2^{M_1} P_3^{M_4} g^{M_3 M_3} + 2P_3^{M_4} P_1^{M_2} g^{M_1 M_3} \right\} + g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} - g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4} + g^{M_1 M_4} g^{M_2 M_3} \\
 &\quad + \frac{1}{P_1 P_3} \left\{ -2P_1 P_2 g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4} + [-P_3^{M_1} (P_2 - P_4)^{M_3} + P_1^{M_3} (P_2 - P_4)^{M_1}] g^{M_2 M_4} \right. \\
 &\quad + [(P_1 - P_3)^{M_2} P_2^{M_4} - (P_1 - P_3)^{M_4} P_2^{M_2}] g^{M_1 M_3} - 2P_1^{M_2} P_2^{M_4} g^{M_1 M_2} + 2P_2^{M_4} P_3^{M_1} g^{M_2 M_3} \\
 &\quad \left. - 2P_3^{M_1} P_4^{M_2} g^{M_3 M_4} + 2P_4^{M_2} P_1^{M_3} g^{M_1 M_4} \right\} - g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4} - g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} + g^{M_1 M_4} g^{M_2 M_3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (572)' &= g^{M_1 M_2} g^{M_3 M_4} \left\{ \frac{2P_1 P_4}{P_1 P_2} \right\} + g^{M_1 M_3} g^{M_2 M_4} \left\{ -\frac{2P_1 P_2}{P_1 P_3} - 2 \right\} + g^{M_1 M_4} g^{M_2 M_3} \left\{ 2 \right\} \\
 &\quad + g^{M_1 M_2} \left\{ \frac{(P_1 - P_2)^{M_3} P_3^{M_4} - (P_1 - P_2)^{M_4} P_3^{M_3}}{P_1 P_2} - \frac{2P_1^{M_3} P_2^{M_4}}{P_1 P_3} \right\} + g^{M_1 M_3} \left\{ -\frac{2P_1^{M_2} P_2^{M_4}}{P_1 P_2} + \frac{(P_1 - P_3)^{M_2} P_2^{M_4} - P_4^{M_2} (P_1 - P_3)^{M_4}}{P_1 P_3} \right\} \\
 &\quad + g^{M_1 M_4} \left\{ \frac{2P_1^{M_2} P_4^{M_3}}{P_1 P_2} + \frac{2P_4^{M_2} P_1^{M_3}}{P_1 P_3} \right\} + g^{M_2 M_3} \left\{ \frac{2P_2^{M_1} P_3^{M_4}}{P_1 P_2} + \frac{2P_3^{M_1} P_2^{M_4}}{P_1 P_3} \right\} \\
 &\quad + g^{M_2 M_4} \left\{ \frac{2P_2^{M_1} P_4^{M_3}}{-P_1 P_2} - \frac{P_3^{M_1} (P_2 - P_4)^{M_3} - (P_2 - P_4)^{M_1} P_1^{M_3}}{P_1 P_3} \right\} + g^{M_3 M_4} \left\{ \frac{P_2^{M_1} (P_4 - P_3)^{M_2} - (P_4 - P_3)^{M_1} P_1^{M_2}}{P_1 P_2} - \frac{2P_3^{M_1} P_4^{M_2}}{P_1 P_3} \right\}
 \end{aligned}$$

ゲージ不変性のテスト

$$\begin{aligned}
 (573) \quad [\Gamma(1423) - \Gamma(1234)]^{M_1 M_2 M_3 M_4} P_{1 M_1} &= g^{M_3 M_4} \left\{ \frac{2P_1 P_4}{P_1 P_2} P_1^{M_2} + (P_4 - P_3)^{M_2} - \frac{(P_4 - P_3) \cdot P_1}{P_1 P_2} P_1^{M_2} - 2P_4^{M_2} \right\} + g^{M_2 M_3} \left\{ 2P_1^{M_4} + 2P_3^{M_4} + 2P_2^{M_4} \right\} \\
 &\quad + g^{M_2 M_4} \left\{ -\frac{2P_1 P_2}{P_1 P_3} P_1^{M_3} - 2P_1^{M_3} - 2P_4^{M_3} - (P_2 - P_4)^{M_3} + \frac{(P_2 - P_4) \cdot P_1}{P_1 P_3} P_1^{M_3} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{P_1 P_2} \left\{ P_1^{M_2} (P_1 - P_2)^{M_3} P_3^{M_4} - P_1^{M_2} P_4^{M_3} (P_1 - P_2)^{M_4} - 2P_1^{M_2} P_1^{M_3} P_3^{M_4} + 2P_1^{M_2} P_4^{M_3} P_1^{M_4} \right\} \\
 &\quad + \frac{1}{P_1 P_3} \left\{ -2P_1^{M_2} P_1^{M_3} P_2^{M_4} + (P_1 - P_3)^{M_2} P_1^{M_3} P_2^{M_4} - P_4^{M_2} P_1^{M_3} (P_1 - P_3)^{M_4} + 2P_4^{M_2} P_1^{M_3} P_1^{M_4} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(573)' &= g^{\mu_3 \mu_4} \left\{ \frac{(P_4 + P_3) \cdot P_1}{P_1 P_2} P_1^{\mu_2} - P_3^{\mu_2} - P_4^{\mu_2} \right\} + g^{\mu_2 \mu_3} \left\{ 2(P_1 + P_2 + P_3)^{\mu_4} \right\} \\
&+ g^{\mu_2 \mu_4} \left\{ -\frac{(P_2 + P_4) \cdot P_1}{P_1 P_3} P_1^{\mu_3} - 2P_1^{\mu_3} - P_2^{\mu_3} - P_4^{\mu_3} \right\} \\
&+ \frac{1}{P_1 P_2} \left\{ P_1^{\mu_2} \underbrace{(-P_1 - P_2)^{\mu_3}}_{\hookrightarrow (P_3 + P_4)^{\mu_3}} P_3^{\mu_4} + P_1^{\mu_2} P_4^{\mu_3} \underbrace{(P_1 + P_2)^{\mu_4}}_{-(P_3 + P_4)^{\mu_4}} \right\} \\
&+ \frac{1}{P_1 P_3} \left\{ \underbrace{(-P_1 - P_3)^{\mu_2}}_{\hookrightarrow (P_2 + P_4)^{\mu_2}} P_1^{\mu_3} P_2^{\mu_4} - P_4^{\mu_2} P_1^{\mu_3} \underbrace{(-P_1 - P_3)^{\mu_4}}_{\hookrightarrow (P_2 + P_4)^{\mu_4}} \right\} \\
&\rightarrow g^{\mu_3 \mu_4} \left\{ -\underbrace{(P_1 + P_3 + P_4)^{\mu_2}}_{\hookrightarrow P_2^{\mu_2} \rightarrow 0} \right\} + 2g^{\mu_2 \mu_3} \left\{ 2\underbrace{(P_1 + P_2 + P_3)^{\mu_4}}_{\hookrightarrow P_4^{\mu_4} \rightarrow 0} \right\} + g^{\mu_2 \mu_4} \left\{ -\underbrace{(P_1 + P_2 + P_4)^{\mu_3}}_{\hookrightarrow P_3^{\mu_3} \rightarrow 0} \right\} \\
&+ \frac{1}{P_1 P_2} \left\{ P_1^{\mu_2} P_4^{\mu_3} P_3^{\mu_4} - P_1^{\mu_2} P_4^{\mu_3} P_3^{\mu_4} \right\} + \frac{1}{P_1 P_3} \left\{ P_4^{\mu_2} P_1^{\mu_3} P_2^{\mu_4} - P_4^{\mu_2} P_1^{\mu_3} P_2^{\mu_4} \right\} \\
&\rightarrow 0
\end{aligned}$$

