QCD for Collider Physics VII

前回の講義中、板書で次の三点について説明をしました。

① QCDの $qq'\to qq'$ 散乱振幅と、EWの $\nu q\to \ell q'$ 振幅の関係。

② t-channel Vector Boson (g,γ,W,Z) 交換過程の高エネルギー極限。

③ $uu\to uu$ 散乱の干渉項のカラー因子が $-\frac{1}{N}$ であることの説明。

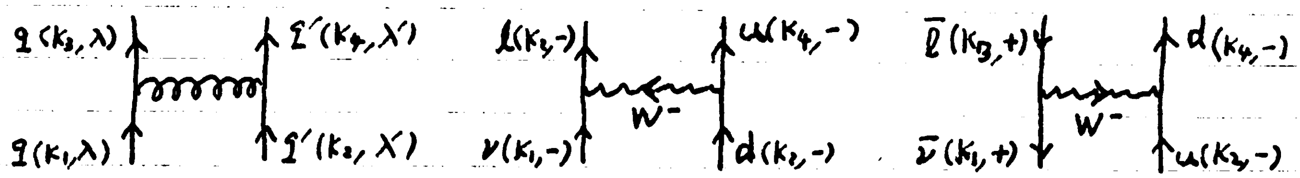
上記三点はいずれも重要事項ですので、ここで復習をしておきます。

まず QCDの $qq'\to qq'$ 散乱振幅（カラー因子を除いたもの）は p.137 (400):

$$\hat{M}_{\lambda\lambda'} = g^2\frac{s}{-t}\times\begin{cases}2 & \cdots\ \lambda=\lambda'\quad(\lambda_1=\lambda_2)\\ 1+\cos\theta & \cdots\ \lambda=-\lambda'\quad(\lambda_1=-\lambda_2)\end{cases}\tag{400}$$

となりました。この振幅と、$\nu d\to \ell u$, $\bar\nu u\to \bar\ell d$ を比較します。

(437)



(a) (b) (c)

Wは左巻き粒子と右巻き反粒子にしか結合しないので、(400)から直ちに

$$\begin{cases} M(\nu d\to \ell u)_{--} = \left(\frac{g_W}{\sqrt2}\right)^2\cdot\frac{s}{m_W^2-t}\cdot 2 & ;(400)\text{式で}\ \lambda=\lambda'=-\\ M(\bar\nu u\to\bar\ell d)_{+-} = \left(\frac{g_W}{\sqrt2}\right)^2\cdot\frac{s}{m_W^2-t}\cdot(1+\cos\theta) & ;(400)\text{式で}\ \lambda=+,\ \lambda'=-\end{cases}\tag{438}$$

と書き下すことができます。DISでは $-t=Q^2$ を用いることが多いです。

$g\to g_W/\sqrt2$ は分かりますか？ 次の式を暗記しておいてください。

$$(439)\quad D_\mu^{SM} = \partial_\mu + igT^aA^a_\mu + ig_WT^iW^i_\mu + ig_Y Y B_\mu$$

$$= \partial_\mu + igT^aA^a_\mu + ig_W(T^1W^1_\mu + T^2W^2_\mu) + ig_WT^3W^3_\mu + ig_Y Y B_\mu$$

$$= \partial_\mu + igT^aA^a_\mu + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}(T^+W^+_\mu + T^-W^-_\mu) + ig_WT^3(\cos\theta_W Z_\mu + \sin\theta_W A_\mu)$$
$$+ ig_Y Y(-\sin\theta_W Z_\mu + \cos\theta_W A_\mu)$$

$$= \partial_\mu + igT^aA^a_\mu + i\frac{g_W}{\sqrt{2}}(T^+W^+_\mu + T^-W^-_\mu) + ig_Z(T^3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu + ieQA_\mu$$

上の式の流れを暗記するのはとても簡単で下のルールとセットで覚えてください。

$$(440)\quad T^i = \frac{\sigma^i}{2} \quad (i=1,2,3) \quad \Rightarrow \begin{cases} T^\pm = T^1 \pm iT^2 \Rightarrow T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ T^3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$W^\pm_\mu = \frac{W^1_\mu \mp iW^2_\mu}{\sqrt{2}}$$ （複号の順序に注意．$T^+W^+_\mu + T^-W^-_\mu$ で荷電定義）

$$Q = T^3 + Y$$ （$Y = -\frac{1}{2}$ for $\binom{\nu_L}{e_L}$, $\frac{1}{6}$ for $\binom{u_L}{d_L}$, $Y = Q_f$ for f_R）

$$g_Z = g_W/\cos\theta_W = \sqrt{g_W^2 + g_Y^2} \qquad \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}$$

$$e = g_W \sin\theta_W$$

断面積は

$$(441a)\quad d\hat\sigma(\nu d \to \ell u) = \frac{1}{2\hat s}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{g_W^2}{2}\frac{2\hat s}{m_W^2 - \hat t}\right|^2 \frac{1}{8\pi}\cdot\frac{d\cos\hat\theta}{2}$$
$$= \frac{g_W^4}{32\pi\hat s}\left|\frac{\hat s}{m_W^2 - \hat t}\right|^2 \frac{d\cos\hat\theta}{2}$$

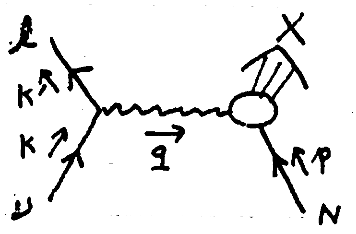
$$(441b)\quad d\hat\sigma(\bar\nu u \to \bar\ell d) = \frac{g_W^4}{32\pi\hat s}\left|\frac{\hat s}{m_W^2 - \hat t}\right|^2 \left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2 \frac{d\cos\hat\theta}{2}$$

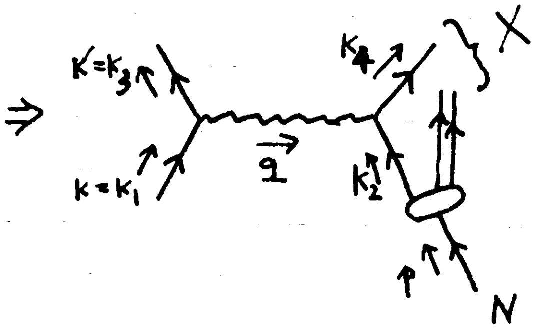
ここで、$\wedge$ は $\nu + q$ 衝突の重心系の量です。$\cos\hat\theta$ を不変量で表すと、

(442) $$y = \frac{qP}{kP} = \frac{(k_1 - k_3)\cdot k_2}{k_1 \cdot k_2} = 1 - \frac{k_3 \cdot k_2}{k_1 \cdot k_2} = 1 - \frac{\hat{E}^2(1+\cos\hat{\theta})}{\hat{E}^2(1+1)} = \frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}$$

ここで、パートン模型のゴマカシ

(443)





$k_2^\mu = \xi p^\mu \quad (0<\xi<1)$

これがゴマカシなのは

(444)
$$\begin{cases} p^2 = m_N^2 \sim 1\,\mathrm{GeV}^2 \text{ なのに } k_2^2 = 0 \text{ (質量ゼロの } u, d, s \text{ クォーク, グルオン)} \\ \langle |k_T| \rangle \sim \dfrac{1}{\langle R \rangle_N} = \Lambda \sim (200\text{–}300)\,\mathrm{MeV} \text{ を無視して } |k_T| = 0,\ k \parallel P \end{cases}$$

要するに核子の質量($m_N \sim 1\,\mathrm{GeV}$)，核子の拡がりが無限大でないこと($\frac{1}{\langle R_N \rangle} \sim \Lambda$)を無視するのがパートン模型です。このゴマカシは関連していて、且つ、今でも(私には)良く理解できない部分です。こんなゴマカシが根幹にあるにもかかわらず、パートン描像による摂動QCDの予言が精密科学になりうる(輻射補正を含めた実験との比較が可能な)のは、因子化定理によって、全てのゴマカシが観測量(分布関数や破砕関数等)に因子化される(繰り込まれる)からです。この点については今後の講義でくり返し例証していこうと思います。

ところで、(442)式を target の静止系 $p^\mu = (m_N, 0, 0, 0)$ で評価すると

(445) $$y = \frac{q\cdot p}{k\cdot p} = \frac{(E-E')\cdot m_N}{E\cdot m_N} = \frac{E-E'}{E}$$

$y=0$ のときが弾性散乱（散乱粒子のエネルギーが不変）ですから、$y>0$ は非弾性度を測ります。パートン模型では、この非弾性度が、(442)式のように、νq 散乱の散乱角度によって定まります。$\cos\hat{\theta}=1$（前方散乱）で $y=0$（弾性散乱）ですから、分かったような（←楽天家）分からないような（弾性散乱だって有限角度に散乱する）ですね。実際、弾性散乱は、ここまでに説明したような［(443)の図で表されるような］パートン模型では記述されません。

