2005. 5. 24

QCD for Collider Physics VI

前回の講義(V)で $gg \to Q\bar{Q}$ の計算を完了できなかったことと、(268)式のエラーが深刻なものだったので、今回は次週の講義(6月3日、4日)を待たず、誤りを正す解説と、計算の完成までのノートを公開します。今まで、講義の前日にノートを用意していたことの無理が出てしまったのだと反省しています。少しずつ準備を早めるよう努力していきますので、ご容赦ください。

まず、前回の講義中に(268)式の誤りと、(266)式の疑問点を指摘して下さった藤井宏次さんに感謝します。$f(x)\,g(-x)$ の積分を対称積分に変えたところまでは良かったのですが、答えがゼロになるはずだと思い込んでいたので、「対称関数の対称積分がゼロ」というデタラメの式を書いてしまいました。ごめんなさい。どうぞこのような誤り(結果に向けて推論をねじ曲げる誤り)をまねしないで下さいね。反省です。

さて、初めに、このエラーの原因　(266)式で Hamiltonian 密度の全微分項(特に時間微分の項，$\partial_0(\phi^*\partial_0\phi)$)を落としたことです。エネルギー保存の式

$$(340)\quad \dot{H} = \int d^3x\, \dot{\mathcal{H}} = \int d^3x\, \nabla\cdot\vec{j}(x) = 0$$

を思い出して下さい。保存カレント（$\partial_\mu j^\mu = \dot{j}^0 - \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0$）は p.40 (25) 式です。

(266)式の第一項，$\partial_0(\phi^* \partial_0 \phi)$，は $\int d^3x$ 積分をしても表面項にならず，従って消えません。Lagrangian の全微分項は運動方程式を変えないので（運動方程式は始点と終点を変えない経路の変分をゼロにすること，式(5)を思い出してください）、全微分項を捨てることが許されますが，Hamiltonian は $L(q,\dot{q})$，$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ から導かなければなりません。又，エネルギー，運動量保存則を導く並進変換は，全空間に適用されます。

と，いうわけで，正しい Hamiltonian (265) を出発点として，計算をやり直します。

$$(341)\ H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ iE'(a^\dagger_{k'} e^{ik'x} - b_{k'} e^{-ik'x})(-iE)(a_k e^{-ikx} - b^\dagger_k e^{ikx})$$

$$+ (-i\boldsymbol{k}')(a^\dagger_{k'} e^{ik'x} - b_{k'} e^{-ik'x})(i\boldsymbol{k})(a_k e^{-ikx} - b^\dagger_k e^{ikx})$$

$$+ m^2 (a^\dagger_{k'} e^{ik'x} + b_{k'} e^{-ik'x})(a_k e^{-ikx} + b^\dagger_k e^{ikx}) \Big\}$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ (EE' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}') \big[a^\dagger_{k'} a_k e^{i(k'-k)x} + b_{k'} b^\dagger_k e^{-i(k'-k)x} - a^\dagger_{k'} b^\dagger_k e^{i(k'+k)x} - b_{k'} a_k e^{-i(k'+k)x} \big]$$

$$+ m^2 \big[a^\dagger_{k'} a_k e^{i(k'-k)x} + b_{k'} b^\dagger_k e^{-i(k'-k)x} + a^\dagger_{k'} b^\dagger_k e^{i(k'+k)x} + b_{k'} a_k e^{-i(k'+k)x} \big] \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}') \big[(EE' + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)(a^\dagger_{k'} a_k e^{i(E'-E)t} + b_{k'} b^\dagger_k e^{-i(E'-E)t}) \big]$$

$$+ (2\pi)^3 \delta^3(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}') \big[(-EE' - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}' + m^2)(a^\dagger_{k'} b^\dagger_k e^{i(E'+E)t} + b_{k'} a_k e^{-i(E'+E)t}) \big] \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \Big\{ \frac{1}{2E} \Big\{ \underbrace{(E^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + m^2)}_{\to 2E^2} \big[a^\dagger_k a_k + b_k b^\dagger_k \big] + \underbrace{(-E^2 + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} + m^2)}_{\to 0} \big[a^\dagger_{-k} b^\dagger_k e^{2iEt} + b_{-k} a_k e^{-2iEt} \big] \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \big[a^\dagger_k a_k + b_k b^\dagger_k \big]$$

2005. 6. 1

これで(267)式の自由複素スカラー場のHamiltonianが、今度は正しく導出されました。

ここでもう一度、少しだけ、自由Dirac場のHamiltonianの導出、p.69〜p.71, (165)-(172), の反省をさせて下さい。この導出では(168)式[再掲]:

$$(168) = (341) \quad \begin{cases} u(\mathbb{k},\lambda')^\dagger u(\mathbb{k},\lambda) = 2E\,\delta_{\lambda\lambda'} & v(\mathbb{k},\lambda')^\dagger v(\mathbb{k},\lambda) = 2E\,\delta_{\lambda\lambda'} \\ u(-\mathbb{k},\lambda')^\dagger v(\mathbb{k},\lambda) = 0 & v(-\mathbb{k},\lambda')^\dagger u(\mathbb{k},\lambda) = 0 \end{cases}$$

が本質的でした。この内、上段の2式は波動関数の規格なので問題ないのですが、下段の2式は、その証明のために私の特別な表示を使ってしまったので、一般的に成立するべき関係式なのかどうかが、講義中に判断できませんでした。ここで、下段の2式が、運動方程式(162)式[再掲]

$$(162) = (342) \quad \begin{cases} (\not{p}-m)\,u(p,\lambda) = \overline{u}(p,\lambda)(\not{p}-m) = 0 \\ (\not{p}+m)\,v(p,\lambda) = \overline{v}(p,\lambda)(\not{p}+m) = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{l} p^\mu = (E,\mathbb{P}) \\ E = \sqrt{\mathbb{P}^2+m^2} \end{array} \right)$$

の帰結であることを、従って表示には依存しないことを、示します。

まず、(166)の2番目の表式にもどって、a^+b^+項とba項がそれぞれ

$$(343) \quad a^+_{\mathbb{k}',\lambda'}\, b^+_{\mathbb{k},\lambda}\, \overline{u}(\mathbb{k}',\lambda')(-\gamma^i k'^i + m)\, v(\mathbb{k},\lambda) \quad e^{i(k'+k)x}$$
$$+\, b_{\mathbb{k}',\lambda'}\, a_{\mathbb{k},\lambda}\, \overline{v}(\mathbb{k}',\lambda')(\gamma^i k^i + m)\, u(\mathbb{k},\lambda) \quad e^{-i(k+k')x}$$

となることを確認してください。$\int d^3x$ を実施すると $(2\pi)^3\delta^3(\mathbb{k}+\mathbb{k}')$ となり、

更に$\int d^3k'$積分をすると、

(344) $a^{+}_{-\mathbb{k},\lambda'}\, b^{+}_{\mathbb{k},\lambda}\, \underbrace{\bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')(-\gamma^i k^i + m)\, v(\mathbb{k},\lambda)}\, e^{2iEt}$

$+\, b_{-\mathbb{k},\lambda'}\, a_{\mathbb{k},\lambda}\, \underbrace{\bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')(\gamma^i k^i + m)\, u(\mathbb{k},\lambda)}\, e^{-2iEt}$

となります。上の式で〰〰線の部分は、運動方程式(162)=(342)を用いるとゼロとなります。

(345a) $\bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')(-\gamma^i k^i + m)\, v(\mathbb{k},\lambda)$