(545)と同じように、(572)' の " " 不変性の証明ができた。(552)-(554) を使って。

$$(574) N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = \Gamma((572)')^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} \epsilon_{1\mu_1} \epsilon_{2\mu_2} \epsilon_{3\mu_3} \epsilon_{4\mu_3}$$

$$\begin{aligned}
(574)' &= \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [-(1+c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{4}{1-c} - 2 \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 [2] \\
&+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \left[\frac{2P_1 \cdot \epsilon_3 P_2 \cdot \epsilon_4}{E^2(1-c)} \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{-P_3 \cdot \epsilon_2 P_2 \cdot \epsilon_4 - P_4 \cdot \epsilon_2 P_1 \cdot \epsilon_4}{-E^2(1-c)} \right] \\
&+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{2P_4 \cdot \epsilon_2 P_1 \cdot \epsilon_3}{-E^2(1-c)} \right] + \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \left[\frac{2P_3 \cdot \epsilon_1 P_2 \cdot \epsilon_4}{-E^2(1-c)} \right] \\
&+ \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{-P_3 \cdot \epsilon_1 P_2 \cdot \epsilon_3 - P_4 \cdot \epsilon_1 P_1 \cdot \epsilon_3}{-E^2(1-c)} \right] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{-2P_3 \cdot \epsilon_1 P_4 \cdot \epsilon_2}{-E^2(1-c)} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(574)'' &= \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [-(1+c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left[\frac{4}{1-c} - 2 \right] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \cdot \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 [2] \\
&+ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 [-\lambda_3 \lambda_4 (1+c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 [\lambda_2 \lambda_4 (1+c)] + \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 [-\lambda_2 \lambda_3 (1+c)] \\
&+ \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 [\lambda_1 \lambda_4 (1+c)] + \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 [-\lambda_1 \lambda_3 (1+c)] + \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 [\lambda_1 \lambda_2 (1+c)]
\end{aligned}$$

(574)'' と (556)' を比較すると、 $c \leftrightarrow -c$ の交換で完全に一致していることが確かである。

p.186 (SSS) に代入すると

$$(574)^{th} N_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = -\frac{1}{1-c} (1+\lambda_1 \lambda_3 c)(1+\lambda_2 \lambda_4 c) + \frac{1}{2} [(1+\lambda_1 \lambda_3 c)(1+\lambda_2 \lambda_4 c) - (1-\lambda_1 \lambda_4 c)(1-\lambda_2 \lambda_3 c)]$$

$$+ (1+c) [\delta_{\lambda_1 \lambda_2} \delta_{\lambda_3 \lambda_4} - \lambda_3 \lambda_4 \delta_{\lambda_1 \lambda_2} - \lambda_1 \lambda_2 \delta_{\lambda_3 \lambda_4}$$

$$- \frac{\lambda_2 \lambda_4}{2} (1+\lambda_1 \lambda_3 c) - \frac{\lambda_2 \lambda_3}{2} (1-\lambda_1 \lambda_4 c) - \frac{\lambda_1 \lambda_4}{2} (1-\lambda_2 \lambda_3 c) - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{2} (1+\lambda_2 \lambda_4 c)]$$

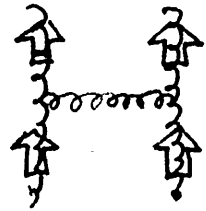
各 λ_i の τ_i -振幅を定めると

$$(575) N_{\lambda \lambda}^{\lambda \lambda} = -\frac{1}{1-c} (1+c)^2 + \frac{1}{2} [(1+c)^2 - (1-c)^2] + (1+c) [-1 - \frac{1+c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1+c}{2}]$$

$$= -\frac{1}{1-c} [4 - 4(1-c) + (1-c)^2] + 2c + (1+c) [-3]$$

$$= -\frac{4}{1-c} + 4 - 1 + c + 2c - 3 - 3c$$

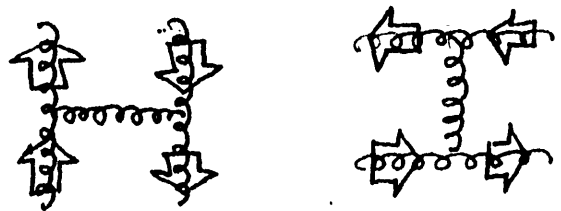
$$= -\frac{4}{1-c}$$



$$(576) N_{\lambda -\lambda}^{\lambda -\lambda} = -\frac{1}{1-c} (1+c)^2 + \frac{1}{2} [(1+c)^2 - (1+c)^2] + (1+c) [-\frac{1+c}{2} + \frac{1+c}{2} + \frac{1+c}{2} - \frac{1+c}{2}]$$

$$= -\frac{(1+c)^2}{1-c}$$

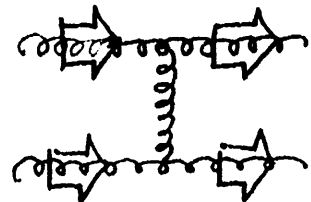
$$= -\frac{4}{1-c} + 3 + c$$



$$(577) N_{\lambda -\lambda}^{-\lambda \lambda} = -\frac{1}{1-c} (1-c)^2 + \frac{1}{2} [(1-c)^2 - (1-c)^2] + (1+c) [\frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} - \frac{1-c}{2} + \frac{1-c}{2}]$$

$$= -(1-c) + 0 + 0$$

$$= -(1-c)$$



それ以外 (575) は t-channel, (577) は s-channel, (576) は t- と s-channel 相対で

λ_i の τ_i -保存. 対応する $M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4}$ 振幅は $\omega \leftrightarrow -\omega$ の関係が成り立つ。
 ((577), (561), (562))