パートンの運動量比 ξ (443) も、不変量で表わせて、

(446) $$k_4^2 = (q+k_2)^2 = (q+\xi p)^2 = q^2 + 2\xi p\cdot q + \xi^2 p^2 = 0$$

ここで、パートン模型のゴマカシ(444)をもう一度使って ($p^2=0$)：

(447) $$\xi = \frac{-q^2}{2p\cdot q} \equiv x$$

右辺の不変量を Bjorken の x、(443)式の ξ を Feynman の運動量比と呼ぶことが多いです。$x = \frac{-q^2}{2p\cdot q}$ は観測量、ξ はパートン模型のパラメータです。

核子 N の運動量の内 ξ $(0<\xi<1)$ を担うパートンの分布を

(448) $$D_{a/N}(\xi) \qquad [a = q, \bar{q}, g]$$

として、核子Nを、核子の運動量Pと同じ向きのパートンと束に置き換えます。分布関数は、パートンの束のエネルギーの総和が核子の運動量に一致する

$$(449)\quad \sum_{a=u,d,s,\bar{u},\bar{d},\bar{s},g} \int_0^1 d\xi\ \xi D_{a/N}(\xi) = 1$$

条件で規格化されます。摂動QCDで厳密に定義された分布関数はスケール、Q^2、に対数的に依存しますが、(449)の和則はQ^2によらずに成立します(そのように定義できます)。大ざっぱに、低Q^2 ($Q^2 \sim 1\,\mathrm{GeV}^2$)では$N=p,n$のアイソスピンを決める荷(valence)クォーク、u, dの寄与が大きく、高Q^2 ($Q^2 \gtrsim 100\,\mathrm{GeV}^2$)ではグルオンの寄与が半分以上になります。

分布関数(PDF = Parton Density Function)を用いると$\nu N \to \ell X$, $\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X$の断面積は次の様に表わされます。

$$(450)\quad \begin{cases} d\sigma(\nu N \to \ell X) = \sum_a \int_0^1 d\xi\ D_{a/N}(\xi)\ d\hat{\sigma}(\nu a \to \ell b) \\ d\bar{\sigma}(\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X) = \sum_a \int_0^1 d\xi\ D_{a/N}(\xi)\ d\hat{\sigma}(\bar{\nu} a \to \bar{\ell} b) \end{cases}$$

(442), (443), (449) より

$$(451)\quad \frac{d\cos\hat{\theta}}{2} = dy\ ,\quad 1+\frac{\cos\hat{\theta}}{2} = 1-y\ ,\quad \hat{s} = (k_1+k_2)^2 = 2k_1k_2 = 2k_1P\xi \approx s\xi$$

$$\delta(\xi - x)\,dx = 1\ ,\qquad \hat{t} = (k_1-k_3)^2 = (k-k')^2 = q^2 = -Q^2$$

を代入し、f_Lと$\bar{f}_R$だけがWと結合することに注意すると、(450)に(441)式と(451)を使って

(452) $$d\sigma(\nu N \to \ell X) = \frac{g_W^4 s}{32\pi(m_W^2+Q^2)^2}\left\{ D_{d/N}(x) + D_{s/N}(x) + (1-y)^2 \left[D_{\bar{u}/N}(x) \right] \right\} \times dx\, dy$$

$$d\sigma(\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X) = \frac{g_W^4 s}{32\pi(m_W^2+Q^2)^2}\left\{ D_{\bar{d}/N}(x) + D_{\bar{s}/N}(x) + (1-y)^2 \left[D_{u/N}(x) \right] \right\} \times dx\, dy$$

低エネルギー（$Q^2 \ll m_W^2$）では，断面積は s に比例，x 依存性はパートンのエネルギー比分布（$x D_{q/N}(x)$），y 依存性はクォークと反クォークを区別する。この y 依存性が $ff' \to ff'$ のヘリシティー振幅 (400) のヘリシティー依存性を起源とするわけです。又，低 Q^2 では，反クォークの分布は小さいので，全断面積は荷クォークの u と d の寄与で近似され，アイソスピンがゼロの核（$A=2Z$ 核）では

(453) $$\sigma(\nu N \to \ell X) \sim 3\,\sigma(\bar{\nu} N \to \bar{\ell} X) \qquad \cdots\ A=2Z \text{ 核 } (\#p = \#n)$$

が成立します。$\int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{1}{3} = \int_{-1}^{1} \left(\frac{1+\cos\hat{\theta}}{2}\right)^2 d\cos\hat{\theta}$ の結果です。

弱い相互作用によって (400) 式のヘリシティー依存性が顕わになる例をあげましたが，次は，t-channel に Vector Boson（g, γ, Z, W）を交換する過程に共通の特徴，全断面積の「一次発散」についての解説をまとめます。簡単のため (400) 式の $\lambda = \lambda'$ の場合を例に使います。

(453) $$\hat{M}_{\lambda\lambda} = 2g^2 \frac{\hat{s}}{-\hat{t}} = \frac{4g^2}{1-\cos\hat{\theta}} \qquad ;\ \hat{t} = (k_1-k_3)^2 = -2k_1\cdot k_3 = -2\hat{E}^2(1-\cos\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}} = \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\frac{1}{(1-\cos\hat{\theta})^2} \qquad ;\ (402)\text{式の第一項}$$

2005. 6. 14

ここで $-1<\cos\theta<1$ の積分が一次発散をすることに注目して下さい。

(454) $$\int_{-1}^{1}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}d\cos\hat{\theta}\sim\int_{-1}^{1}\frac{d\cos\hat{\theta}}{(1-\cos\hat{\theta})^2}=\left[+\frac{1}{1-\cos\hat{\theta}}\right]_{-1}^{1}\sim\frac{1}{0}$$

この一次発散により、ヴェクトルボゾンを t-channel に交換する過程の全断面積は横運動量のカットオフの値によって定まり、$\hat{s}\to\infty$ で減少しない。$\bar{q}q'\to\bar{q}q'$ を例に計算をしてみましょう。終パートンの横運動量は

(455) $$p_T=\hat{E}\sin\hat{\theta}\quad\Rightarrow\quad p_T^2=\hat{E}^2\sin^2\hat{\theta}=\frac{\hat{s}}{4}\sin^2\hat{\theta}$$

$$dp_T^2=\frac{\hat{s}}{4}d(1-\cos^2\hat{\theta})=\frac{\hat{s}}{2}\cos\hat{\theta}\,d\cos\hat{\theta}$$

(456) $$\frac{d\hat{\sigma}}{dp_T^2}=\frac{2}{\hat{s}\cos\hat{\theta}}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\bigg|_{\cos\hat{\theta}=\pm\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}$$ ← 2点あることに注意.

$$=\frac{2}{\hat{s}\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}}\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\bigg|_{\cos\hat{\theta}=\pm\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}}$$

Jacobian $1/\sqrt{1-4p_T^2/\hat{s}}$ のために $d\hat{\sigma}/dp_T^2$ を直接積分するのが難しいので、次の様に計算する。

(457) $$\hat{\sigma}(p_T>\Lambda)=\int_{-1}^{1}d\cos\hat{\theta}\,\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\,\Theta\left(\frac{\hat{s}}{4}\sin^2\hat{\theta}-\Lambda^2\right)$$

$$=\int_{-1}^{1}d\cos\hat{\theta}\,\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}\,\Theta\left(1-\frac{4\Lambda^2}{s}-\cos^2\hat{\theta}\right)$$

$$=\int_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}d\cos\hat{\theta}\,\frac{d\hat{\sigma}}{d\cos\hat{\theta}}$$

$$=\frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\int_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}d\cos\hat{\theta}\,\frac{1}{(1-\cos\hat{\theta})^2}$$

$$(458)\quad \hat{\sigma}(p_T > \Lambda) = \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\left[+\frac{1}{1-\cos\hat{\theta}}\right]_{-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}^{\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}$$

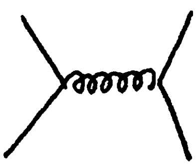
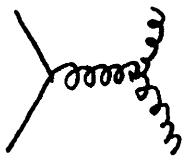
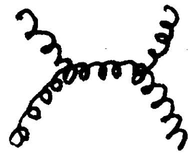
$$= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\left[\frac{1}{1-\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}} - \frac{1}{1+\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\frac{2\sqrt{1-4\Lambda^2/\hat{s}}}{1-(1-4\Lambda^2/\hat{s})}$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\frac{\hat{s}}{2\Lambda^2}\left(1-\frac{2\Lambda^2}{\hat{s}}+\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{2\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\cdot\left(1-\frac{2\Lambda^2}{\hat{s}}+\cdots\right)$$