$= \frac{1}{2}\left\{ \bar{u}(-\mathbb{k},\lambda')\left[-\gamma^0 E + \underbrace{\gamma^i(-k^i) + m} + \underbrace{\gamma^0 E - \gamma^i k^i} + m \right] v(\mathbb{k},\lambda) \right\}$

$= 0$

(345b) $\bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')(\gamma^i k^i + m)\, u(\mathbb{k},\lambda)$

$= \frac{1}{2}\left\{ \bar{v}(-\mathbb{k},\lambda')\left[\gamma^0 E \underbrace{- \gamma^i(-k^i) + m}\; \underbrace{- \gamma^0 E + \gamma^i k^i} + m \right] u(\mathbb{k},\lambda) \right\}$

$= 0$

これにより、不用項は運動方程式によってゼロとなることが示されました。(168)=(341)の下段の等式は、従って、表示によらずに成立します。//

さて、まだ反省は終わっていませんでしたね。$gg \to Q\bar{Q}$ のカラー1重項部分（要するに $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ と同じ部分）が全くできなかったのでした。チェックしたところ、p.111〜p.113 は全てOKでした。p.114 にエラーが2ヶ所ありました。(336)式は determinant の計算で符号のエラー：

(336正) = (346)
$$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\, k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2} J^{5\beta}\right]^{\sigma,\sigma}_{\lambda_1\lambda_2} = -2mE\,\lambda_1\,\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

次に(337)式では、3行目から4行目に移るときに「$\sin\theta$」を書き忘れ：

(337正) = (347)
$$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\, k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2} J^{5\beta}\right]^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_1\lambda_2} = -2E^2\sin\theta\,\beta\sigma\lambda_1\,\delta_{\lambda_1\lambda_2}$$

たったこれだけのミスのために、p.115 の (338) と (339) はデタラメになってしまいました。まず (339) は、(347) のエラーを直すだけで

(339正) = (348)
$$\hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda} = 0$$

となりOKです。次に (338) は、(346) のエラーを直すと、

(338正) = (349)
$$\hat{M}^{\sigma,\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)(-mE\beta\sigma\sin^2\theta - mE\lambda) - \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)mE\sigma\cos\theta$$
$$= -\frac{mE}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\left[2E^2(\lambda+\sigma\beta\sin^2\theta) + 2E^2\beta\sigma\cos^2\theta\right]$$
$$= -\frac{2mE^3}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\lambda\left[1+\lambda\sigma\beta\right]$$

振幅 (349) が Higgs resonance の寄与（$gg \to H \to t\bar{t}$）と干渉する重要な振幅ですが、グルオンのヘリシティー (λ) とトップのヘリシティー (σ) が同じ時に大きく ($M \sim 1+\beta$)、逆の時に小さく ($M \sim 1-\beta$) なります。

この入射グルオンヘリシティー(λ)と終クォークヘリシティー(σ)の相関は、偏極陽子衝突ができないかぎりLHCでは役に立ちませんが、光子リニアコライダーの物理では強力な武器となります。浅川恵理さんとの論文

(350) E.Asakawa, K.H, EPJC31, 351−364 (2003)

を参考にして下さい。[注：この論文のTable 1の振幅は、この講義で求めた振幅と、overall符号がずれています。これは多分、一方方向に進む光子の偏極ベクトルの位相を、(333b)の$\phi=0$でなく、$\phi=\pi$ととったためだと思います。overall位相は決して物理に反映しませんが、異なる位相conventionの式を不用意に混同するとエラーを導きます。振幅間の位相を問題にするときは、必ず、全ての振幅を同じ位相conventionで計算しなければいけません。]

LHCの物理としては、ヘリシティーが等しいグルオンは、質量ゼロのクォーク対を生成できない、というルールとして重要です。このため、
カラー1重項では
$gg\to b\bar{b}$のチャンネルでは、$gg\to H\to b\bar{b}$の振幅との干渉はほとんど見えないと思います。あくまでも、重いHiggs, $gg\to H, A\to t\bar{t}$等で、効果が現れるのだろうと思います。

さて、Higgs とは干渉しない、$\lambda_1 \neq \lambda_2$ の振幅も計算しておきましょう。

この場合は (330)式の第一項以外は消えてしまうので

$$(351)\quad \hat{M}^{\sigma\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_4}\right)(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,\sigma}_{-\lambda} \qquad \leftarrow (330)$$

$$= \frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\left(-\sqrt{2}\,m\,\sigma(-\lambda)\sin\theta\right) \qquad \leftarrow (334, 335)$$

$$= \sigma m E\beta\sin^2\theta\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)$$

$$= \sigma\frac{2mE^3\beta}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\sin^2\theta$$

$$(352)\quad \hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1(\lambda)}{k_1\cdot k_4}\right)(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,-\sigma}_{-\lambda}$$

$$= \frac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\sqrt{2}\,E\sigma\,(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$

$$= \sigma\lambda\,E^2\beta\sin\theta\,(1+\sigma\lambda\cos\theta)\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)$$

$$= \sigma\lambda\frac{2E^4\beta}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\sin\theta\,(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$

$E \gg m$ では (352)のヘリシティー振幅だけが残り、

$$(353)\quad \hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\sigma} = \sigma\lambda\cdot 2\beta\,\frac{\sin\theta\,(1+\sigma\lambda\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$\xrightarrow{\beta\to 1} \sigma\lambda\cdot 2\,\frac{1+\sigma\lambda\cos\theta}{\sin\theta}$$

前方 ($\cos\theta \sim 1$) では $\sigma = \lambda$ の振幅（入射グルオンのヘリシティーと、生成クォーク、又は反クォークのヘリシティーがそろう振幅）が大となります。 //

次に(311)、(312)式のQCD固有(カラー8重)項 $\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ を計算します。

$$(354)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4} - 2\gamma^{\mu}\frac{1}{s}\left[(k_1-k_2)_\mu g^{\mu_1\mu_2} + 2k_2^{\mu_1}g_\mu^{\mu_2} - 2k_1^{\mu_2}g_\mu^{\mu_1}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4) \times \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2\lambda_2)$$

(322)式と全く同じように、ゲージ不変性のテスト：$\varepsilon_{\mu_1}\to k_{1\mu_1}$ をします。

$$(355)\quad \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\overbrace{\not{k}_1(\not{k}_3}-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\overbrace{\not{k}_1-\not{k}_4+m)\not{k}_1}}{2k_1k_4} - \frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2)k_1^{\mu_2} + 2k_1\cdot k_2\,\gamma^{\mu_2} - 2k_1^{\mu_2}\not{k}_1\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{[(2k_1k_3)-\not{k}_3\not{k}_1+m\not{k}_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}[-(2k_4k_1)+\not{k}_1\not{k}_4+\not{k}_1 m]}{2k_1k_4} - \frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2-2\not{k}_1)k_1^{\mu_2} + s\gamma^{\mu_2}\right]\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \gamma^{\mu_2} - \frac{\overbrace{(\not{k}_3-m)}^{0}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \gamma^{\mu_2} - \frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\overbrace{(-\not{k}_4+m)}^{0}}{2k_1k_4} - \frac{2}{s}(-\not{k}_1-\not{k}_2)k_1^{\mu_2} - 2\gamma^{\mu_2}\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ごめんなさい。またまたエラーですね。[すっかり自信喪失です。]