M 振幅のときと全く同じように、ハリッジ-保存を破る振幅は全てゼロで、

49 振幅の場合は MHV 振幅は (575)-(577) の ハリッジ-保存振幅であることが確認できます。 (551)'' と同じ notation で

$$(578) \quad N_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$$

$$(578)' \quad N_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = N_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = N_{\lambda-\lambda\lambda\lambda} = N_{-\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$$

を示すことができます。(くたわちたので宿題にします。) この notation で (575)-(577) は

$$(578)'' \quad N_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda} = (575), \quad N_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda} = (576), \quad N_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = (577)$$

となります。 $-\lambda$ が 2ヶ入っている振幅がゼロでないわけですが、これも

M 振幅の場合と全く同じです。せいかとすかすこと整理しておきます。

$$(579) \quad M_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0 \quad ; (558)$$

$$(579)' \quad M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda\lambda} = M_{-\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0 \quad ; (560), (560)'$$

$$(579)'' \quad M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda} = (557), \quad M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda} = (562), \quad M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = (561)$$

以上の結果は、p.187~188 と p.193 の図で示したように、あたかもグルオンに

フェルミオンのようなハリッジ-保存則が存在するかの様に見えます。実際、

ゼロでない MHV 振幅は 2ヶ $(-\lambda)$ を持たなければならぬことの証明は

$N=1$ 超対称性 QCD になされ、グルオンのハリッジ-保存 と グルオン振幅との

関係も明示されています。(参) M.L. Mangano, S.J. Parke, Phys.Rept.200(1991)

さて、ゼロでない M, N 振幅を (541) に代入すると、断面積が得られます。

$$(580) \sum_{\text{color spin}} \sum |M|^2 = g^4 \cdot 4T_F^2 N^2(N^2-1) \cdot \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4} \left(|M_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4}|^2 + |N_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4}|^2 + \text{Re} M_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4} N_{\lambda_1, \lambda_2}^{\lambda_3, \lambda_4} \right)$$

$$(580)' = g^4 \cdot 4T_F^2 N^2(N^2-1) \cdot \sum_{\lambda=\pm} \left\{ (M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})^2 + (N_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})^2 + (M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda})(N_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda}) \right. \\ \left. + (M_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})^2 + (N_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})^2 + (M_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda})(N_{\lambda-\lambda}^{\lambda-\lambda}) \right. \\ \left. + (M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})^2 + (N_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})^2 + (M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda})(N_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda}) \right\}$$

$$(580)'' = g^4 \cdot 4T_F^2 N^2(N^2-1) \cdot 2 \left\{ \left(\frac{4}{1+c} \right)^2 + \left(\frac{4}{1-c} \right)^2 + \left(\frac{4}{1+c} \right) \left(\frac{4}{1-c} \right) \right. \\ \left. + (1+c)^2 + \frac{(1+c)^4}{(1-c)^2} + (1+c) \frac{(1+c)^2}{(1-c)} \right. \\ \left. + \frac{(1-c)^4}{(1+c)^2} + (1-c)^2 + \frac{(1-c)^2}{(1+c)} (1-c) \right\}$$

$$(580)''' = g^4 \cdot 4T_F^2 N^2(N^2-1) \cdot 2 \left\{ \frac{32}{(1+c)^2} + \frac{32}{(1-c)^2} - \frac{16}{1+c} - \frac{16}{1-c} + 22 + 2c^2 \right\}$$

断面積は

$$(581) d\sigma = \frac{1}{2s} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(N^2-1)^2} \sum_{\text{spin}} \sum_{\text{color}} |M|^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{8\pi} \frac{d\cos\theta}{2}$$

↑ 統計因子 ($-1 < \cos\theta < 1$ にするため.)

$$(582) \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(4\pi d_s)^2}{128\pi s} \cdot \frac{4T_F^2 N^2}{N^2-1} \cdot \left\{ \frac{32}{(1+c)^2} + \frac{32}{(1-c)^2} - \frac{16}{1+c} - \frac{16}{1-c} + 22 + 2c^2 \right\}$$

$$= \frac{4\pi d_s^2}{s} \cdot \frac{4T_F^2 N^2}{N^2-1} \cdot \left\{ \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1-c)^2} - \frac{1}{2(1+c)} - \frac{1}{2(1-c)} + \frac{11+c^2}{16} \right\}$$

$\frac{9}{8}$

カラー因子が $99 \rightarrow 99$ と $99 \rightarrow 99$ の $\frac{2}{9}$ と較べて約 5 倍大きいことに注目。

$gg' \rightarrow gg'$ ($gg \rightarrow gg$), $gg \rightarrow gg$, $gg \rightarrow gg$ のまとめ.

$$(583a) \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)^{gg' \rightarrow gg'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{1}{1-c} + \frac{1}{4} \right\} \quad p.137(402)$$

$$(583b) \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)^{gg \rightarrow gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{3(1-c)} - \frac{1}{3(1+c)} + \frac{1}{4} \right\} \quad p.140(412)$$

$$(583c) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{1-c} + \frac{1}{2} + O(1-c) \right\} \quad \text{同種粒子の「2倍」に注意.}$$

$$(583d) \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)^{gg \rightarrow gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{1-c} + \frac{5}{2} \frac{1}{1+c} - \frac{5}{4} + \frac{5}{8} c \right\} \quad p.168(510)$$