上の導出で、一次発散項のカットオフ積分が $\frac{\hat{s}}{\Lambda^2}$ の振る舞いをするので、断面積の $\frac{1}{\hat{s}}$ 的振る舞いが、$\frac{1}{\Lambda^2}$ の定数に変化することを良く理解しておいて下さい。又、$\sqrt{\hat{s}} = 2\Lambda$ がしきい値であるにもかかわらず、$\sqrt{\hat{s}} = 4\Lambda$ ではすでに漸近的断面積の $\frac{7}{8}$ に達していることも重要です。パートンジェット生成の断面積は $\sqrt{\hat{s}} > 4p_T$ で $\hat{s}$ にはほとんど依存しなくなってしまいます。これが、三過程

(459) $qq' \to qq'$  $qg \to qg$  $gg \to gg$ 

の断面積が、他の素過程よりもずっと大きい理由です。

この三過程の断面積は、有限部分の振る舞いや、カラー因子等が違いますが、漸近式 (458) を使って、TevatronやLHCでのジェット生成の全断面積を評価してみましょう。

正確な計算は皆さんが後で自分ですることができますから、ここでは私が、例えば飛行機の中で紙とペンだけで評価する方法を説明しましょう。まずは、クォークとグルーオンの区別も面倒なので、全てのパートンの分布関数の和を評価します。

(460) $$D(x) = \sum_{u,\bar{u},d,\bar{d},s,\bar{s},g} D_{q/N}(x)$$

この分布関数の規格化はエネルギー保存則

(461) $$\int_0^1 dx \; x\,D(x) = 1$$

です。D(x)の形ですが、次の形が経験則として便利です。

(462) $$D(x) = N\,\frac{(1-x)^n}{x}$$

$x \to 0$ での $1/x$ 分布は、後で出て来るグルーオン輻射の分布で、全ての分布に共通です。$x \to 1$ の $(1-x)^n$ のベキは、核子のエネルギーの全てをパートン1つが担うこと~~~~の難しさを計る量で、定スケールでは陽子中の u について $n=3$、d について $n=4$、g について $n=5$、$\bar{u},\bar{d},s,\bar{s}$ について $n=7$ という評価があります。$D_{d/p}(x)$ 以外は次のルール

(463) $$n = 2\times(\text{ゼロ運動量をもつべき最少パートン数}) - 1$$

です。陽子中の d-クォークの分布に関しては「u-クォーク2ヶを共にゼロ運動量にするのが より困難だ」との~~~~もっともらしい説明があります。全て、

全く信頼できない説明ですが、どういうわけか、観測値の定性的な傾向を正しく再現します。ここでは面倒なので、全パートン分布を(462)式の形に仮定します。すると(461)より

(464) $$D(x) = (n+1)\frac{(1-x)^n}{x}$$

で規格化まで定まってしまいます。全断面積は

(465) $$\sigma(p_T > \Lambda) = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, D(x_1) D(x_2)\, \hat{\sigma}(\hat{s} = s x_1 x_2 ; p_T > \Lambda)$$

$\hat{\sigma}(\hat{s}; p_T > \Lambda)$ の $\hat{s}$ 依存性(458)式は面倒ですから

(466) $$\hat{\sigma}(\hat{s}; p_T > \Lambda) = \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\,\theta(\hat{s} - 16\Lambda^2)$$

((458)は(402)式の第一項，LLとRRだけなので2倍しました。)

と近似します。$dx_1 dx_2$ 積分は次の変数を使うと便利です。

(467) $$\begin{cases} x_1 = \sqrt{\tau}\, e^{y} \\ x_2 = \sqrt{\tau}\, e^{-y} \end{cases} \qquad \begin{cases} \tau = x_1 x_2 = \dfrac{\hat{s}}{s} \\ y = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x_1}{x_2} \end{cases}$$

$$dx_1\, dx_2 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(\tau, y)}\, d\tau\, dy = d\tau\, dy$$

Jacobian $=1$ は check して下さいね。$\tau = \hat{s}/s$ はパートン衝突系の $\hat{s}$ と衝突ハドロン系の s との比，y はパートン対系の rapidity です。

(468) $$y = \frac{1}{2}\ln\frac{(E_1+E_2)+(p_{1z}+p_{2z})}{(E_1+E_2)-(p_{1z}+p_{2z})} = \frac{1}{2}\ln\frac{(x_1+x_2)+(x_1-x_2)}{(x_1+x_2)-(x_1-x_2)} = \frac{1}{2}\ln\frac{x_1}{x_2}$$

新しい変数 τ と y を使うと，(465)は

$$(469)\quad \sigma(p_T>\Lambda) = \int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau \int_{\ln\sqrt{\tau}}^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\, D(\sqrt{\tau}e^{y}) D(\sqrt{\tau}e^{-y})\ \hat{\sigma}(\hat{s}=s\tau;\, p_T>\Lambda)$$

$$= \int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau\ \mathcal{L}(\tau)\ \hat{\sigma}(\hat{s}=s\tau;\, p_T>\Lambda)$$

ここで $\tau = x_1 x_2 = \hat{s}/s$ を定めたときのパートン分布関数の対のたたみこみ積分

$$(470)\quad \mathcal{L}(\tau) = \int_{\ln\sqrt{\tau}}^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ D(\sqrt{\tau}e^{y})\ D(\sqrt{\tau}e^{-y})$$

をパートン対の「有効ルミノシティー分布密度」と呼びます。摂動QCDでもこの密度関数を定義することができて、TeVatronやLHCでのこの密度関数のだいたいの大きさと形とをしっかりと理解・記憶することが、コライダーの物理の現象論の始めの一歩です。私のいい加減な分布(464)の場合

$$(471)\quad \mathcal{L}(\tau) = 2\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ \ (n+1)^2\ \frac{(1-\sqrt{\tau}e^{y})^n\ (1-\sqrt{\tau}e^{-y})^n}{\sqrt{\tau}e^{y}\cdot\sqrt{\tau}e^{-y}}$$

$$= \frac{2(n+1)^2}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\ \left(1+\tau-\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y})\right)^n$$

これはもっと解析的に積分できますが、$n=3$のときに計算させて下さい。

$$(472)\quad \mathcal{L}(\tau)^{n=3} = \frac{32}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\left\{(1+\tau)^3 - 3(1+\tau)^2\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y}) + 3(1+\tau)\tau(e^{y}+e^{-y})^2 - \tau\sqrt{\tau}(e^{y}+e^{-y})^3\right\}$$

$$= \frac{32}{\tau}\int_0^{-\ln\sqrt{\tau}} dy\left\{(1+\tau)(1+\underset{8}{\wedge}\tau+\tau^2) - 3\sqrt{\tau}(1+\underset{3}{\wedge}\tau+\tau^2)(e^{y}+e^{-y}) + 3\tau(1+\tau)(e^{2y}+e^{-2y}) - \tau\sqrt{\tau}(e^{3y}+e^{-3y})\right\}$$

(473) $$\mathcal{L}(\tau)^{n=3} = \frac{32}{\tau}\left\{ \frac{(1+\tau)(1+8\tau+\tau^2)}{2}\ln\frac{1}{\tau} - 3\sqrt{\tau}\,(1+3\tau+\tau^2)\frac{1-\tau}{\sqrt{\tau}} + 3\tau(1+\tau)\frac{1-\tau^2}{2\tau} - \tau\sqrt{\tau}\,\frac{1-\tau^3}{3\tau\sqrt{\tau}} \right\}$$

(473a) $$= \frac{16}{\tau}\left\{ (1+\tau)(1+8\tau+\tau^2)\ln\frac{1}{\tau} - \frac{1-\tau}{3}(11+38\tau+11\tau^2) \right\}$$

(473b) $$\xrightarrow[\tau\to 0]{} \frac{16}{\tau}\left[\ln\frac{1}{\tau} - \frac{11}{3} + O\left(\tau\ln\frac{1}{\tau}\right) \right]$$

(473c) $$\xrightarrow[\tau\to 1]{} \frac{4}{35}(1-\tau)^7 + O\left((1-\tau)^8\right)$$

上の形から、$\mathcal{L}(\tau)^{n=3}$ のだいたいの形と規格がわかります。$\tau\to 1$ の振るまいは、$\int(1-x_1)^n(1-x_2)^m$ の場合 $(1-\tau)^{n+m+1}$ になります。$\tau\to 0$ で $\frac{2(n+1)(m+1)}{\tau}\ln\frac{1}{\tau}$ の様に増大し、$\tau \gtrsim 0.1$ では急激に減少するわけです。この傾向は、摂動QCDの輻射補正を考慮すると更に強まります。

実は、(473)式の $\tau\to 0$ の形を使って全断面積 (469) を評価しようともくろんでいたのですが、(473b)式は $\tau < e^{-\frac{11}{3}} \sim 0.026$ でないと正でないのでちょっとあぶなそうです。是非数値計算で follow して下さい。摂動QCDが使える限度として、例えば

(474) $$p_T > \Lambda \approx 5\,\text{GeV}$$

をとったとすると、(469)式の τ 積分の下限は

(475) $$\frac{16\Lambda^2}{s} = \left(\frac{4\Lambda}{\sqrt{s}}\right)^2 = \begin{cases} \left(\frac{20}{2000}\right)^2 \sim 10^{-4} & \cdots \text{TeVatron} \\ \left(\frac{20}{14000}\right)^2 \sim 2\times 10^{-6} & \cdots \text{LHC} \end{cases}$$