★ ★ ★

見つけました。とてもとてもひどいエラーでした。QCD Lagrangian (279)がゲージ不変じゃなかった。これって、学生だったら丸坊主です。平身低頭。

(279c)式の内、第2行のggg結合だけ、サインが間違っています。

(260)式の

$$(356)\quad F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$$

を思い起こせば

$$(357)\quad -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} - g f^{ab'c'} A^{b'\mu} A^{c'\nu})$$

$$= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})$$

$$+ \frac{g}{2} f^{abc} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) A^b_\mu A^c_\nu$$

$$- \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ab'c'} A^b_\mu A^c_\nu A^{b'\mu} A^{c'\nu}$$

のように交差項（ggg結合）だけ符号が違うのがあたりまえなのに、

何でまちがえたのか分かりません。申し訳ございませんでした。

結果、(290)式のサイン、(291)式のファインマン則のサインが誤りで、

振幅 (307) と (308) で $f^{a_1 a_2 a}$ を $-f^{a_1 a_2 a}$ と置き換えなければ

なりません。その結果 (354)式の $\frac{2}{s}\gamma^\mu$ 項の符号がマイナスになります。

(355)式で γ^{μ_2} 項は相殺し、残りは

$$(358)\quad (355) \xrightarrow{\text{エラー訂正後}} \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{2}{s}(\not{k}_1 + \not{k}_2) k_1^{\mu_2}\right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)(\not{k}_3 + \not{k}_4) v(k_4,\lambda_4)\frac{2}{s} k_1^{\mu_2} \varepsilon_{\mu_2}$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left[\underbrace{(\not{k}_3 - m)}_{0} + \underbrace{(\not{k}_4 + m)}_{0}\right] v(k_4,\lambda_4)\frac{2}{s} k_1\cdot\varepsilon_2$$

$$= 0$$

2005. 6. 1

私の特殊な Light cone ゲージでは [p.60, (106)-(108)参] $k_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$ (334) ですが、これは2グルオン衝突の重心系でしか成立しないので、運動方程式を使うことが必要です。エラーを整理すると、

(359) p.101 (279c) 3グルオン結合の符号が逆 [$\mathcal{L}_{QCD}$]

p.104 (290),(291) 〃 [ファインマン規則]

p.108 (307),(308) 〃 [$f^{a_1 a_2 a} \to f^{a_1 a_2 a} \times (-1)$]

p.124 (354),(355) 〃 [$\frac{2}{5}\gamma^\mu \to \frac{2}{5}\gamma^\mu \times (-1)$]

となります。エラーばかりで本当に申し分けなく思いますけれど、

散乱振幅で

(360) $\varepsilon^\mu(k,\lambda) \longrightarrow k^\mu$

の置き換えをした時のゲージ不変性のテストがいかに重要かを理解していただければ不幸中の幸いです。過去、私は、このテストをせずに計算結果を発表したことは無いと思います。外線にゲージボソンが無いときは、わざわざ光子やグルオンを放出させてテストしました。

それにしてもひどいエラーでした。目が悪くなったのかな～～

と言って頭が悪くなったのを隠そうと思います。 //

(354) 式にもどります。エラーを訂正して

$$(361)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right.$$
$$\left. -\gamma^{\mu}\frac{2}{s}\left[(k_1-k_2)_{\mu}g^{\mu_1\mu_2}+2k_2^{\mu_1}g_{\mu}^{\mu_2}-2k_1^{\mu_2}g_{\mu}^{\mu_1}\right]\right\}v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$=\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1\cdot k_3}+\frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2}-\frac{\gamma^{\mu_1}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3}-\frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{s}\left[(\not{k}_1-\not{k}_2)g^{\mu_1\mu_2}+2k_2^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}-2k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1}\right]\right\}v(k_4,\lambda_4)\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ここで、(324)、(325) 式と、$k_2\cdot\varepsilon_1=k_1\cdot\varepsilon_2=k_1\cdot\varepsilon_1=k_2\cdot\varepsilon_2=0$ を使ってしまうと、

$$(362)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}=\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3}+\frac{k_4^{\mu_1}}{k_1\cdot k_4}\right)\gamma^{\mu_2}+g^{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\not{k}_1}{2k_1k_3}+\frac{\not{k}_1}{2k_1k_4}\right)-i\varepsilon^{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\gamma_\beta\gamma_5k_{1\alpha}\left(\frac{1}{2k_1k_3}-\frac{1}{2k_1k_4}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{2}{s}(\not{k}_1-\not{k}_2)g^{\mu_1\mu_2}\right\}v(k_3,k_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$=\left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_3}+\frac{k_4\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_4}\right)J\cdot\varepsilon_2+\left(\frac{1}{2k_1k_3}+\frac{1}{2k_1k_4}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$-\frac{2}{s}(k_1-k_2)\cdot J\,(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)-i\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\left(\frac{1}{2k_1k_3}-\frac{1}{2k_1k_4}\right)$$

ここで $(k_1+k_2)\cdot J=0 \Rightarrow (k_1-k_2)\cdot J=(2k_1-k_1-k_2)\cdot J=2k_1\cdot J$ を用いて

$$(363)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}=\left(\frac{1}{2k_1k_3}+\frac{1}{2k_1k_4}-\frac{4}{s}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$+\left(\frac{1}{k_1k_3}-\frac{1}{k_1k_4}\right)\left[(k_3\cdot\varepsilon_1)(J\cdot\varepsilon_2)+\frac{1}{2i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]$$

上で (334) を使いました。(334) − (337) で全ての項は計算ずみなので、

kinematical factor をまず計算します。

$$(364a)\quad \frac{1}{2k_1k_3}+\frac{1}{2k_1k_4}-\frac{4}{s}=\frac{1}{2E^2(1-\beta\cos\theta)}+\frac{1}{2E^2(1+\beta\cos\theta)}-\frac{4}{4E^2}$$

$$=\frac{1}{2E^2}\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}+\frac{1}{1+\beta\cos\theta}-2\right)$$

$$=\frac{1}{2E^2}\,\frac{1+\cancel{\beta\cos\theta}+1-\cancel{\beta\cos\theta}-2+2\beta^2\cos^2\theta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)}\quad=\frac{\beta^2}{E^2}\,\frac{\cos^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$(364b)\quad \frac{1}{k_1k_3}-\frac{1}{k_1k_4}=\frac{1}{E^2(1-\beta\cos\theta)}-\frac{1}{E^2(1+\beta\cos\theta)}$$

$$=\frac{1}{E^2}\left(\frac{1}{1-\beta\cos\theta}-\frac{1}{1+\beta\cos\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{E^2}\,\frac{1+\beta\cos\theta-(1-\beta\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}\quad=\frac{2\beta}{E^2}\,\frac{\cos\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$(365)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta\,(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)+2\left[(k_3\cdot\varepsilon_1)(J\cdot\varepsilon_2)+\frac{1}{2i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{S\beta}\right]\right\}$$

$$(366)\quad \hat{N}^{\sigma\sigma}_{\lambda\lambda}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta(-2mE\sigma\cos\theta)+2\left[\frac{E\beta}{\sqrt2}\sin\theta\,\lambda(-\sqrt2 m\sigma\lambda\sin\theta)-\cancel{X}mE\lambda\right]\right\}$$

$$=\quad {''}\quad\left\{-2mE\sigma\beta\cos^2\theta-2mE\sigma\beta\sin^2\theta-\overset{2}{\cancel{*}}mE\lambda\right\}$$

$$=-2mE\,\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\sigma\beta+\lambda\right\}$$

$$=-\lambda(1+\lambda\sigma\beta)\frac{2m\beta\cos\theta}{E(1-\beta^2\cos^2\theta)}$$