(511) = 23-頁

$$(583e) \left(\frac{d\sigma}{dc} \right)^{gg \rightarrow gg} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{9}{8} \cdot \left\{ \frac{1}{(1-c)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} - \frac{1}{2(1-c)} - \frac{1}{2(1+c)} + \frac{11+c^2}{16} \right\} \quad p.195(582)$$

$$(583f) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{9}{8} \cdot \left\{ \frac{2}{(1-c)^2} - \frac{1}{1-c} + \frac{3}{2} + O(1-c) \right\} \quad \text{同種粒子の「2倍」に注意.}$$

こ43の3素過程が LHC 実験での最重要過程です。全て、technical

グルオン交換の $1/(1-\cos\theta)^2$ の振る舞いを示すと共に、カラー因子を比較的

大きいです。グルオン散乱のカラー因子が約5倍大きいこと覚えておいて

ください。分布関数のたたみ込み積分によるルミノシティ分布(470)が

1/5 になっても high P_T 事象に寄与することを意味します。このため、

ある程度 s の大きな場所でのグルオン分布の精度が重要になります。

(583b) と (583e) の $d\sigma/d\cos\theta$ の表式は、事象生成の積分範囲を他の過程

に与えるため $(-1 < \cos\theta < 1)$ とする(ため)に むりやり $\frac{1}{2}$ 倍してあります。微分

断面積に統計因子が現われるわけでは無いので、角度を定めた
 (例えば $\cos\theta \rightarrow 1$ とか $\cos\theta \rightarrow 0$ とか) 微分断面積を議論する
 場合はまず、「2倍」して、もとの正しい微分断面積にもとさな
 ければなりません。どうも忘れてたので「左さ」ね。もし忘れどろたたら、
 正しい微分断面積の表示を使い、事象生成のときに、正しく、通常に
 体積の半分だけ生成に重複を避けるようにしてください。

$\cos\theta=0$ のときの値も参考になるかもしれませんね。

$$(S84a) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)_{c=0}^{92' \rightarrow 92'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{5}{4}$$

$$(S84b) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)_{c=0}^{92 \rightarrow 92} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{3}\right)$$

p.161 (488)
 「ジェット」として数えるため
 「2倍」しません。

$$(S84c) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)_{c=0}^{92 \rightarrow 92} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{7}{2}$$

$$(S84d) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)_{c=0}^{92 \rightarrow 92} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{27}{16}$$

「ジェット」として数えるもの。
 「2倍」はおりません。

大 P_T ジェット生成については、92 散乱しか 較的有効なのかも
 知りません。(S84b) と (S84d) で正しい微分断面積を $1/2$ で割ったのは、
 それぞれ 9-ジェット と 9 ジェットが 2ヶずつある ためです。92', 92, 92, 92
 にかかわらず、 $\cos\theta=0$ での 2 ジェット生成断面積の大小を比較したか、たためです。

せ。かくですかることで、初めの3に計算した $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$, $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ の断面積もまとのでおきましょう。

$$(585a) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1+c^2}{8} \quad p.108 (305)$$

$$(585b) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{1}{12} \cdot \left\{ \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1+c} - \frac{25+c^2}{16} \right\} \quad \begin{array}{l} p.129 (370) \\ p.123 (353) \\ p.130 (376) \\ p.131 (377) \end{array}$$

$$(585c) \left(\frac{d\sigma}{dc}\right)^{q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \cdot \frac{16}{27} \cdot \left\{ \frac{1}{1-c} + \frac{1}{1+c} - \frac{25+c^2}{16} \right\} \times \frac{1}{2} \quad \text{同種粒子}$$

$q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ では、 $q\bar{q}$ 消滅の断面積が とても小さいとわかります。

LHC では q 分布も large x では小さいです、 $t\bar{t}$ 生成等以外は

この過程を無視しても「誤差の範囲」です。一方 $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ はカラー因子

が とても小さく、前方の増大も q - q 交換の $1/(1\pm\cos\theta)$ なので

それほど大きくありません。それでも $q\bar{q} \rightarrow q'\bar{q}'$ に較べれば 3倍程大きく、

LHC では $q\bar{q}$ 衝突の中心にシフトが大きいので、 $t\bar{t}$ 生成は $q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}$ が

圧倒的に重要であることがわかります。 $q\bar{q} \rightarrow q\bar{q}$ はカラー因子が違う

ためです。

$$(586) \quad q\bar{q}q\bar{q} \text{ 過程のカラー因子} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{16}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \quad \dots q\bar{q} \rightarrow q\bar{q} \\ \frac{16}{3} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{12} \quad \dots q\bar{q} \rightarrow q\bar{q} \\ \frac{16}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{27} \quad \dots q\bar{q} \rightarrow q\bar{q} \end{array} \right.$$

グルオン(光子)の偏極ベクトル $\epsilon^\mu(k, \lambda)$ のゲージについて。

p.59-p.60 で私が用いているグルオン(光子)の偏極 vector は特殊な (HELAS) light cone gauge だ。

$$(587) \quad \begin{cases} \pi_\mu \epsilon^\mu(k, \lambda) = 0 \\ \pi^2 = 0, \quad \pi^\mu = (|\mathbf{k}|, -k) \quad , \quad \pi \cdot k = |\mathbf{k}|^2 + k \cdot k = 2|\mathbf{k}|^2 > 0 \end{cases}$$

を満たすように定められていることを説明しよう。このゲージ選択は 1985年当時、重ニュートリノを扱う汎用の数値計算法の確立を目指していた私にとっては最も自然なもので、この選択の結果、HELAS 振幅に現れるグルオンや光子の偏極ベクトルは、任意の Lorentz 系で、重ニュートリノ (W や Z) の偏極ベクトルの ϵ_{\parallel} (横波) 成分と全く同じであり、区別がないのです。重粒子の ϵ_{\parallel} は座標系に依存し、且つ、それぞれの座標系での粒子の運動量ベクトルの向きのスピン偏極である、その横波成分は、自身の運動量の逆向きの light-like vector n^μ (587) による light-cone gauge の質量ゼロニュートリノの偏極ベクトルに一致します。(587) の結果、 $gg \rightarrow gg$ 振幅等の計算で、自身と反対の向きをもつ運動量ベクトルとの内積がゼロとなりました。p.185 (554) 参。にもかかわらず、(556)、(574) では多くの項が残りました。