(473b)を使ってとてもあらっぽい評価をすると［(466)式を代入］

(476)
$$\begin{aligned}
\sigma(p_T > \Lambda) &= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\int_{16\Lambda^2/s}^{1} d\tau\ \mathcal{L}(\tau) \\
&\approx \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\int_{16\Lambda^2/s}^{0.01} d\tau\ \frac{16}{\tau}\left[\ln\frac{1}{\tau} - \frac{11}{3}\right] \\
&= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\left[-8\ln^2\tau - \frac{176}{3}\ln\tau\right]_{16\Lambda^2/s}^{0.01} \\
&= \frac{2}{9}\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\left\{8\left(\ln^2\frac{s}{16\Lambda^2} - \ln^2 100\right) - \frac{176}{3}\ln\frac{s}{100\cdot 16\Lambda^2}\right\} \\
&\approx \frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2}\times\left\{\begin{array}{ll} 240 & \cdots \text{Tevatron} \\ 700 & \cdots \text{LHC}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

これがどの位の断面積であるかを評価するために、まず

(477)
$$\begin{aligned}
\frac{4\pi\alpha_s^2}{\Lambda^2} &\approx \frac{4\times 3\times(0.14)^2}{(5\,\mathrm{GeV})^2} \\
&\approx \frac{1}{10}\,\mathrm{GeV}^{-2} \\
&\approx \frac{1}{10}\,0.4\,\mathrm{mb} \\
&\approx 0.04\,\mathrm{mb}
\end{aligned}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\pi = 3 \\ \alpha_s(5\,\mathrm{GeV}) = 0.14\end{array}\right.$$

$$\frac{1}{0.2\,\mathrm{GeV}} \approx 1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

$$\frac{1}{(0.2\,\mathrm{GeV})^2} \approx 10^{-30}\,\mathrm{m}^2 = 10\,\mathrm{mb}$$

これを代入すると

(478)
$$\sigma(p_T > 5\,\mathrm{GeV}) \sim \left\{\begin{array}{ll} 2\ \mathrm{mb} & \cdots \text{Tevatron} \\ 7\ \mathrm{mb} & \cdots \text{LHC}\end{array}\right.$$

となってとても大きな断面積になることがわかります。最新のパートン分布を使って計算してみて下さい。5 GeV程度のp_Tをもったジェットは、ほとんど全てのイベントで観測されるのだろうと思います。//

2005. 6.16

ついでに、ニュートリノ・クォーク散乱の全断面積も求めておきましょう。

(441a)(441b) 式で $-\hat{t} = Q^2 \ll m_W^2$ とすると、

(479a) $$\hat{\sigma}(\nu d \to \ell u) = \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^4}\hat{s} = \frac{G_F^2}{\pi}\hat{s}$$

$$;\ G_F = \frac{1}{\sqrt{2}v^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{g_W}{2m_W}\right)^2$$

(479b) $$\hat{\sigma}(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d) = \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\hat{s} = \frac{G_F^2}{3\pi}\hat{s}$$

これは皆が知っている式ですね。$\hat{s} \gg m_W^2$ のときは QCD のグルオン交換と同様、断面積が一定になります。P_T cut-off Λ の代わりが m_W です。

(480a) $$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\nu d \to \ell u) &= \int_{-1}^{1} d\cos\theta\, \frac{g_W^4}{64\pi\hat{s}}\left(\frac{\hat{s}}{m_W^2 + \hat{s}\,\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\int_0^1 d\left(\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}\right)\left(\frac{1}{\left(\frac{1-\cos\hat{\theta}}{2}\right)+\frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right)^2 \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[-\frac{1}{x+\frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right]_0^1 \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[\frac{\hat{s}}{m_W^2} - \frac{\hat{s}}{\hat{s}+m_W^2}\right] \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^2}\left[1 - \frac{m_W^2}{\hat{s}}\right] \\ &= \frac{G_F^2}{\pi} m_W^2 \left[1 - \frac{m_W^2}{\hat{s}} + O\left(\left(\frac{m_W^2}{\hat{s}}\right)^2\right)\right]\end{aligned}$$

(480b) $$\begin{aligned}\hat{\sigma}(\bar{\nu} u \to \bar{\ell} d) &= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\int_0^1 dx\left(\frac{1}{x+\frac{m_W^2}{\hat{s}}}\right)^2(1-x)^2 \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\hat{s}}\left[-\frac{1+\frac{2m_W^2}{\hat{s}}}{x+\frac{m_W^2}{\hat{s}}} - 2\ln\left(x+\frac{m_W^2}{\hat{s}}\right) + 1 + \cdots\right]_0^1 \\ &= \frac{g_W^4}{32\pi\, m_W^2}\left[1 - 2\frac{m_W^2}{\hat{s}}\ln\frac{\hat{s}+m_W^2}{m_W^2} + \frac{2m_W^2}{\hat{s}} + \cdots\right] \\ &= \frac{G_F^2}{\pi} m_W^2\left[1 - 2\frac{m_W^2}{\hat{s}}\left(\ln\frac{\hat{s}+m_W^2}{m_W^2} - 1\right) + \cdots\right]\end{aligned}$$

高エネルギーの全断面積は ν も $\bar{\nu}$ も同じで

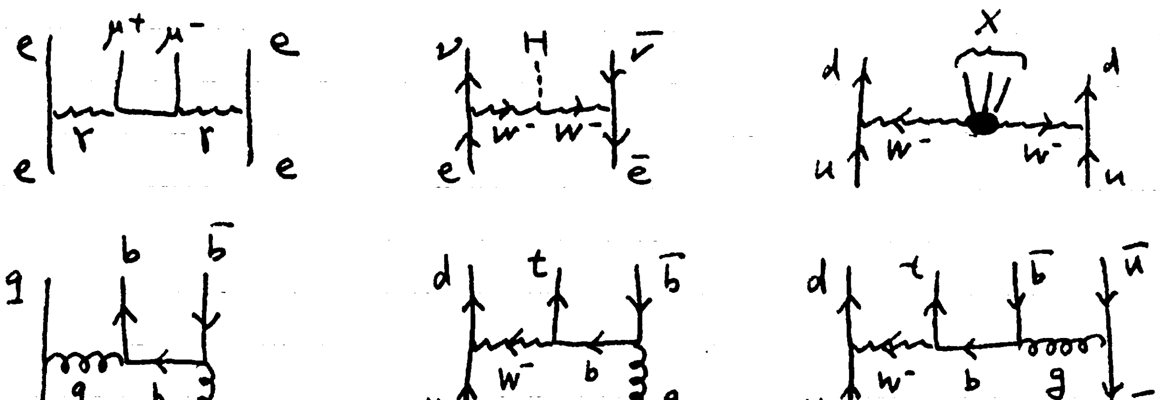
(481) $$\frac{G_F^2}{\pi} m_W^2 \approx \frac{(10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2})^2}{3}(80\,\mathrm{GeV})^2 \approx 2\times 10^{-7}\,\mathrm{GeV}^{-2} \approx 2\times 10^{-7}\times 0.4\,\mathrm{mb} \approx 0.1\,\mathrm{nb}$$

この断面積は充分に大きく、高エネルギーニュートリノは地中で急激に減衰します。e も μ も地中で止まってしまうので、ν_τ だけが、τ 生成と τ 崩壊を繰り返しながら地球をつき抜けることができるそうです。

場合の積分がリニア発散するときに、断面積のエネルギー依存性の次元が変わり、高エネルギーで減衰しない断面積が得られることは大切です。

t-channel にヴェクトルボソンを交換する全ての過程に当てはまるので、いくつか ~~[illegible]~~ 例をあげましょう。

(482)



振幅の結合の次数が高くても、大きな寄与を与える可能性があります。//

2005. 6. 16

$qq \to qq$ のカラー因子

(405)式の散乱振幅の干渉項の符号が、カラー因子の干渉項(318)が負であるために、フェルミ統計による負符号とかけ合わさって正になりました。p. 139 (410)-(412)です。(318)式で何故カラー因子の干渉項が負になるのかが気になったのですが、これは、カラー因子のベースを $\delta_{ki}\delta_{\ell j}$ と $\delta_{kj}\delta_{\ell i}$ にとることで明らかになります。Fierz則(314)を使うと、t-channel と u-channel の振幅のカラー因子はそれぞれ

$$(483)\quad T^a_{ki}T^a_{\ell j} = T_F\left(\delta_{kj}\delta_{\ell i} - \frac{1}{N}\delta_{ki}\delta_{\ell j}\right)$$

$$T^b_{kj}T^b_{\ell i} = T_F\left(\delta_{ki}\delta_{\ell j} - \frac{1}{N}\delta_{kj}\delta_{\ell i}\right)$$