カラー一重項の(349)式と似ているが、$\cos\theta$項がスピン1交換を表している。

$$(367)\quad \hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda}=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\left\{\beta\cos\theta\cdot 2E^2\sin\theta+2\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt2}}\sin\theta\,\lambda\,\cancel{\sqrt2}E\sigma(1-\sigma\lambda\cos\theta)-2E^2\beta\sigma\lambda\sin\theta\right\}$$

$$=\frac{\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}2E^2\beta\left\{\cos\theta\sin\theta+\lambda\sigma\sin\theta-\sin\theta\cos\theta-\sigma\lambda\sin\theta\right\}$$

$$=0$$

これは(348)式と同じ。同ヘリシティーのグルオンは、異るヘリシティーの$Q\bar{Q}$を生成できない。

$$(368)\quad \hat{N}^{\sigma\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}(k_3\cdot\varepsilon_1)_\lambda (J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma\sigma}_{-\lambda}$$

$$= \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot(-\cancel{\sqrt{2}}\,m\sigma(-\lambda)\sin\theta)$$

$$= \sigma\cdot\frac{2m\beta^2}{E}\,\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$$(369)\quad \hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{2\beta\cos\theta}{E^2(1-\beta^2\cos^2\theta)}\cdot\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot\cancel{\sqrt{2}}\,E\sigma(1+\sigma\lambda\cos\theta)$$

$$= \sigma\lambda\cdot 2\beta^2\,\frac{\cos\theta\sin\theta(1+\sigma\lambda\cos\theta)}{1-\beta^2\cos^2\theta}$$

$E \gg m$ 極限では (369) だけが残り

$$(370)\quad \hat{N}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} \xrightarrow{\beta\to 1} \sigma\lambda\cdot 2\cos\theta\cdot\frac{1+\sigma\lambda\cos\theta}{\sin\theta}$$

(366)−(370) をカラー1重項（QED項）の (348)−(353) と較べると、

全てのヘリシティー振幅について

$$(371)\quad \hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \times \beta\cos\theta$$

が成立しているようです。これが正しいのかどうか、どういう物理的意味があるのか、すぐには分かりません。正しいかどうかは、数値計算プログラムと比較するのがベストです。

MadGraph を使ってテストしてください。

(372) http://madgraph.hep.uiuc.edu

$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ と $\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ の計算がとりあえず完了したので、p.116 で予習したカラー因子の説明をもう一度繰り返します。カラーの自由度も含めた素過程は

$$g^a(k_1,\lambda_1) + g^b(k_2,\lambda_2) \to Q_i(k_3,\lambda_3) + \overline{Q}_j(k_4,\lambda_4) \tag{373}$$

と表され、振幅は

$$M^{ab}_{ij}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) = \frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\,\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\,\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \tag{374}$$

です。振幅を自乗し、カラーとスピンについて足しあげます。

$$\sum_{color}\sum_{spin}\left|M^{ab}_{ij}(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\right|^2 \tag{375}$$

$$= \sum_{i,j,a,b}\sum_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}\left|\frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\,\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\,\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

(374)式のカラー因子のベースでは、一方が $a \leftrightarrow b$ で対称、他方が反対称なので、交差項は残りません。従ってこのベースを使うと

$$\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = \underbrace{\sum_{i,j,a,b}\left|\frac{1}{2}\{T^a,T^b\}_{ij}\right|^2}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 + \underbrace{\sum_{i,j,a,b}\left|\frac{1}{2}[T^a,T^b]_{ij}\right|^2}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 \tag{376}$$
$$= \underline{\frac{14}{3}}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 + \underline{6}\sum_{\lambda_i}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

となります。上の式で $\frac{14}{3}$, 6 等の項を、カラー因子と呼びます。

カラーとスピンについて平均した断面積は

(377) $$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2s}}_{\substack{\uparrow \\ \text{flux}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{\substack{\uparrow \\ \text{グルオンスピンの平均}}} \cdot \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}}_{\substack{\uparrow \\ \text{グルオンカラーの平均}}} \underbrace{\sum_{\text{color}} \sum_{\text{spin}} \left| M_{ij}^{ab}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4)\right|^2}_{(376)\text{式}} \underbrace{\frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}}_{\text{2体の phase space}}$$

となります。(319)と(320)式では、カラーの平均項$(1/(N^2-1))^2$をかけた因子をカラー因子と呼びましたが、今後は、カラーの和だけを実行した因子、(376)式の$\frac{14}{3}$や6をカラー因子と呼びます。この定義により、カラー因子は、同一の振幅から作られる全ての交差チャンネルで共通になるからです。例えば、

(378) $gg \to q\bar{q}$, $q\bar{q} \to gg$, $gq \to gq$, $g\bar{q} \to g\bar{q}$

のカラー因子は全て共通になります。平均の因子は、ggが$(1/8)^2$, $q\bar{q}$が$(1/3)^2$, gqと$g\bar{q}$が$(1/8)(1/3)$となるわけです。

p.116で説明したように、(374)式のカラーベースのとり方は、EW過程(カラー1重項のスピン$\underset{\text{又は2}}{\text{ゼロ}}$粒子交換過程)との干渉が$a \leftrightarrow b$対称項に限られるので便利です。実際、

(379) $$M_{ij}^{ab}(\lambda_k) = \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}_{ij}\hat{M}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4} + \frac{1}{2}[T^a, T^b]_{ij}\hat{N}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4} + \delta_{ij}\delta^{ab}\underbrace{\hat{L}_{\lambda_1\lambda_2}^{\lambda_3\lambda_4}}_{\substack{\uparrow \\ \text{EW振幅}}}$$

とすると、p.116の計算で

$$(380)\quad \sum_{\rm color}\sum_{\rm spin}\left|M_{ij}^{ab}(\lambda_k)\right|^2 = \frac{14}{3}\sum_{\lambda_k}\left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 + 8\sum_{\lambda_k}{\rm Re}\left[\left(\hat{L}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right)\left(\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right)^*\right]$$
$$+ 6\sum_{\lambda_k}\left|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 + 24\sum_{\lambda_k}\left|\hat{L}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2$$

となるわけです。断面積は(377)に代入するだけです。

前回の講義でYangの定理についての質問がありました。

(381) Yang's Theorem：質量ゼロの同種ヴェクトルボソンの対はスピン1を作れない。

この定理により、$Z\to\gamma\gamma$, gg は~~■~~厳密に禁止されます。ボース統計による対称化と角運動量の和の法則との不一致が本質的なので、同種でなければ（$g^{*a}\to g^b+g^c$; f^{abc}項）OKだし、$Z\to\gamma\gamma^*$ や $Z\to gg^*$ も全く問題ありません。面白い例として、

(382) (スピン1) → ZZ が日笠さんの論文［PRD35, 3366 (1987) E D38, 1632 (1988)］
$Z\to\Upsilon\Upsilon$, $J/\psi J/\psi$ が私の論文［PLB570, 39 (2003)］

にあります。重いヴェクトルボソンの場合、同種粒子であっても、一方が横波、他方が縦波であればOKなのです。残念ながら、私達が計算した $Z\to\Upsilon\Upsilon$ や $J/\psi J/\psi$ の分岐比は、小さすぎて見えません。//

上の例の様に、カラーのベースを直交するようにとることが便利な場合もあるのですが［この方針で頑張った例としては私の論文、NPB313, 560 (1989) 等があります］、一般的には SU(3) の generator T^a を並べただけのベースを使うことが多いようです。一般に任意の振幅をカラーのベースで展開し、