80年代後半から現在にいたるまで、多くの方が多重ゲルオン散乱振幅を早く正確に計算するための努力を続けており、その中で、(587)のゲージワキテル π^μ の選択に多大な考慮が払われているようです。「重、ホソンと同じ偏極ワキテルを用いる」というHELASの極格をはずせば、質量ゼロ *vector boson* の偏極ワキテルは全く自由に与えられるわけですから、例えば(586)式で、

$gg \rightarrow gg$ 振幅は 偏極ワキテルの内積

$$(588) \quad \epsilon(p_i, \lambda_i) \cdot \epsilon(p_j, \lambda_j)$$

を及ぼす言わねば、全ての偏極ワキテルに対して同じ(共通の)

ゲージ (π^μ) を使えば、つまり、全ての ϵ ワキテルが唯一の π^μ を使えば

$$(589) \quad \pi_\mu \epsilon^\mu(p_i, \lambda_i) = 0 \quad ; \quad \pi^\mu \text{ は共通 } (\pi^2=0, \pi \cdot p_i > 0)$$

を満たすと、終状態ゲルオンのハジツティ-の符号を反転させる(551)の

ハジツティ-

$$(590) \quad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_j \text{ if } p_i^0 > 0 & \dots \lambda \text{ 射ゲルオン} & (i=1, 2) \\ \lambda_i = -\lambda_j \text{ if } p_i^0 < 0 & \dots \text{終ゲルオン} & (j=3, 4) \end{cases}$$

を使えば

$$(591) \quad \epsilon(p_i, \lambda_i = \lambda) \cdot \epsilon(p_j, \lambda_j = \lambda) = 0$$

が証明される。つまり、

$$(592) \quad M_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = N_{\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$$

は (589) の ϵ - λ では自明なものです。次は、

$$(593) \quad \pi^M = p_i^M \quad \text{for } \epsilon^M(p_k, \lambda_k), \quad p_k \neq p_i \quad (p_k \cdot p_i > 0)$$

とすると、

$$(594) \quad \epsilon(p_k, \lambda'_k = \lambda) \cdot \epsilon(p_i, \lambda'_i = -\lambda) = 0$$

を示すことができます。ここで $\epsilon^M(p_i, \lambda_i)$ は他の ϵ - λ (例えば "HELAS ϵ - λ ")

何でも良いのです。(594) から

$$(595) \quad M_{\lambda\lambda\lambda-\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda\lambda} = M_{-\lambda\lambda\lambda\lambda} = 0$$

が導かれます。重要なことは、この結果は n -gluon 振幅に対して有効で、

$$(596) \quad \begin{cases} M_{\lambda\lambda\lambda \dots \lambda} = 0 \\ M_{\lambda\lambda \dots \lambda - \lambda} = M_{\lambda \dots \lambda - \lambda \lambda \dots \lambda} = M_{-\lambda \lambda \dots \lambda} = 0 \end{cases}$$

が導かれることです。このことから、少なくとも $n=3$, $n=4$ の異なる

振幅がゼロでない可能性を持つわけです。これを MHV 振幅と呼びます。

4 点系では、この MHV 振幅が、実は n -gluon 保存振幅であることを

見ました。MHV 振幅が重要なのは、他の (よ) n -gluon 保存の) 振幅を MHV

振幅を核として作ることをできるからです。さて、(594) を満たす

ϵ - λ をとると、 $M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda}$, $M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}$, $M_{\lambda-\lambda-\lambda\lambda}$ のそれぞれについて、

ゼロになるない $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$ は唯一組

$$(597) \quad \epsilon(p_k, \lambda = -\lambda) \cdot \epsilon(p_i, \lambda = -\lambda) \neq 0$$

だけであることがわかります。つまり、このゲージでは、(556)式、(574)式でゼロでないのは、それぞれ、唯一項だけであることがわかります。解析的な計算はこの様にして簡略化されたのです。

この様に一般の light-cone gauge での $\epsilon^\mu(p_i, \lambda_i)$ の表式が有用なので、ここで求めてみましょう。ヒントは、ゼロ質量粒子のスピニティは保存量なので、どこか一つの Lorentz 系 (ケルオルの量動量 p^μ と、「ゲージ」運動量 $n^\mu = k^\mu$ で定義される系) で円偏光であれば、そのスピニティは全ての Lorentz 系で不変なことです。その特別な系として

$$(598) \quad p \cdot k > 0 \text{ のとき, } p + k = 0 \text{ 系} \quad [n^\mu = (|k|, k)]$$

を選みます。z軸を \vec{p} の向きにとるときに、例えば

$$(599) \quad \epsilon^\mu(p, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \lambda i, 0) \quad [= -\lambda \epsilon^\mu(p, \lambda)_{\text{HELAS}}]$$

とすれば、この偏極 N-ツトルは Lorentz 変換をするだけで全ての系でスピニティ λ の偏極 N-ツトルとなるわけです。(598)系では

$$(600) \quad p^\mu = (|p|, 0, 0, |p|), \quad n^\mu = k^\mu = (|p|, 0, 0, -|p|)$$

です。

$$(601) \quad p \cdot \epsilon(p, \lambda) = k \cdot \epsilon(p, \lambda) = 0$$

は自明ですわ。と3で、(599)のハクトル、私の講義で出て来たのですが、覚えてますか？ 講義IV, p.87 (236)式の e^{\pm} 消滅のカレントは

$$(602) \quad J_{\lambda, -\lambda}^{\mu} \equiv \bar{v}(k, -\lambda) \gamma^{\mu} u(p, \lambda) \quad \text{p.86 (231)}$$

$$= v(k, -\lambda)_{\lambda}^{\dagger} \sigma_{\lambda}^{\mu} u(p, \lambda)_{\lambda} \quad (233)$$

$$= -\sqrt{2} \chi_{\lambda}^{\dagger}(k) \sigma_{\lambda}^{\mu} \chi_{\lambda}(p) \quad (233)$$

$$= -\sqrt{2} (0, 1, \lambda i, 0) \quad \text{p.87 (236)}$$

でした。つまり、 $\eta^{\mu} = k^{\mu}$ だとすると、 $k^2 = 0$ で $p \cdot k > 0$ だと、

$p+k=0$ 系での質量ゼロフェルミオン対のカレントは、フェルミオンのハミルトニアンをハミルトニアン

とするハクトルの偏極ハクトルなので、一般のLorentz系では

$$(603) \quad \epsilon^{\mu}(p, \lambda; \eta^{\mu} = k^{\mu}) = \frac{-1}{2\sqrt{p \cdot k}} \bar{v}(k, -\lambda) \gamma^{\mu} u(p, \lambda)$$