となります。振幅(405)は

$$(484)\quad M = T^a_{ki}T^a_{\ell j}\,M(t) - T^b_{kj}T^b_{\ell i}\,M(u)$$

$$= T_F\,\delta_{kj}\delta_{\ell i}\left(M(t) + \frac{1}{N}M(u)\right) - T_F\,\delta_{ki}\delta_{\ell j}\left(M(u) + \frac{1}{N}M(t)\right)$$

で、干渉項の符号が変わるわけです。新しいベース

$$(485)\quad T_F\,\delta_{kj}\delta_{\ell i} \quad と \quad T_F\,\delta_{ki}\delta_{\ell j}$$

も $N\to\infty$ で干渉しません。

$$(486)\quad \sum_{ijk\ell}\left|T_F\,\delta_{kj}\delta_{\ell i}\right|^2 = \sum_{ijk\ell}\left|T_F\,\delta_{ki}\delta_{\ell j}\right|^2 = T_F^2 N^2$$

$$\sum_{ijk\ell}\left|T_F\,\delta_{kj}\delta_{\ell i}\,T_F\,\delta_{ik}\delta_{j\ell}\right| = T_F^2 N$$

(484)のベースで $|M|^2$ のカラー因子を計算すると、

(487) $$\sum_{ijkl}|M|^2 = T_F^2N^2\left\{\left|M(t)+\frac{1}{N}M(u)\right|^2+\left|M(u)+\frac{1}{N}M(t)\right|^2\right\}$$
$$-2T_F^2N\,\mathrm{Re}\left[\left(M(t)+\frac{1}{N}M(u)\right)\left(M(u)+\frac{1}{N}M(t)\right)^*\right]$$
$$=\left(|M(t)|^2+|M(u)|^2\right)\left(T_F^2N^2\left(1+\frac{1}{N^2}\right)-2T_F^2N\cdot\frac{1}{N}\right)$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left[M(t)M(u)^*\right]\left(T_F^2N^2\frac{2}{N}-T_F^2N\left(1+\frac{1}{N^2}\right)\right)$$
$$=\left(|M(t)|^2+|M(u)|^2\right)T_F^2\,(N^2-1)$$
$$+2\,\mathrm{Re}\left[M(t)M(u)^*\right]T_F^2\frac{N^2-1}{N}$$

少し微妙ですが、(484)式のカラーベースで、干渉項を無視した場合と同じ干渉パターンとなります。

LHCでのhigh p_T jet 生成は、highest p_T region で $uu\to uu$ が重要ですが、この干渉項の効果は結構大きいようです。(412)式で、$\hat{\sigma}(p_T>\Lambda)$ への寄与は干渉項は log的発散で小さいのですが、highest p_T event は $\cos\hat{\theta}\sim 0$ 付近が重要なことを考えると、例えば

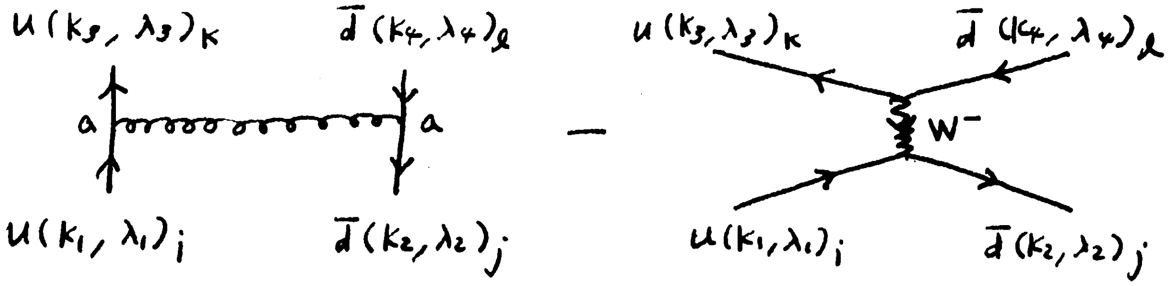
(488) $$\left(\frac{d\hat{\sigma}^{qq\to qq}}{d\cos\hat{\theta}}\right)_{\cos\hat{\theta}=0}=\frac{2}{9}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\cdot\left\{\frac{5}{4}+\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{干渉項}}\right\}$$

ですから、干渉項によって、25%も highest p_T jet が増えるわけです。20%超の効果は、実験的に確認できるかも知れません。残念ながら、Tevatronでは $u\bar{u}$ 散乱が重要となり、この効果はありません。//

$u\bar{d} \to u\bar{d}$ と s-channel W^+ 生成

Tevatronで是非確認していただきたいのが、$u\bar{d} \to u\bar{d}$ 散乱での t-channel グルオン交換振幅と、s-channel W^+ 生成振幅との干渉です。

(489)



フェルミオン生成・消滅演算子の反交換による相対符号の－が書いてある。

振幅はカラー因子を顕にすると

(490)
$$M = T^a_{ki} T^a_{jl} M(\hat{t}) - \delta_{ji}\delta_{kl} M(\hat{s})$$
$$= T_F\left(\delta_{kl}\delta_{ji} - \frac{1}{N}\delta_{ki}\delta_{jl}\right) M(\hat{t}) - \delta_{ji}\delta_{kl} M(\hat{s})$$
$$= \delta_{kl}\delta_{ji}\left(T_F M(\hat{t}) - M(\hat{s})\right) - \frac{T_F}{N}\delta_{ki}\delta_{jl} M(\hat{t})$$

多分、初めのベースの方が便利なので、そちらを使うと、

(491)
$$\sum_{ijkl} |M|^2 = \sum_{ijkl} T^a_{ki} T^a_{jl} T^b_{lj} T^b_{ik} |M(\hat{t})|^2 + \sum_{ijkl} \delta_{ji}\delta_{kl}\delta_{lk}\delta_{ij} |M(\hat{s})|^2$$
$$- \sum_{ijkl} T^a_{ki} T^a_{jl} \delta_{ij}\delta_{lk}\, 2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s}) M(\hat{t})^*]$$
$$= \mathrm{tr}(T^a T^b)\,\mathrm{tr}(T^a T^b) |M(\hat{t})|^2 + N^2 |M(\hat{s})|^2$$
$$- \mathrm{tr}(T^a T^a)\, 2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s}) M(\hat{t})^*]$$
$$= T_F^2 (N^2-1) |M(\hat{t})|^2 + N^2 |M(\hat{s})|^2 - T_F (N^2-1)\, 2\,\mathrm{Re}[M(\hat{s}) M(\hat{t})^*]$$

今度は干渉項のカラー因子が正のようです。$M(\hat{t})$ は (395) とほとんど同じで

(492) $M(\hat{t}) = \frac{g^2}{\hat{t}} J_\lambda^\mu \cdot \bar{J}_{\lambda' \mu}$

J_λ^μ は (397a), (398a, b). $\bar{J}_{\lambda'}^\mu$ は

(493a) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu = \bar{v}(k_2, \lambda') \gamma^\mu v(k_4 \lambda')$

(493b) $= 2E \, \chi_{-\lambda'}(k_2)^\dagger \sigma_{-\lambda'}^\mu \chi_{-\lambda'}(k_4)$

(494a) $\bar{J}_+^\mu(k_2, k_4) = 2E \chi_-(k_2)^\dagger \sigma_-^\mu \chi_-(k_4) = 2E(-1, 0)[1, -\vec{\sigma}]\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, -i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

(494b) $\bar{J}_-^\mu(k_2, k_4) = 2E \chi_+(k_2)^\dagger \sigma_+^\mu \chi_+(k_4) = 2E(0, 1)[1, \vec{\sigma}]\begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, i\sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2}\right)$

(495) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4) = -2E\left(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, \lambda' i \sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2}\right)$

(495) と (399b) を較べると

(496) $\bar{J}_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4) = J_{\lambda'}^\mu(k_2, k_4)$

従って (492) は (400) と全く同じ。

(497) $M(\hat{t})_{\lambda\lambda'} = g^2\left(-\frac{\hat{s}}{\hat{t}}\right) \times \begin{cases} 2 & \cdots \ \lambda = \lambda' \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4) \\ 1 + \cos\hat{\theta} & \cdots \ \lambda = -\lambda' \quad (\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4) \end{cases}$

一方 s-channel W 交換振幅は (230) と同じで

(498) $M(s) = \frac{g_W^2}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} J_{-+}^\alpha(k_3, k_4) J_{-+}^\beta(k_1, k_2) g_{\alpha\beta}$

$= \frac{g_W^2}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} \underbrace{2E[0, \cos\hat{\theta}, i, -\sin\hat{\theta}]}_{(235)} \cdot \underbrace{2E[0, -1, i, 0]}_{(240)}$

$= \frac{g_W^2 \hat{s}}{2(\hat{s} - m_W^2 + i m_W \Gamma_W)} (1 + \cos\hat{\theta}) \, \delta_{\lambda_1 -} \delta_{\lambda_2 +} \delta_{\lambda_3 -} \delta_{\lambda_4 +}$

(497) と (498) を (491) に代入すると, そして ヘリシティーの和も実行すると.