(383) $$\mathcal{M} = \sum_{i=1}^{n} T^i \hat{M}_i$$

とおくと、カラーの和は

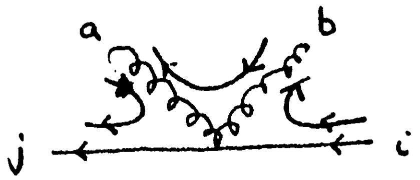
(384) $$\sum_{color}\sum_{spin} |M|^2 = \sum_{color}\sum_{spin}\left|\sum_{i=1}^{n} T^i \hat{M}_i\right|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{color} T^i (T^j)^*\right]\left[\sum_{spin} M_i (M_j)^*\right]$$

となります。このときの

(385) $$C^{ij} \equiv \sum_{color} T^i (T^j)^*$$

をカラー因子行列と呼び、あらかじめ計算しておくことが多いようです。T^i を generator の積で表わすベースでは、行列 C の対角要素 C^{ii} が large N 極限で leading であるため、カラーの流れをイベント（確率事象）について付与することができます。

(386) 例 $$\sum \left|(T^a T^b)_{ji}\right|^2 = tr(T^a T^b T^b T^a) \sim (N^2-1)^2$$



非対角要素、C^{ij} $(i \neq j)$ は C^{ii} に較べて $1/N^2$ で小さいようです。

Weightのとり方として、たとえば、QCDの予言(384)を

$$(387)\quad \sum_{\text{color}} \sum_{\text{spin}} |M|^2 = \sum_i \sum_j C^{ij} W_{ij}$$

と置いて、

$$(388)\quad \frac{C^{jj} W_{jj}}{\sum_{i=1}^{n} C^{ii} W_{ii}} = P_j$$

で分配すれば

$$(389)\quad \sum_{j=1}^{n} P_j = 1$$

なので「正しい」全断面積が得られ、且つ、P_j の確率で、C^{jj} のカラーフローを指定することができます。

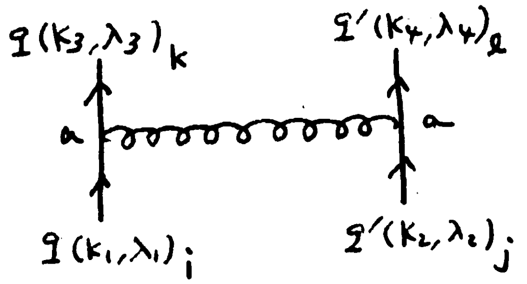
実際のMCでどうしているかは、これから教えていただこうと思っています。

$q q' \to q q'$

(390) $\quad q(k_1,\lambda_1)_i + q'(k_2,\lambda_2)_j \longrightarrow q(k_3,\lambda_3)_k + q'(k_4,\lambda_4)_l$

の計算をします。 $m_q = m_{q'} = 0$ とします。Feynman 図は

(391)



$m_q = m_{q'} = 0$ の ヘリシティー保存則より

(392) $\quad \lambda_1 = \lambda_3 = \lambda \ , \quad \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda'$

なので、振幅を

(393) $\quad M = T^a_{ki} T^a_{lj} \hat{M}_{\lambda\lambda'}$

とおく。Feynman 則より

(394)
$$iM = \bar{u}(k_3,\lambda)(-igT^a_{ki}\gamma^\mu)u(k_1,\lambda)\frac{-ig_{\mu\nu}}{(k_1-k_3)^2}\bar{u}(k_4,\lambda')(-igT^a_{lj}\gamma^\nu)u(k_2,\lambda')$$

(395)
$$\hat{M}_{\lambda\lambda'} = \frac{g^2}{t}\bar{u}(k_3,\lambda)\gamma^\mu u(k_1,\lambda)\ \bar{u}(k_4,\lambda')\gamma_\mu u(k_2,\lambda')$$
$$\equiv \frac{g^2}{t} J^\mu_\lambda \cdot J_{\lambda'\mu}$$

但し $t = (k_1-k_3)^2 = -2k_1k_3$

$$(396)\quad \begin{aligned} k_1^\mu &= E(1,0,0,1) \\ k_2^\mu &= E(1,0,0,-1) \\ k_3^\mu &= E(1,\sin\theta,0,\cos\theta) & [\phi=0] \\ k_4^\mu &= E(1,-\sin\theta,0,-\cos\theta) & [\phi=\pi] \end{aligned}$$

とおいたときに t-channel のカレントは、

$$(397a)\quad \begin{aligned} J_\lambda^\mu(k_1,k_3) &= \bar{u}(k_3,\lambda)\gamma^\mu u(k_1,\lambda) \\ &= \sum_\alpha u(k_3,\lambda)_\alpha^\dagger \sigma_\alpha^\mu u(k_1,\lambda)_\alpha \\ &= u(k_3,\lambda)_\lambda^\dagger \sigma_\lambda^\mu u(k_1,\lambda)_\lambda \\ &= 2E\,\chi_\lambda^\dagger(\vec{k}_3)\sigma_\lambda^\mu \chi_\lambda(\vec{k}_1) \end{aligned}$$

[$\alpha=\pm$: chilarity] p.86(232)

[$\lambda=\alpha$ rula for $m_q=0$]

$$(397b)\quad \begin{aligned} J_{\lambda'}^\mu(k_2,k_4) &= \bar{u}(k_4,\lambda')\gamma^\mu u(k_2,\lambda') \\ &= 2E\,\chi_{\lambda'}^\dagger(\vec{k}_4)\sigma_{\lambda'}^\mu \chi_{\lambda'}(\vec{k}_2) \end{aligned}$$

ここで $\chi_\lambda(\vec{k}_1)$ と $\chi_{\lambda'}(\vec{k}_2)$ は p.87(234)、$\chi_\lambda(\vec{k}_3)$ と $\chi_{\lambda'}(\vec{k}_4)$ は p.88(239) にあるので、

$$(398a)\quad \begin{aligned} J_+^\mu(k_1,k_3) &= 2E\,\chi_+(\vec{k}_3)^\dagger \sigma_+^\mu \chi_+(\vec{k}_1) = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)[1,\vec{\sigma}]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ &= 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(398b)\quad J_-^\mu(k_1,k_3) = 2E\left(-\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)[1,-\vec{\sigma}]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},-i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$(398c)\quad J_+^\mu(k_2,k_4) = 2E\left(\sin\tfrac{\theta}{2},-\cos\tfrac{\theta}{2}\right)[1,\vec{\sigma}]\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},-i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

$$(398d)\quad J_-^\mu(k_2,k_4) = 2E\left(\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2}\right)[1,-\vec{\sigma}]\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = 2E\left(-\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2},i\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2}\right)$$

2005. 6. 1

(399a) $J^{\mu}_{\lambda}(k_1, k_3) = 2E\,(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}, \lambda i \sin\frac{\theta}{2}, \cos\frac{\theta}{2})$

(399b) $J^{\mu}_{\lambda'}(k_2, k_4) = -2E\,(\cos\frac{\theta}{2}, -\sin\frac{\theta}{2}, \lambda' i \sin\frac{\theta}{2}, -\cos\frac{\theta}{2})$

振幅 (395) は

(400)
$$\begin{aligned}
\hat{M}_{\lambda\lambda'} &= \frac{g^2}{t}\, J_{\lambda}(k_1, k_3)\cdot J_{\lambda'}(k_2, k_4) \\
&= g^2\left(-\frac{s}{t}\right)\left(\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} - (-\lambda\lambda')\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2g^2\left(-\frac{s}{t}\right)\left[\cos^2\frac{\theta}{2} + \delta_{\lambda\lambda'}\sin^2\frac{\theta}{2}\right] \\
&= g^2\left(-\frac{s}{t}\right)\times\begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda = \lambda' \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4) \\ 1+\cos\theta & \cdots\ \lambda = -\lambda' \quad (\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = -\lambda_4) \end{cases}
\end{aligned}$$