と表わされます。(599)と ~~は全体の符号が違っています。~~ を合わせました。

この表示では、終状態フェルミオン(光子)の偏極ハクトルは単に

$$(604) \quad \epsilon^{\mu}(p, \lambda; \eta^{\mu} = k^{\mu})^* = \epsilon^{\mu}(p, -\lambda; \eta^{\mu} = k^{\mu}) ; \text{参} \left[\begin{array}{l} \epsilon^{\mu}(p, \lambda)_{\text{HELAS}}^* \\ = -\epsilon^{\mu}(p, -\lambda)_{\text{HELAS}} \end{array} \right]$$

を確認してください。つまり、終状態フェルミオン(光子)の偏極ハクトルは、

単にハミルトニアンを逆に読めば良いわけです。表式(603)では(601)は

$$(605) \begin{cases} p \cdot \epsilon(p, \lambda; \pi^M = k^M) = \frac{-1}{2\sqrt{p \cdot k}} \bar{v}(k, \lambda) \not{p} u(p, \lambda) = 0 \\ k \cdot \epsilon(p, \lambda; \pi^M = k^M) = \frac{-1}{2\sqrt{p \cdot k}} \bar{v}(k, \lambda) \not{k} u(p, \lambda) = 0 \end{cases}$$

の様に、単にゼロ質量 Dirac 粒子の運動方程式の帰結です。

さて、基本定理 (591) と (594) を証明する準備が整いました。

(602) を用いて、(603) の定義式を $\Lambda_{ij} = \epsilon_{ijk} - \epsilon_{ikj}$ と σ_λ^M 行列で表わします。

$$(606) \quad \epsilon^M(p, \lambda; \pi^M = k^M) = \frac{-1}{2\sqrt{p \cdot k}} \bar{v}(k, -\lambda) \not{p} u(p, \lambda) = \frac{\sqrt{|p| |k|}}{\sqrt{p \cdot k}} \chi_\lambda^\dagger(k) \sigma_\lambda^M \chi_\lambda(p)$$

あとは $SU(2)$ の Fierz 則を使うだけです。

$$(607) \quad T^a_{ij} T^a_{kl} = T_F (\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad \dots SU(N)$$

$$(607)' \quad \mathbb{T}_{ij} \mathbb{T}_{kl} = 2 (\delta_{il} \delta_{kj} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad \dots SU(2), T_F = 2$$

$$(607)'' \quad (\sigma_\lambda^M)_{ij} (\sigma_{\lambda\mu})_{kl} = \delta_{ij} \delta_{kl} - \mathbb{T}_{ij} \mathbb{T}_{kl} = 2 (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj})$$

$$(607)''' \quad (\sigma_\lambda^\dagger)_{ij} (\sigma_{-\lambda\mu})_{kl} = \delta_{ij} \delta_{kl} + \mathbb{T}_{ij} \mathbb{T}_{kl} = 2 \delta_{il} \delta_{kj}$$

準備完了です。

$$(608) \quad \epsilon(p, \lambda; \pi^M = k^M) \cdot \epsilon(p', \lambda; \pi^M = k^M) \propto \frac{1}{2} \chi_\lambda^\dagger(k) \sigma_\lambda^M \chi_\lambda(p) \chi_\lambda^\dagger(k) \sigma_{\lambda\mu} \chi_\lambda(p') \\ = \chi_\lambda^\dagger(k) \chi_\lambda(p) \chi_\lambda^\dagger(k) \chi_\lambda(p') - \chi_\lambda^\dagger(k) \chi_\lambda(p') \chi_\lambda^\dagger(k) \chi_\lambda(p) \\ = 0$$

$$(609) \quad \epsilon(p, \lambda; \pi^M = k^M) \cdot \epsilon(k, -\lambda; \pi^M = p^M) \propto \frac{1}{2} \chi_\lambda^\dagger(k) \sigma_\lambda^M \chi_\lambda(p) \chi_{-\lambda}^\dagger(p') \sigma_{-\lambda\mu} \chi_{-\lambda}(k) \\ = \chi_\lambda^\dagger(k) \chi_{-\lambda}(k) \chi_{-\lambda}^\dagger(p') \chi_\lambda(p) = 0 \quad // \text{完}$$

さて、せっかく (608) と (609) を証明したのですから、light cone gauge (606) を使って

$$M_{\lambda_1 \lambda_2}^{\lambda_3 \lambda_4} = M_{\lambda \lambda}^{\lambda \lambda} = M_{\lambda \lambda - \lambda - \lambda}$$

を計算して HELAS ケーヅの結果 (557) と較べておきましょう。

散乱振幅のケーヅ不変性により、違いは高々位相因子 (全ての振幅に共通の因子) であるはずです。このケーヅの choice は

$$(610) \begin{cases} \epsilon_1^\mu = \epsilon^\mu(p_1, \lambda; n=p_3) \\ \epsilon_2^\mu = \epsilon^\mu(p_2, \lambda; n=p_3) \\ \epsilon_3^\mu = \epsilon^\mu(p_3, \lambda; n=p_1)^* = \epsilon^\mu(p_3, -\lambda; n=p_1) \\ \epsilon_4^\mu = \epsilon^\mu(p_4, \lambda; n=p_1)^* = \epsilon^\mu(p_4, -\lambda; n=p_1) \end{cases}$$

とします。定理 (608) と (609) により

$$(611) \begin{cases} \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = 0 & \dots (608) \\ \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = 0 & \dots (609) \end{cases}$$

生き残るのは $\epsilon_2 \cdot \epsilon_4$ だけだす。ケーヅ不変な表式 (543) から出発すると

[表式 (556) は HELAS ケーヅの表式 (554) を使ってしまっただので、(543) には使えません。]

$$(612) M_{\lambda \lambda}^{\lambda \lambda} = M_{\lambda \lambda - \lambda - \lambda} = \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 \left\{ 2 \frac{p_4 \cdot \epsilon_1 p_2 \cdot \epsilon_3}{p_1 \cdot p_4} + 2 \frac{p_4 \cdot \epsilon_3 p_2 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot p_2} \right\}$$