2005. 6. 16

$$(499)\quad \sum_{spin}\sum_{color}|M|^2 = T_F^2(N^2-1)\cdot\left(\frac{2g^2}{1-\cos\hat\theta}\right)^2\left[4+(1+\cos\hat\theta)^2\right]\times 2$$
$$+N^2\left|\frac{g_W^2\,\hat s}{\hat s-m_W^2+im_W\Gamma_W}\right|^2\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-T_F(N^2-1)\,2\mathrm{Re}\left\{\frac{g_W^2\,\hat s}{\hat s-m_W^2+im_W\Gamma_W}\,\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\cdot\frac{2g^2}{1-\cos\hat\theta}(1+\cos\hat\theta)\right\}$$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot\frac{32g^4}{(1-\cos\hat\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2\right]$$
$$+N^2\cdot\frac{g_W^4\,\hat s^2}{(s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-T_F(N^2-1)\cdot\frac{2g^2g_W^2\,\hat s(\hat s-m_W^2)}{(s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\,\frac{(1+\cos\hat\theta)^2}{1-\cos\hat\theta}$$

干渉項は従って $\hat s>m_W^2$ では負、$\hat s<m_W^2$ では正。m_{jj} 分布から m_W を評価しようとすると、$m_{jj}^{peak}<m_W$ となるはずです。逆に、この効果を無視して $m_{jj}^{peak}=m_W$ となるようにジェットのエネルギースケールを決めたとすると、全てのジェットエネルギーは系統的に過大評価されます。(499)式は是非checkして下さいね。どの程度の定量的効果があるか、教えて下さると嬉しいです。素過程の断面積は

$$(500)\quad \frac{d\hat\sigma^{u\bar d\to u\bar d}}{d\cos\hat\theta} = \frac{1}{2\hat s}\cdot\frac14\cdot\frac{1}{N^2}\sum_{spin}\sum_{color}|M|^2\;\frac{1}{8\pi}\cdot\frac12$$
$$=\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat s}\;\frac{1}{(1-\cos\hat\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2\right]$$
$$+\;1\;\cdot\frac{\pi\alpha_W^2}{8}\;\frac{\hat s}{(\hat s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\left(\frac{1+\cos\hat\theta}{2}\right)^2$$
$$-\frac{T_F(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{\pi\alpha_s\alpha_W}{4}\;\frac{\hat s-m_W^2}{(\hat s-m_W^2)^2+(m_W\Gamma_W)^2}\;\frac{(1+\cos\hat\theta)^2}{1-\cos\hat\theta}$$

//

2005. 6. 16

$gg \to gg$ (p. 141〜144 の続き)

(434)〜(436) を (428), (431) に代入すると

(501)
$$\hat{M}_{I\lambda}^{\lambda_2\lambda_4} = g^2\Big\{\Big(\frac{1}{K_2K_4}+\frac{1}{2K_1K_4}\Big)\Big[4E^2\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2} - \frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_2\sin\theta\cdot(-2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_4})\Big]$$
$$+\Big(\frac{\frac{E}{\sqrt{2}}(-\lambda_4\sin\theta)}{K_1\cdot K_4} - \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_4\sin\theta}{K_2\cdot K_4}\Big)(-2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\lambda\,\delta_{\lambda\lambda_2})$$
$$-i\,\frac{-iE^2\cos\frac{\theta}{2}}{2K_1\cdot K_4}\big[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\big]\Big\}$$

$$= g^2\Big\{\Big(\frac{1}{K_2K_4}+\frac{1}{2K_1K_4}\Big)\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_4}\Big]s\cos\frac{\theta}{2}$$
$$+\Big(\frac{1}{K_2\cdot K_4}+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big)\Big[\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2}\Big]s\cos\frac{\theta}{2}$$
$$-\frac{1}{8K_1\cdot K_4}\big[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\big]s\cos\frac{\theta}{2}\Big\}$$

$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda_2\lambda_4(\delta_{\lambda\lambda_2}+\delta_{\lambda\lambda_4})\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}\lambda_2\lambda_4(\delta_{\lambda\lambda_4}+2\delta_{\lambda\lambda_2})$$
$$-\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}-\frac{\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)}{8}-\frac{\lambda\lambda_4}{4}\Big]\Big\}$$

(502)
$$\hat{M}_{I\lambda}^{\lambda_2\lambda_2} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}2\delta_{\lambda\lambda_2}\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}3\delta_{\lambda\lambda_2}-\frac{\lambda\lambda_2}{8}(3+\cos\theta)-\frac{1-\cos\theta}{8}\Big]\Big\}$$

$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\frac{1}{K_2\cdot K_4}\Big[\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{3-\cos\theta}{2}\Big]$$
$$+\frac{1}{K_1\cdot K_4}\Big[\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{1-\cos\theta}{2}\Big]\Big\}$$

(503) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{I\ \lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}+1\right]+\delta_{\lambda\lambda_2}\left[\frac{3-\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]\right\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{2}{1-\cos\theta}+\delta_{\lambda,\lambda_2}\frac{4}{1-\cos^2\theta}\right\}$$

(504) $$\hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{I\ \lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}-\frac{1-\cos\theta}{2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{4}-\frac{1-\cos\theta}{4}(\delta_{\lambda\lambda_4}+2\delta_{\lambda\lambda_2})-\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}+\frac{1-\cos\theta}{8}+\frac{\lambda\lambda_2}{4}\right]\right\}$$
$$=0$$

(505) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_4}_{II\ \lambda} = g^2\left\{\left(\frac{1}{2k_3\cdot k_4}-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\right)\left[s\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}-\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_2\sin\theta(-2\sqrt{2}E)\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_4}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{k_2 k_4}\frac{E}{\sqrt{2}}\lambda_4\sin\theta(-2\sqrt{2}E)\sin\frac{\theta}{2}\lambda\delta_{\lambda\lambda_2}$$
$$\left.+i\frac{-iE^2\cos\frac{\theta}{2}}{2k_3\cdot k_4}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\right]\right\}$$
$$=g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{\left(\frac{1}{2k_3\cdot k_4}-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\right)\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}\right]\right.$$
$$\left.-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\frac{1-\cos\theta}{2}\lambda\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2}+\frac{1}{8k_3\cdot k_4}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)+\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)+2\lambda\lambda_4\right]\right\}$$
$$=g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}(\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}+\lambda\lambda_4\delta_{\lambda\lambda_2})\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\frac{1+\lambda_2\lambda_4\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{4}\lambda\lambda_2\delta_{\lambda\lambda_4}+\frac{\lambda\lambda_2(1+\cos\theta)}{8}+\frac{\lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta)}{8}+\frac{\lambda\lambda_4}{4}\right]\right\}$$

(506) $$\hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{II\ \lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_2\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}(-1)\right]\right.$$
$$+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\frac{1-\cos\theta}{4}+\delta_{\lambda\lambda_2}\left(\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1-\cos\theta}{8}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left(-\frac{1-\cos\theta}{4}-\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1-\cos\theta}{8}+\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$$
$$=0$$

(507) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\left[\frac{1+\cos\theta}{2}+\frac{1-\cos\theta}{2}\,2\delta_{\lambda\lambda_2}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\frac{1+\cos\theta}{4}+\frac{1-\cos\theta}{8}+\delta_{\lambda\lambda_2}\left(\frac{1-\cos\theta}{4}+\frac{1+\cos\theta}{8}+\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.\left.+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left(-\frac{1+\cos\theta}{8}-\frac{1}{4}\right)\right]\right\}$$
$$= g^2 s\cos\frac{\theta}{2}\left\{-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\left[\delta_{\lambda\lambda_2}\frac{3-\cos\theta}{2}+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\frac{1+\cos\theta}{2}\right]\right.$$
$$\left.+\frac{1}{k_3\cdot k_4}\left[\delta_{\lambda\lambda_2}\cdot 1+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\cdot 0\right]\right\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\left[1-\frac{3-\cos\theta}{(1+\cos\theta)}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[-\frac{1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)}\right]\right\}$$
$$= 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\left[-2\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[-1\right]\right\}$$

(503) と (507) が結果で、まとめると

(508a) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{I}\,\lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\left[\frac{4}{1-\cos^2\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[\frac{2}{1-\cos\theta}\right]\right\}$$

(508b) $$\hat{M}^{\lambda_2\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = 2g^2\cos\frac{\theta}{2}\left\{\delta_{\lambda,\lambda_2}\left[-2\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\right]+\delta_{\lambda,-\lambda_2}\left[-1\right]\right\}$$

(508c) $$\hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{I}\,\lambda} = \hat{M}^{\lambda_2,-\lambda_2}_{\mathrm{II}\,\lambda} = 0$$

(508c) が、$gg\to q\bar{q}$ の場合の選択則 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ [p.129 (370)] に対応する選択則である。$m_q=0$ 極限では、入射グルオンと終状態グルオンのヘリシティーは等しい $(\lambda_2=\lambda_4)$。