カラーとスピンの和をとると

(401)
$$\begin{aligned}
\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 &= \sum_{k,i,l,j,a,b}(T^a_{ki}T^a_{lj})(T^b_{ik}T^b_{jl})\sum_{\lambda\lambda'}|\hat{M}_{\lambda\lambda'}|^2 \\
&= \left(tr(T^aT^b)\right)^2\ 4g^4\left(\frac{s}{t}\right)^2\left[1+\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\times 2 \\
&= \underbrace{T_F^2(N^2-1)}_{2}\ g^4\frac{16}{(1-\cos\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\times 2
\end{aligned}$$

$\begin{pmatrix}\lambda=\lambda'=\pm \\ \lambda=-\lambda'=\pm\end{pmatrix}$

カラーとスピンの平均をした断面積は

(402)
$$\begin{aligned}
d\sigma &= \frac{1}{2s}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\cdot\frac{32\,g^4}{(1-\cos\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\cdot\frac{1}{8\pi}\cdot\frac{d\cos\theta}{2} \\
&= \underbrace{\frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}}_{=\frac{2}{9}}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{s}\ \frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\left[1+\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2\right]\ d\cos\theta
\end{aligned}$$

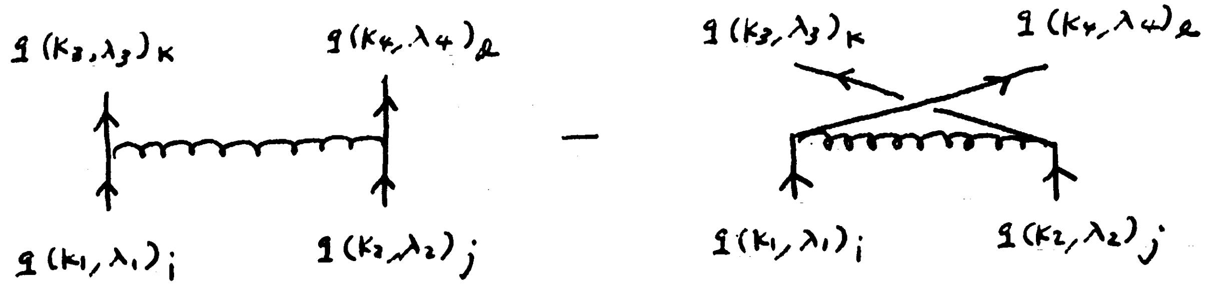
さてこの答えは合っていますか？

$qq \to qq$:

ここで、$q = q'$ (同種粒子：$uu \to uu$ など) の場合をやっておきましょう。

(403) $q(k_1,\lambda_1)_i + q(k_2,\lambda_2)_j \longrightarrow q(k_3,\lambda_4)_k + q(k_4,\lambda_4)_l$

となります。Feynman図は

(404)


で［相対符号の−はフェルミ演算子 $a_{k,\lambda}, a^{\dagger}_{k',\lambda'}$ 等の反交換関係の帰結です。納得していない方は、是非 $\langle 0|a_{k_4} a_{k_3} T \int d^4x \mathcal{L}_I \int d^4y \mathcal{L}_I \, a^{\dagger}_{k_1} a^{\dagger}_{k_2}|0\rangle$ を計算して納得してください。］ 振幅は $t=-s\frac{1-\cos\theta}{2}$, $u=-s\frac{1+\cos\theta}{2}$ として

(405)
$$M = T^a_{ki} T^a_{lj} \cdot \frac{g^2}{t} \cdot [\delta_{\lambda_1\lambda}\delta_{\lambda_3\lambda}\delta_{\lambda_2\lambda'}\delta_{\lambda_4\lambda'}] \cdot J_\lambda(k_1,k_3)\cdot J_{\lambda'}(k_2,k_4)$$
$$- T^b_{kj} T^b_{li} \cdot \frac{g^2}{u} \cdot [\delta_{\lambda_1\lambda}\delta_{\lambda_4\lambda}\delta_{\lambda_2\lambda'}\delta_{\lambda_3\lambda'}] \cdot J_\lambda(k_1,k_4)\cdot J_{\lambda'}(k_2,k_3)$$

まず干渉するのは

(406) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda = \lambda' = \pm$

のときに限ることを確認して下さい。

(407) $\lambda_1 = -\lambda_2 = \pm$

のときは干渉がないので、(402)式は単に $\cos\theta$ と $-\cos\theta$ の平均になります。(406)のときは、干渉しますが、干渉項のカラー因子は、

(408) $\displaystyle\sum_{ijkl}\sum_{ab}(T^a_{ki}T^a_{lj})(T^b_{jk}T^b_{il}) = tr(T^aT^bT^aT^b) = -T_F^2\frac{N^2-1}{N}$;(318)

となり、leading term (401)式の $T_F^2(N^2-1)$ に較べて $1/N$ で小さく、且つ符号がマイナスで

QEDの場合（ee→ee等）と較べ、干渉項の符号が逆、大きさが $1/3$ と

なることが分かります。一筋縄では行きませんね。(400)に対応する振幅は

(409) $\displaystyle \hat{M}^{(u)}_{\lambda\lambda'} \equiv \frac{g^2}{u} J_\lambda(k_1,k_4)\cdot J_{\lambda'}(k_2,k_3)$

$$= g^2\left(-\frac{s}{u}\right)\times\begin{cases} 2 & \cdots\ \lambda_1=\lambda_2\quad(=\lambda_3=\lambda_4) \\ 1-\cos\theta & \cdots\ \lambda_1=-\lambda_2\quad(=\lambda_4=-\lambda_3) \end{cases}$$

カラーとスピンの和をとると、

(410) $\displaystyle\sum_{color}\sum_{spin}|M|^2 = \sum_{ijkl}\sum_{a,b}\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}\left|T^a_{ki}T^a_{lj}\hat{M}_{\lambda\lambda'} - T^b_{kj}T^b_{li}\hat{M}^{(u)}_{\lambda''\lambda'''}\right|^2$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot 32g^4\cdot\left\{\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2}\right\}$$

$$-\left(-T_F^2\frac{N^2-1}{N}\right)\cdot g^4\frac{s^2}{tu}\cdot 2\cdot 2\times \underbrace{2}_{A\hat{A}^u+\hat{A}^uA}\times \overbrace{2}^{\lambda_1=\lambda_2=\pm}$$

$$= T_F^2(N^2-1)\cdot 32g^4\cdot\left\{\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2} - \left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right\}$$

一応求まりましたが自信がありません。QEDの場合（ee→ee）は、

$T_F^2(N^2-1)\to 1$, $\left(-\frac{1}{N}\right)\to 1$, $g^4\to e^4$ で良いはずです。

断面積は、同種粒子が2ヶある場合、phase space が半分

になるのですが、

(411) $0 \leq \cos\theta \leq 1$

同種粒子の場合だけ積分範囲を制限するのは面倒なので、

(411) $$\int_0^1 d\cos\theta \longrightarrow \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} d\cos\theta$$

として「統計因子」$\frac{1}{2}$ を入れることが一般的のようです。

(412) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}^{qq\to qq} = \frac{T_F^2(N^2-1)}{N^2}\cdot\frac{4\pi\alpha_s^2}{s} \times\left\{\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{4(1-\cos\theta)^2}+\frac{4+(1-\cos\theta)^2}{4(1+\cos\theta)^2}-\left(-\frac{1}{N}\right)\frac{2}{1-\cos^2\theta}\right\}\times\underbrace{\frac{1}{2}}_{(411)}$$