(554) の p_3 と p_4 は 符号を逆にして。

さて計算ですが、(610) の ϵ_i^μ を求めてみましょう。($p_1 + p_2 = p_3 + p_4 = 0$ 系; (552))

$$(613) \begin{aligned} \epsilon_1^\mu &= \epsilon^\mu(p_1, \lambda; n=p_3) = \frac{-1}{2\sqrt{p_1 \cdot p_3}} \bar{v}(p_3, -\lambda) \gamma^\mu u(p_1, \lambda) \dots (606) \\ &= + \frac{\sqrt{E_1 E_3}}{\sqrt{p_1 \cdot p_3}} \chi_\lambda^\dagger(p_3) \sigma_\lambda^\mu \chi_\lambda(p_1) \\ &= + \frac{1}{\sqrt{1-\cos\theta}} \begin{cases} (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}) [1, \sigma] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} [\lambda=+] \\ (-\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}) [1, -\sigma] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} [\lambda=-] \end{cases} \end{aligned}$$

... p. 65 (142), (145)
(θ, ϕ) = ($\theta, 0$) ... p_3
($0, 0$) ... p_1

$$\begin{aligned}
 (613) \quad \epsilon_1^M &= \epsilon^M(P_1, \lambda; n=P_3) = + \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] & \lambda = + \\ (-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] & \lambda = - \end{cases} \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) & \lambda = + \\ (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) & \lambda = - \end{cases} \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1-\cos \theta}} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \lambda i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})
 \end{aligned}$$

右側から $P_1 \cdot \epsilon_1 = P_3 \cdot \epsilon_1 = 0$ であるから $\epsilon_1 \cdot \epsilon_1^* = -1$ である。これは

$$\begin{aligned}
 (614) \quad \epsilon_2^M &= \epsilon^M(P_2, \lambda; n=P_3) = + \sqrt{\frac{E_2 E_3}{P_2 \cdot P_3}} \chi_\lambda^+(P_3) \sigma_\lambda^M \chi_\lambda(P_2) \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) [1, \sigma] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \lambda = + \\ (-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) [1, -\sigma] \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \lambda = - \end{cases} \quad (\theta, \pi) = (\pi, 0) \dots P_2 \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] & \lambda = + \\ (-\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] & \lambda = - \end{cases} \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1+\cos \theta}} \begin{cases} (\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}) & \lambda = + \\ (\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2}) & \lambda = - \end{cases} \\
 &= + \frac{1}{\sqrt{1+\cos \theta}} (\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2})
 \end{aligned}$$

$$(615) \quad \epsilon_3^M = \epsilon^M(P_3, -\lambda; n=P_1) = + \sqrt{\frac{E_1 E_3}{P_1 \cdot P_3}} \chi_{-\lambda}^+(P_1) \sigma_{-\lambda}^M \chi_{-\lambda}(P_3)$$

$$= + \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} (1, 0) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = + \\ (0, 1) [1, -\sigma] \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = - \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (615) \quad \epsilon_3^{\lambda} &= \epsilon^{\lambda}(P_3, -\lambda; n=P_1) = \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} [(1, 0), (0, 1), (0, -i), (1, 0)] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = + \\ [(0, 1), (-1, 0), (-i, 0), (0, 1)] \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = - \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-c}} \begin{cases} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, -i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) & -\lambda = + \\ (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) & -\lambda = - \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos \theta}} (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \lambda i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (616) \quad \epsilon_4^{\lambda} &= \epsilon^{\lambda}(P_4, -\lambda; n=P_1) = \sqrt{\frac{E_1 E_4}{P_1 \cdot P_4}} \chi_{-\lambda}^{\dagger}(P_1) \sigma_{-\lambda}^{\mu} \chi_{-\lambda}(P_4) \quad (\theta; \phi) = (\pi - \theta, \pi) \dots P_4 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} [(1, 0), (0, 1), (0, -i), (1, 0)] \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = + \\ [(0, 1), (-1, 0), (-i, 0), (0, 1)] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} & -\lambda = - \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+c}} \begin{cases} (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) & -\lambda = + \\ (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}) & -\lambda = - \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos \theta}} (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (617) \quad P_4 \cdot \epsilon_1 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} (1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta) \cdot (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \lambda i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) \\
 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}) \\
 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + 2 \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta) \\
 &= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos \theta}} \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (617)' \quad P_2 \cdot \epsilon_3 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} (1, 0, 0, -1) \cdot (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \lambda i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) \\
 &= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos \theta}} \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (617)'' \quad P_4 \cdot \epsilon_3 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} (1, -\sin \theta, 0, -\cos \theta) \cdot (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, \lambda i \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}) \\
 &= \frac{E}{\sqrt{1-\cos \theta}} (\cos \frac{\theta}{2} + \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} + \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}) = \frac{2E}{\sqrt{1-\cos \theta}} \cos \frac{\theta}{2}
 \end{aligned}$$

$$(617)^{iii} P_2 \cdot \epsilon_1 = \frac{E}{\sqrt{1-\cos\theta}} (1, 0, 0, -1) \cdot (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{2E}{\sqrt{1-\cos\theta}} \cos\frac{\theta}{2}$$

$$(617)^{iiii} \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = \frac{1}{1+\cos\theta} (\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}) \cdot (\sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{1}{1+\cos\theta} (\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2})$$

$$= \frac{2}{1+\cos\theta}$$

以上全てを(612)に代入すると [(612)式の P_4 は $-P_4$ であることに注意して]

$$(618) M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda} = M_{\lambda\lambda-\lambda-\lambda} = \frac{2}{1+\cos\theta} \left\{ \frac{2}{E^2(1+\cos\theta)} \frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} \frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} - \frac{2}{2E^2} \frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} \frac{2E\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1-\cos\theta}} \right\}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta} \left\{ \frac{2(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} - \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} \right\}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta} \frac{2-(1+\cos\theta)}{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{4}{1+\cos\theta}$$