全断面積は

2005. 6. 16

$$(509)\quad d\sigma = \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{N(N^2-1)}\sum_{spin}\sum_{color}|M|^2\ \frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{128\pi s}\ \frac{1}{N(N^2-1)}\sum_{spin}\Big\{ tr(T^aT^aT^bT^b)\big(|\hat{M}_{I}|^2+|\hat{M}_{II}|^2\big) + tr(T^aT^bT^aT^b)\ 2\,Re[\hat{M}_I\hat{M}_{II}^*]\Big\}$$

$$= \frac{1}{128\pi s}\ \frac{1}{N(N^2-1)}\Big\{ T_F^2\frac{(N^2-1)^2}{N}\sum_{spin}\Big(|\hat{M}_{I\ \lambda}^{\lambda_2\lambda_2}|^2+|\hat{M}_{II\ \lambda}^{\lambda_2\lambda_2}|^2\Big) - T_F^2\frac{N^2-1}{N}\sum_{spin} 2\,Re\Big[\big(\hat{M}_{I\ \lambda}^{\lambda_2\lambda_2}\big)\big(\hat{M}_{II\ \lambda}^{\lambda_2\lambda_2}\big)^*\Big]\Big\}$$

干渉項のカラー因子が負なので、干渉項全体の符号は正となる。

$$(510)\quad \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}(1+\cos\theta)\Big\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\Big[\frac{2}{(1-\cos^2\theta)^2}+\frac{2}{4(1-\cos\theta)^2}+\frac{2(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2}+\frac{2}{16}\Big] - \frac{T_F^2}{N^2}\,2\Big[-\frac{(1-\cos\theta)\times 2}{2(1+\cos\theta)(1-\cos^2\theta)} - \frac{2}{2(1-\cos\theta)\cdot 4}\Big]\Big\}$$

$$= \frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\Big\{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\Big[\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\Big(\frac{2}{1+\cos\theta}+\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)+\frac{(1-\cos\theta)^2}{2(1+\cos\theta)}+\frac{1+\cos\theta}{8}\Big] + \frac{T_F^2}{N^2}\Big[2+\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\Big]\Big\}$$

ここで $\cos\hat{\theta}\to 1$ の振る舞いと、$\cos\hat{\theta}=0$ の値をみておきましょう。

$$(511)\quad \frac{d\hat{\sigma}^{qq\to qq}}{d\cos\hat{\theta}} \xrightarrow[\cos\theta\to 1]{} \frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\Big\{\frac{2}{9}\Big[\frac{2}{(1-\cos\theta)^2}+\frac{1}{4}\Big]+\frac{1}{36}\Big[\frac{2}{1-\cos\theta}+2\Big]\Big\}$$

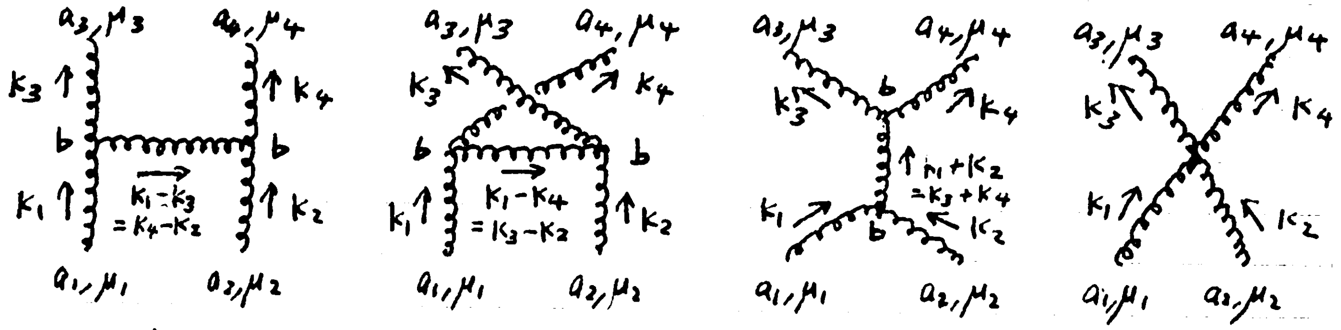
$$\xrightarrow[\cos\theta\to 0]{} \frac{4\pi\alpha_s^2}{\hat{s}}\Big\{\frac{2}{9}\Big[\frac{25}{8}\Big]+\frac{1}{36}\big[3\big]\Big\}$$

一次発散の t-channel グルオン交換は $\hat{M}_I$ にだけ存在し、その $\cos\theta\to 1$ 極限は、カラー因子も含めて、$qq'\to qq'$ に等しい。 //

$gg \to gg$

やっと一番重要な素過程 $gg \to gg$ にたどりつきました。

(512) $g^{a_1}(k_1,\lambda_1) + g^{a_2}(k_2,\lambda_2) \longrightarrow g^{a_3}(k_3,\lambda_3) + g^{a_4}(k_4,\lambda_4)$



(t)　　(u)　　(s)　　(c)

4ダイアグラムをそれぞれ(左から)、t-, u-, s-channel と c=contact と呼びましょう。

まずはFeynman則(291)^{改}と(294)を使って書き下します。

(513)
$$M = g^2\left\{ f^{a_1a_3b}f^{a_4a_2b}\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + f^{a_1a_4b}f^{a_2a_3b}\Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} + f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b}\Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\right\}$$
$$\times\, \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\,\varepsilon^*_{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\,\varepsilon^*_{\mu_4}(k_4,\lambda_4)$$

ここでc-図の寄与は、Feynman則(294)により、s-, t-, u-図の寄与に振り分けられます。

(514)
$$\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \left[(k_1+k_3)^{\alpha}g^{\mu_1\mu_3} + (-k_3+k_1-k_3)^{\mu_1}g^{\mu_3\alpha} + (k_3-k_1-k_1)^{\mu_3}g^{\alpha\mu_1}\right]$$
$$\times\left[(-k_4-k_2)^{\beta}g^{\mu_4\mu_2} + (k_2-k_4+k_2)^{\mu_4}g^{\mu_2\beta} + (k_4-k_2+k_4)^{\mu_2}g^{\beta\mu_4}\right]\frac{-g_{\alpha\beta}}{(k_1-k_3)^2}$$
$$+\,(g_{\mu_1\mu_2}g_{\mu_3\mu_4} - g_{\mu_1\mu_4}g_{\mu_2\mu_3})$$
$$= \frac{1}{2k_1k_3}\Big[(2k_1k_3-2s)g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_4\mu_2} + 2(k_1+k_3)^{\{\mu_1}(k_2+k_4)^{\mu_3\}}g^{\mu_2\mu_4}$$
$$+\,2(k_1+k_3)^{\{\mu_2}(k_2+k_4)^{\mu_4\}}g^{\mu_1\mu_3} - 4k_1^{\mu_3}k_2^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}$$
$4k_1k_2$
$$-\,4k_2^{\mu_4}k_3^{\mu_1}g^{\mu_2\mu_3} - 4k_3^{\mu_1}k_4^{\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - 4k_4^{\mu_2}k_1^{\mu_3}g^{\mu_4\mu_1}\Big] + (\,''\,)$$

少し系統的に計算しないといけませんね。まず (514) で

(515a) $\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(k_1, k_2, k_3, k_4)$

とおきます。[$2s = 4k_1k_2$ と表記しておきます。] そうすると

(515b) $\Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2}(k_1, -k_3, k_4, -k_2)$

(515c) $\Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3}(k_1, -k_4, -k_2, k_3)$

こんなに面倒だとは思いませんでした、全て内向きの運動量 p_i^μ を使いましょう。

(516) $p_1^\mu = k_1^\mu, \quad p_2^\mu = k_2^\mu, \quad p_3^\mu = -k_3^\mu, \quad p_4^\mu = -k_4^\mu$

そうすれば

(517a) $\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(p_1, p_2, -p_3, -p_4) \equiv \Gamma(1\,2\,3\,4)$

(517b) $\Gamma_u^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_3\mu_4\mu_2}(p_1, p_3, -p_4, -p_2) \equiv \Gamma(1\,3\,4\,2)$

(517c) $\Gamma_s^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma^{\mu_1\mu_4\mu_2\mu_3}(p_1, p_4, -p_2, -p_3) \equiv \Gamma(1\,4\,2\,3)$

となります。念のため、$\Gamma_t^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \Gamma(1\,2\,3\,4)$ (514)式を p_i^μ で書いておきましょう。

(518)
$$\begin{aligned}\Gamma(1\,2\,3\,4) = -\frac{1}{p_1p_3}\Big[&(-p_1p_3 - 2p_1p_2)g^{\mu_1\mu_3}g^{\mu_2\mu_4} + \{(p_1-p_3)^{\mu_1}(p_2-p_4)^{\mu_3}\}g^{\mu_2\mu_4}\\ &+ \{(p_1-p_3)^{\mu_2}(p_2-p_4)^{\mu_4}\}g^{\mu_1\mu_3} - 2p_1^{\mu_3}p_2^{\mu_4}g^{\mu_1\mu_2}\\ &+ 2p_2^{\mu_4}p_3^{\mu_1}g^{\mu_2\mu_3} - 2p_3^{\mu_1}p_4^{\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} + 2p_4^{\mu_2}p_1^{\mu_3}g^{\mu_1\mu_4}\Big]\\ &+ g^{\mu_1\mu_2}g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_4}g^{\mu_2\mu_3}\end{aligned}$$