この結果が正しいかどうかは、是非、テキストや MadGraph を用いて check し、

結果を教えて下さい。エラーがある場合には check してまとめます。

(372) の MadGraph は振幅の計算を HELAS で実行するので、HELAS 振幅のコードを

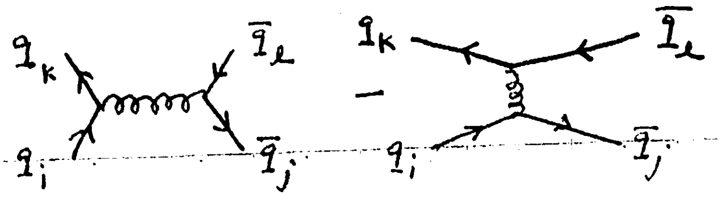
生成します。HELAS振幅は私の位相・ゲージコンベンションに従っているので、

全てのヘリシティー振幅の値が、符号や複素位相を含めて一致する(はず)です。

★ $q\bar{q}' \to q\bar{q}'$ は (402) と同じになります。

★ $q\bar{q} \to q\bar{q}$ は原理的には「消滅過程」の寄与があるのですが、

その効果は数値的に極めて小さく、(402) で代用して問題ありません。

(413) 

[練習問題としては良いと思います。]

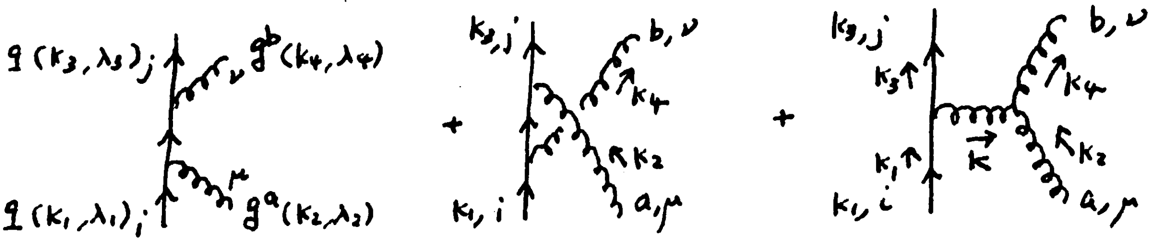
$qg \to qg$

次は $gg \to q\bar{q}$ [p. 108 (307)] の交差過程

(414) $q(k_1,\lambda_1)_i + g^a(k_2,\lambda_2) \longrightarrow q(k_3,\lambda_3)_j + g^b(k_4,\lambda_4)$

の計算をします。$m_q=0$ です。(308)式で (k_i,λ_i) と波動関数を取り替えると、

(415)



(416)
$$M = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{-(T^bT^a)_{ji}\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\gamma^\mu}{(k_1+k_2)^2} - (T^aT^b)_{ji}\frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\gamma^\nu}{(k_1-k_4)^2}$$
$$-if^{abc}T^c_{ji}\frac{\gamma_\rho}{(k_1-k_3)^2}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} + (-k_4-k)^\mu g^{\nu\rho} + (k-k_2)^\nu g^{\rho\mu}\right]\Big\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

せっかくですから、今回は「標準的な」カラーベース

(417) $$M = (T^aT^b)_{ji}\hat{M}_I + (T^bT^a)_{ji}\hat{M}_{II}$$

を用いることにしましょう。まず

(418) $$if^{abc}T^c_{ji} = [T^a, T^b]_{ji} = (T^aT^b)_{ji} - (T^bT^a)_{ij}$$

(419) $$[\ \ ]^{\mu\nu\rho} = (k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - (2k_4^\mu - \overset{\to 0}{k_2^\mu})g^{\nu\rho} + (\overset{\to 0}{k_4^\nu} - 2k_2^\nu)g^{\rho\mu} = (k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}$$

(420) $$\hat{M}_I = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\gamma^\nu}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

(421) $$\hat{M}_{II} = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{-\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\gamma^\mu}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\}u(k_1,\lambda_1)\varepsilon_\mu(k_2,\lambda_2)\varepsilon^*_\nu(k_4,\lambda_4)$$

ここで、$\hat{M}_I$ と $\hat{M}_{II}$ が独立にゲージ不変であることを確認しましょう。

(422) $$\hat{M}_I(\varepsilon_\nu(k_4)\to k_{4\nu}) \to \frac{\gamma^\mu(\not k_1-\not k_4)\not k_4}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho k_4^\mu - 2k_4^\mu k_4^\rho - 2k_2\cdot k_4\, g^{\rho\mu}\right]$$

$$= \frac{\gamma^\mu \not k_1\not k_4}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2-k_4)^\rho k_4^\mu - (k_2+k_4)^2 g^{\rho\mu}\right]$$

$$= \frac{\gamma^\mu(2k_1k_4 - \not k_4\not k_1)}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_3-k_1)^\rho k_4^\mu - (k_1+k_3)^2 g^{\rho\mu}\right]$$

$$= \gamma^\mu - \frac{\gamma^\mu\not k_4 \overset{\to 0}{\not k_1}}{2k_1k_4} + \frac{\overset{0\leftarrow}{\not k_3} - \overset{\to 0}{\not k_1}}{2k_1k_3}k_4^\mu - \gamma^\mu$$

$$= 0$$

(423) $$\hat{M}_{II}(\varepsilon_\mu(k_2)\to k_{2\mu}) \to -\frac{\gamma^\nu(\not k_1+\not k_2)\not k_2}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_2+k_4)^\rho k_2^\nu - 2k_4k_2\, g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu k_2^\rho\right]$$

$$= -\frac{\gamma^\nu\not k_1\not k_2}{2k_1k_2} - \frac{\gamma_\rho}{2k_1k_3}\left[(k_4-k_2)^\rho k_2^\nu - (k_2+k_4)^2 g^{\nu\rho}\right]$$

$$= -\frac{\gamma^\nu(2k_1k_2 - \not k_2\overset{\to 0}{\not k_1})}{2k_1k_2} - \frac{\overset{\to 0}{\not k_1} - \overset{\leftarrow}{\not k_3}}{2k_1k_3}k_2^\nu + \frac{\gamma^\nu}{2k_1k_3}(k_1+k_3)^2$$

$$= -\gamma^\nu + \gamma^\nu = 0$$

$\hat{M}_I$ と $\hat{M}_{II}$ は $N\to\infty$ で干渉せず［(408)参］、振幅のゲージ不変性は $\frac{1}{N}$ 展開の各オーダーで保証されるためです。安心して $\hat{M}_I$ と $\hat{M}_{II}$ の計算をします。

(424) $$\hat{M}_I = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\frac{\gamma^\mu[2k_1^\nu - \gamma^\nu\overset{\to 0}{\not k_1} - \not k_4\gamma^\nu]}{2k_1k_4} + \frac{\gamma_\rho}{2k_2k_4}\left[(k_2+k_4)^\rho g^{\mu\nu} - 2k_4^\mu g^{\nu\rho} - 2k_2^\nu g^{\rho\mu}\right]\right\} v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$$

$$= g^2\bar{u}_3\left\{-\frac{\gamma^\mu\not k_4\gamma^\nu}{2k_1k_4} + \gamma^\mu\left(\frac{k_1^\nu}{k_1k_4} - \frac{k_2^\nu}{k_2k_4}\right) - \gamma^\nu\frac{k_4^\mu}{k_2k_4} + \frac{\not k_2+\not k_4}{2k_2k_4}g^{\mu\nu}\right\} v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$$