これは「バニサー」イ ですわ！ (612)式は奥かきは簡単だ「けり」。

実際の計算を手でやるのは大変でした。偏極ノット (606) は

bi-spinor カリットにすぎないので HELAS コードを使、2 数値的に計算すれば

program の スキートアップが「可能かも」知りません。

この方法を使、て手で計算するものは $\mathcal{M}_{\lambda\lambda}$ と書、か「て」す。例は「

一番「か」い「た」 $M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda}$ (561) を「一項に」し「お」すと、4「つ」を

(610) から変更 (なやめは) ありません。正しい choice は 例えは

$$\begin{aligned} (619) \quad \epsilon_1^M &= \epsilon^M(p_1, \lambda; n=p_2) \\ \epsilon_2^M &= \epsilon^M(p_2, -\lambda; n=p_1) \\ \epsilon_3^M &= \epsilon^M(p_3, \lambda; n=p_2) \\ \epsilon_4^M &= \epsilon^M(p_4, -\lambda; n=p_1) \end{aligned}$$

です。これだと $\epsilon_1^M, \epsilon_2^M$ は HELAS ケースですわ。セムになるのは

$$\begin{aligned} (620) \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 &= \epsilon_2 \cdot \epsilon_4 = 0 & \dots (608) \\ \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 &= \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 = \epsilon_1 \cdot \epsilon_4 = 0 & \dots (609) \end{aligned}$$

(543)" で p_3^M と p_4^M の符号が逆であることを注意すると [ここでは p_3^M と p_4^M を物理的と思、全て計算しては、たいて]

$$(621) \quad M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 \left\{ 2 \frac{p_3 \cdot \epsilon_2 \cdot p_4 \cdot \epsilon_1}{p_1 \cdot p_4} \right\}$$

あ、これはすこしいですわ。 $p_1 \cdot \epsilon_2 = p_2 \cdot \epsilon_1 = 0$ なのてこれ(が)成りません。

$$\begin{aligned} (622) \quad \epsilon_1^M &= \epsilon^M(p_1, \lambda; n=p_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \lambda i, 0) \\ (622)' \quad \epsilon_2^M &= \epsilon^M(p_2, -\lambda; n=p_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, \lambda i, 0) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (622) \\ (622)' \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{符号を除いて HELAS} \\ \text{一致} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (622)'' \quad \epsilon_3^M &= \epsilon^M(p_3, \lambda; n=p_2) = \sqrt{\frac{E_2 E_3}{p_2 \cdot p_3}} \chi_{\lambda}^{\dagger}(p_2) \sigma_{\lambda}^{\dagger} \chi_{\lambda}(p_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c}} (0, 1) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \dots \lambda = + \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos \theta}} \left(\sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2}, \lambda i \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (622)''' \quad \epsilon_4^M &= \epsilon^M(p_4, -\lambda; n=p_1) = \sqrt{\frac{E_1 E_4}{p_1 \cdot p_4}} \chi_{-\lambda}^{\dagger}(p_1) \sigma_{-\lambda}^{\dagger} \chi_{-\lambda}(p_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+c}} (1, 0) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad \dots -\lambda = + \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+\cos \theta}} \left(\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2}, -\lambda i \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

$$(623) \quad \epsilon_3 \cdot \epsilon_4 = \frac{1}{1+\cos\theta} \left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \right) = \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{1+\cos\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$$

$$(623)' \quad p_3 \cdot \epsilon_2 = \frac{E}{\sqrt{2}} (1, \sin\theta, 0, \cos\theta) \cdot (0, 1, \lambda i, 0)$$

$$= -\frac{E}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

$$(623)'' \quad p_4 \cdot \epsilon_1 = \frac{E}{\sqrt{2}} (1, -\sin\theta, 0, -\cos\theta) \cdot (0, 1, \lambda i, 0)$$

$$= \frac{E}{\sqrt{2}} \sin\theta$$

これを (621) に代入すると

$$(624) \quad M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda} = M_{\lambda-\lambda\lambda-\lambda} = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \cdot \frac{2}{E^2(1+\cos\theta)} \cdot \left(-\frac{E}{\sqrt{2}} \sin\theta\right) \cdot \left(\frac{E}{\sqrt{2}} \sin\theta\right)$$

$$= -\frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} \sin^2\theta$$

$$= -\frac{(1-\cos\theta)^2}{1+\cos\theta}$$

今度はサインまで含めて (561) と完全に一致しました。HELAS 振幅との
 相対位相が $M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda}$ の場合と逆になり、まじりたか、もともと、この方法
 ではハリツテ-振幅毎に異なる偏極ベクトルを使っているので、
 [$M_{\lambda\lambda}^{\lambda\lambda}$ のときの (610) 式と $M_{\lambda-\lambda}^{-\lambda\lambda}$ のときの (619) 式]、ハリツテ-振幅間の
 相対位相はケツク依存します。ケルオンズレットの ~~線偏光~~
 (運動量と垂直方向の偏極; ~~面状~~ ケルオンが面状に
 扇状'ジレットになったときの扇の向きを定める偏極です) を

調^{異なる}するときには注意が必要です。線偏光は^{異なる}リニア-振幅の干渉
 によって定まるからです。HELAS を使えば「安全ですが」、一般の
 偏極ベクトル (606) と HELAS 偏極ベクトルの相対位相を
 計算しておくことはします。

HELAS 偏極ベクトルは、(606) のスピン表示を用いると、

$$(625) \quad \epsilon^M(p, \lambda)_{\text{HELAS}} = -\lambda \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{\lambda}^{\dagger}(-p) \sigma_{\lambda}^M \chi_{\lambda}(p)$$

です。…のはず"ですけど", check します。この表式を使うと、

$$\begin{aligned}
 (626) \quad \epsilon^M(p, \lambda)_{\text{HELAS}}^{\lambda=+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{+}^{\dagger}(-p) \sigma_{+}^M \chi_{+}(p) && (\theta, \phi) = (\theta, \phi) \dots +p \\
 &&& (\pi - \theta, \pi + \phi) \dots -p \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}) [1, \sigma] \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}) \left[\begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ i \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \right] \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} - \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -i \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{i\phi} - i \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (0, i \sin \phi - \cos \theta \cos \phi, -i \cos \phi - \cos \theta \sin \phi, \sin \theta) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos \theta \cos \phi - i \sin \phi, \cos \theta \sin \phi + i \cos \phi, -\sin \theta)
 \end{aligned}$$

これは確かに正しいですが、全体の符号が逆です。落ちついてやり直しますね。//