これだけの準備をしておいて、カラー因子のベースを large N 独立に変換します。

2005. 6.17

まず、次の等式を確認してください。

$$(519)\quad f^{abc} = \frac{-i}{T_F}\, tr\left\{ [T^a, T^b]\, T^c \right\} = \frac{-i}{T_F}\left\{ tr(T^aT^bT^c) - tr(T^cT^bT^a) \right\}$$

Fierz則を使って次式を導きます。

$$(520)\quad f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = \frac{-i}{T_F}\left[tr(T^{a_1}T^{a_2}T^b) - tr(T^bT^{a_2}T^{a_1}) \right]\frac{-i}{T_F}\left[tr(T^{a_3}T^{a_4}T^b) - tr(T^bT^{a_4}T^{a_3}) \right]$$

$$= \frac{-1}{T_F^2}\Big[tr(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\, tr(T^{a_3}T^{a_4}T^b) + tr(T^bT^{a_2}T^{a_1})\, tr(T^bT^{a_4}T^{a_3})$$

$$- tr(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\, tr(T^bT^{a_4}T^{a_3}) - tr(T^bT^{a_2}T^{a_1})\, tr(T^{a_3}T^{a_4}T^b) \Big]$$

$$(521)\quad tr(T^{a_1}T^{a_2}T^b)\, tr(T^{a_3}T^{a_4}T^b) = T^{a_1}_{i_1i_2}\, T^{a_2}_{i_2i_3}\, T^b_{i_3i_1}\quad T^{a_3}_{j_1j_2}\, T^{a_4}_{j_2j_3}\, T^b_{j_3j_1}$$

$$= T^{a}_{i_1i_2}\, T^{a_2}_{i_2i_3}\, T^{a_3}_{j_1j_2}\, T^{a_4}_{j_2j_3}\left(T_F\left[\delta_{i_3j_1}\delta_{j_3i_1} - \frac{1}{N}\delta_{i_3i_1}\delta_{j_3j_1} \right] \right)$$

$$= T_F\left(tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{1}{N}\, tr(T^{a_1}T^{a_2})\, tr(T^{a_3}T^{a_4}) \right)$$

$$= T_F\, tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}$$

$$(522)\quad f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = \frac{-1}{T_F}\Big\{ tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4}) + tr(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_4}T^{a_3})$$

$$- tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_4}T^{a_3}) - tr(T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}T^{a_4}) \Big\}$$

$$+ \frac{1}{N}\Big[\underbrace{\delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4} + \delta^{a_2a_1}\delta^{a_4a_3} - \delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4} - \delta^{a_1a_2}\delta^{a_3a_4}}_{\to 0} \Big]$$

ここで カラー因子のベース

$$(523)\quad T(ijkl) \equiv \frac{1}{T_F}\, tr(T^{a_i}T^{a_j}T^{a_k}T^{a_l})$$

を定義すると、トレースの cyclic 対称性に留意して

$$(524a)\quad f^{a_1a_2b}f^{a_3a_4b} = -T(1234) - T(1432) + T(1243) + T(1342)$$

同様に

(524b) $f^{a_1a_4b}f^{a_2a_3b} = -T(1423)-T(1324)+T(1432)+T(1234)$

(524c) $f^{a_1a_3b}f^{a_4a_2b} = -T(1342)-T(1243)+T(1324)+T(1423)$

(524a,b,c) と (517a,b,c) を (513) に代入すると、振幅は

(525) $$M = g^2\{[-T(1342)-T(1243)+T(1324)+T(1423)]M(1234)$$
$$+[-T(1423)-T(1324)+T(1432)+T(1234)]M(1342)$$
$$+[-T(1234)-T(1432)+T(1243)+T(1342)]M(1423)\}$$

ここで $M(1234)$ 等は

(526) $$M(1234) = \Gamma(1234)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)\,\varepsilon^*_{\mu_3}(k_3,\lambda_3)\,\varepsilon^*_{\mu_4}(k_4,\lambda_4)$$

等で定義されるサブ振幅である。新しいカラー因子ベースで整理すると

(527a) $$M = g^2\{T(1234)[M(1342)-M(1423)]$$
$$+T(1243)[M(1423)-M(1234)]$$
$$+T(1324)[M(1234)-M(1342)]$$
$$+T(1342)[M(1423)-M(1234)]$$
$$+T(1423)[M(1234)-M(1342)]$$
$$+T(1432)[M(1342)-M(1423)]\}$$

(527b) $$= g^2\{[T(1234)+T(1432)][M(1342)-M(1423)]$$
$$+[T(1243)+T(1342)][M(1423)-M(1234)]$$
$$+[T(1324)+T(1423)][M(1234)-M(1342)]\}$$

ここで $3!=6$ コのカラー因子 $T(ijkl)$ が large N 独立で、従ってその係数振幅は

それぞれゲージ不変です。tree近似では独立な振幅が3ヶしかないので(527b)の様に因子化されます。まずこのカラーベースのlarge N独立性を証明しましょう。

$$(528)\quad \sum_{color} T(1234)T(1234)^* = \sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\, tr(T^{a_4}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\frac{1}{T_F^2}$$

$$= \sum_{a_1a_2a_3} T_F\left\{ tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{1}{N} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3})\, tr(T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\right\}\frac{1}{T_F^2}$$

$$= \sum_{a_1a_2} T_F^{-1}\left\{ C_F\, tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{T_F}{N}\left[tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2}T^{a_1}) - \frac{1}{N} tr(T^{a_1}T^{a_2})\, tr(T^{a_2}T^{a_1})\right]\right\}$$

$$= \sum_{a_1} T_F^{-1}\left\{ C_F^2\, tr(T^{a_1}T^{a_1}) - \frac{T_F}{N}\left[C_F\, tr(T^{a_1}T^{a_1}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_1a_1}\right]\right\}$$

$$= T_F^{-1}\left\{ C_F^2\, T_F(N^2-1) - \frac{T_F}{N}\left[C_F T_F(N^2-1) - \frac{T_F^2}{N}(N^2-1)\right]\right\}$$

$$= (N^2-1)\left\{ C_F^2 - C_F\frac{T_F}{N} + \frac{T_F^2}{N^2}\right\}$$

ここで

$$(529)\quad \sum_a (T^aT^a)_{ij} = C_F\,\delta_{ij} \quad ; \quad C_F = T_F\frac{N^2-1}{N} = \frac{4}{3}$$

を使いました。 $C_F \sim O(N)$ なので、(528)のカラー因子は N^4 です。非対角要素：

$$(530)\quad \sum_{color} T(1234)T(1243)^* = \frac{1}{T_F^2}\sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\, tr(T^{a_3}T^{a_4}T^{a_2}T^{a_1})$$

$$= \frac{1}{T_F^2}\sum_{a_1a_2a_3a_4} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_4})\, tr(T^{a_4}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3})$$

$$= \frac{1}{T_F}\sum_{a_1a_2a_3}\left\{ tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_3}) - \frac{1}{N} tr(T^{a_1}T^{a_2}T^{a_3})\, tr(T^{a_3}T^{a_2}T^{a_1})\right\}$$

$$= \frac{1}{T_F}\sum_{a_2a_3}\left\{ -\frac{T_F}{N} tr(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_2}T^{a_3}) - \frac{T_F}{N}\left[tr(T^{a_2}T^{a_3}T^{a_3}T^{a_2}) - \frac{1}{N} tr(T^{a_2}T^{a_3})^2\right]\right\}$$

$$= \sum_{a_2}\left\{ -\frac{1}{N}\cdot\left(-\frac{T_F}{N}\right) tr(T^{a_2}T^{a_2}) - \frac{1}{N}\left[C_F\, tr(T^{a_2}T^{a_2}) - \frac{T_F^2}{N}\delta^{a_2a_2}\right]\right\}$$

$$= (N^2-1)\left\{ \frac{T_F^2}{N^2} - \frac{T_F}{N}C_F + \frac{T_F^2}{N^2}\right\} = (N^2-1)\left\{ -C_F\frac{T_F}{N} + 2\frac{T_F^2}{N^2}\right\}$$

2005. 6. 17

対角要素に較べて N^{-2} ですね。まだあと4ヶ非対角要素が残っているけれど、コンピュータでやってほしいですね。次のステップは (S27b) の振幅、M(1342)-M(1423) 等がゲージ不変であることをまず check し、それからヘリシティー振幅を計算します。申し分けございませんが、今週もとても忙しくてここで時間切れになってしまいました。補講が必要ですね。 //