(425) $$\gamma^\mu\not k_4\gamma^\nu = k_4^\mu\gamma^\nu - \not k_4 g^{\mu\nu} + k_4^\nu\gamma^\mu + i\varepsilon^{\mu\alpha\nu\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{4\alpha}$$ ［p.112 (324)］

(426) $$\not k_2+\not k_4 = (\overset{0\leftarrow}{\not k_3}+\not k_4-\overset{\to 0}{\not k_1})+\not k_4 = 2\not k_4$$

$$+\gamma^\mu\left(\frac{k_1^\nu}{k_1k_4} - \frac{k_2^\nu}{k_2k_4}\right)$$

(427) $$\hat{M}_I = g^2\bar{u}_3\left\{-\left(\frac{1}{2k_1k_4}+\frac{1}{k_2k_4}\right)k_4^\mu\gamma^\nu + \left(\frac{1}{2k_1k_4}+\frac{1}{k_2k_4}\right)\not k_4\, g^{\mu\nu} - \frac{i\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}k_{4\alpha}\gamma_\beta\gamma_5}{2k_1k_4}\right\} v_1\varepsilon_{2\mu}\varepsilon^*_{4\nu}$$

(428) $\hat{M}_{\mathrm{I}} = g^2 \left\{ \left(\frac{1}{k_2 k_4} + \frac{1}{2k_1 k_4} \right) [k_4 \cdot J \, \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4^* - k_4 \cdot \varepsilon_2 \, J \cdot \varepsilon_4^*] + \left(\frac{k_1 \cdot \varepsilon_4^*}{k_1 k_4} - \frac{k_2 \cdot \varepsilon_4^*}{k_2 k_4} \right) J \cdot \varepsilon_2 - i \frac{[\varepsilon_2, \varepsilon_4^*, k_4, J_5]}{2k_1 k_4} \right\}$

(429) $(J^\mu, J_5^\mu) \equiv \bar{u}(k_3, \lambda_3)(\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5) v(k_1, \lambda_1)$

(430) $[a, b, c, d] \equiv \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} a^\mu b^\nu c^\rho d^\sigma$

全く同様に

(431) $\hat{M}_{\mathrm{II}} = g^2 \left\{ \left(\frac{1}{2k_3 k_4} - \frac{1}{k_2 k_4} \right) [k_4 \cdot J \, \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4^* - k_4 \cdot \varepsilon_2 \, J \cdot \varepsilon_4^*] + \left(\frac{k_2 \cdot \varepsilon_4^*}{k_2 k_4} - \frac{k_3 \cdot \varepsilon_4^*}{k_3 k_4} \right) J \cdot \varepsilon_2 + i \frac{[\varepsilon_2, \varepsilon_4^*, k_4, J_5]}{2k_3 k_4} \right\}$

ここで J^μ, J_5^μ は (379a) と同じで

(432) $(\gamma^\mu, J_5^\mu)_\lambda = \bar{u}(k_3, \lambda)(\gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma_5) u(k_1, \lambda) = (1, \lambda) J_\lambda^\mu$; $J_\lambda^\mu = (399a)$

(433) $\varepsilon_2^\mu = \varepsilon(k_2, \lambda_2)^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \lambda_2, -i, 0)$; (333b)

$\varepsilon_4^{\mu *} = \varepsilon(k_4, \lambda_4)^{\mu *} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda_4 \cos\theta, i, \lambda_4 \sin\theta)^*$; (332) $\theta \to \pi - \theta$, $\phi = \pi$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -\lambda_4 \cos\theta, -i, \lambda_4 \sin\theta)$

$k_1^\mu \sim k_4^\mu$ は (331)。従って

(434) $\varepsilon_2 \cdot \varepsilon_4^* = \frac{1}{2}[0 - \lambda_2(-\lambda_4)\cos\theta - (-i)(-i) - 0] = \frac{1}{2}(1 + \lambda_2 \lambda_4 \cos\theta)$

$k_1 \cdot \varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}}(-\lambda_4 \sin\theta)$
$k_2 \cdot \varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}}(+\lambda_4 \sin\theta)$
$k_3 \cdot \varepsilon_4^* = \frac{E}{\sqrt{2}} \lambda_4 (\sin\theta \cos\theta - \cos\theta \sin\theta) = 0$; $k_3^\mu \sim n^\mu$ は HELASのゲージベクトル.

$k_4 \cdot \varepsilon_2 = \frac{E}{\sqrt{2}} \lambda_2 \sin\theta$

2005. 6. 2

(435) $k_4 \cdot J = 2E^2\left(\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2}\right) = 2E^2\cos\frac{\theta}{2}\left(1+2\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right) = 4E^2\cos\frac{\theta}{2}$

$$\varepsilon_2 \cdot J = \sqrt{2}E\left(-\lambda_2\sin\frac{\theta}{2} + i\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)\right) = -\sqrt{2}E(\lambda+\lambda_2)\sin\frac{\theta}{2} = -2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\,\lambda\delta_{\lambda\lambda_2}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_4^* \cdot J &= \sqrt{2}E\left(\lambda_4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} + i\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right) - \lambda_4\sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\\ &= \sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\left(\lambda_4\cos\theta - \lambda_4 2\cos^2\frac{\theta}{2} - \lambda\right)\\ &= -\sqrt{2}E(\lambda+\lambda_4)\sin\frac{\theta}{2}\\ &= -2\sqrt{2}E\sin\frac{\theta}{2}\,\lambda\delta_{\lambda\lambda_4}\end{aligned}$$

(436) $[\varepsilon_2, \varepsilon_4^*, k_4, J_5] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot E\cdot 2E\lambda \begin{vmatrix} 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ 0 & -\lambda_4\cos\theta & -i & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & -\sin\theta & 0 & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} & i\lambda\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$

$$= E^2\lambda\left\{\lambda_2\varepsilon_{1023}\begin{vmatrix} 0 & -i & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & 0 & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & i\lambda\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{vmatrix} - i\varepsilon_{2013}\begin{vmatrix} 0 & -\lambda_4\cos\theta & \lambda_4\sin\theta \\ 1 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2}\end{vmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned}&= E^2\lambda\Big\{-\lambda_2\Big[-i\left(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_4\sin\theta\left(i\lambda\sin\frac{\theta}{2}\right)\Big]\\ &\qquad - i\Big[-\lambda_4\cos\theta\left(-\cos\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\right) + \lambda_4\sin\theta\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\theta\cos\frac{\theta}{2}\right)\Big]\Big\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -iE^2\lambda\Big\{\lambda_2\Big[\cos\frac{\theta}{2}(1+\cos\theta) + \lambda\lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\,2\sin^2\frac{\theta}{2}\Big]\\ &\qquad + \lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\cos\theta(1+\cos\theta) + \lambda_4\cos\frac{\theta}{2}\Big[2\sin^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\theta\Big]\Big\}\end{aligned}$$

$$= -iE^2\lambda\cos\frac{\theta}{2}\Big\{\lambda_2\left[1+\cos\theta + \lambda\lambda_4(1-\cos\theta)\right] + \lambda_4\left[\cancel{\cos\theta} + \cos^2\theta + 1 - \cancel{\cos\theta} + \sin^2\theta\right]\Big\}$$

$$= -iE^2\cos\frac{\theta}{2}\left[\lambda\lambda_2(1+\cos\theta) + \lambda_2\lambda_4(1-\cos\theta) + 2\lambda\lambda_4\right]$$