QCD for Collider Physics V

2005. 5. 18

まずは前回の反省から。

p.71 で自由Dirac場のHamiltonian (171) が場の量子論の前提（最低エネルギー状態を「真空」としたときに、正エネルギーの粒子、反粒子が場の演算子によって生成される）を満たす (172) 式になるためには、反交換関係 (170) を量子化条件として課する必要があることを見ました。そのときに、ゼロ点振動項が負になることを指摘しましたが、ボソン場の例をこのノートに載せていませんでした。ここで、粒子と反粒子が異る複素スカラー場の Hamiltonian をただの交換関係によって場の量子化ができること、ゼロ点振動項の符号が正になることを見ます。

Lagrangian は（密度を $\mathcal{L}$, $\mathcal{H}$ と表わし、空間積分したものを L, H とします）:

(263) $$\mathcal{L} = (\partial_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

これは実スカラー場 ϕ_1 と ϕ_2 $(\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2},\ \phi^*=(\phi_1-i\phi_2)/\sqrt{2})$ の Lagrangian

(264) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\phi_1)^2+(\partial_\mu\phi_2)^2 - m^2(\phi_1^2+\phi_2^2)\right]$$

と等可です。ϕ, ϕ^* を独立な場として Hamiltonian (26) をもとめると、

(265) $$\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi}\partial^0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^0\phi^*}\partial^0\phi^* - \mathcal{L}$$
$$= (\partial_0\phi^*)(\partial^0\phi) + (\partial_0\phi)(\partial^0\phi^*) - \mathcal{L}$$
$$= 2(\partial_0\phi^*)(\partial_0\phi) - \left[(\partial_0\phi^*)(\partial_0\phi) - (\partial_i\phi^*)(\partial_i\phi) - m^2\phi^*\phi\right]$$
$$= (\partial_0\phi^*)(\partial_0\phi) + (\partial_i\phi^*)(\partial_i\phi) + m^2\phi^*\phi$$

ここで、3行目で微分の添え字を下つきりそろえて、（∂_i、…）にしました。部分積分をすると、

2005. 5 . 18

$$(266)\quad \mathcal{H} = \underbrace{\partial_0(\phi^*\partial_0\phi) + \partial_i(\phi^*\partial_i\phi)}_{\to 0} - \phi^*\partial_0\partial_0\phi - \phi^*\partial_i\partial_i\phi + m^2\phi^*\phi$$

$$= \phi^*(-\partial_0\partial_0 - \partial_i\partial_i + m^2)\phi$$

$$= \phi^*\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2\right]\phi$$

Hamiltonian は p.Ⅰ で表わします。p.117〜118 に解説を加えました。

この最後の式は Hamiltonian らしく見えると思います。[ちなみに、この式は、場のエネルギーが、時間振動，空間振動，質量の和の様に読めます。Dirac 場のエネルギーの表示 (165) では時間振動の項が顕わでありませんね。] 量子化された場の表式 (52) を用いて H を計算します。

$$(267)\quad H = \int \mathcal{H}\, d^3x$$

p.118 (341)式で修正.

$$= \int d^3x \left\{ \phi^*(x)\left[-\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^2 + m^2\right] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}\right]_{k^0=E} \right\}$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\underbrace{\left[a_{\mathbf{k}'}^\dagger e^{ik'x} + b_{\mathbf{k}'} e^{-ik'x}\right]}_{k^{0\prime}=E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}\underbrace{(E^2+\mathbf{k}^2+m^2)}_{=2E^2}\left[a_{\mathbf{k}} e^{-ikx} + b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{ikx}\right]_{k^0=E}$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} 2E^2 \underbrace{\left[a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} e^{+i(k'-k)x} + b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(k-k')x} + a_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(k'+k)x} + b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} e^{-i(k+k')x}\right]}_{k^0=E,\ k'^0=E'}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} 2E^2 \Big\{ (a_{\mathbf{k}'}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}}^\dagger)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$$

$$+ (a_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{i(E+E')t} + b_{\mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}} e^{-i(E+E')t})(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \Big\}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2}\left\{ a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger + a_{-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{2iEt} + b_{-\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-2iEt} \right\}$$

後の2項は顕わな時間依存性をもつので消えるはずですが、一般に

$$(268)\quad \int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)g(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \frac{1}{2}\left[f(x)g(-x) + f(-x)g(x)\right] \cancel{=0}$$

でゼロに~~なります~~ (x を $\mathbf{k}$ と読みかえて下さい)。f と g を交換できなくても OK です。「思い込み」によるエラーでした。

Dirac粒子のHamiltonianの計算中、p.70の(168)式で、時間依存項の係数がゼロで

超対称な標準模型では、この相殺は

あることを示しましたが、~~これは全くの徒労だったわけです。こちらを先にやれば気が~~

(273) { 質量ゼロでカイラリティーが定まったフェルミ粒子(とその反粒子)

~~ついたはずでした。~~ごめんなさい。さて結果は

質量ゼロでスピン以外の量子数が全て同じ複素スカラー粒子(とその反粒子)

(268)式が誤りなので、この文も誤りです。p.117~118に反省を掲げました。(341)式と、(345)式で、$a^\dagger a$、$b^\dagger b$、ab、ba項の相殺は運動方程式で保証されることが示されました。

(269) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2}\left[a^\dagger_k a_k + b_k b^\dagger_k\right]$$

の間で成立します。p.64(139)で学んだように、質量ゼロで粒子のヘリシティーは

となり、これがDirac粒子に対する表式(169)に対応します。通常のHの

カイラリティーと一致しますから、フェルミオンのHamiltonianで

見かけにするためには、生成消滅演算子の規格化をもとにもどして

存在しないわけです。反粒子のヘリシティーはカイラリティーと逆符号(152)ですから、

(270) $$a_k = \sqrt{2E}\,\hat{a}_k, \quad b_k = \sqrt{2E}\,\hat{b}_k$$

たとえば カイラリティーが左巻き(L)のフェルミオンのHamiltonianは

$$[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_{k'}] = [\hat{b}_k, \hat{b}^\dagger_{k'}] = (2\pi)^3\delta^3(k-k')$$

(274)
(271) $$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} E_k \left\{ \hat{a}^\dagger_k \hat{a}_k + \hat{b}^\dagger_k \hat{b}_k + \underbrace{(2\pi)^3\delta^3(0)}_{+\infty} \right\}$$
$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |k| \left\{ a^\dagger_{kL} a_{kL} + b^\dagger_{kR} b_{kR} - (2\pi)^3\delta^3(0) \right\}$$

となって、複素スカラー場の量子化における交換関係に由来する零点振動項が

正の∞であることを記憶しておいて下さい。正確な議論はこの∞項を正則

超対称な標準模型の言及でもう一組のゼロ点振動項と相殺することで

説明します。フェルミオン場とボゾン場のゼロ点振動項が次の場合に相殺します。

(275) { 質量ゼロでスピン以外の量子数が同じフェルミ粒子(ゲージノ)
{ 質量ゼロのフェルミ粒子と反粒子(カイラリティーが対)からなる複素スカラー場(サフ)が対応する。

相殺は超対称性の要請ですが、(172)式 (271)式 相方で $\int d^3k\, E_k\, \delta^3(0)$ が

あたかも有限量であるかの様に取り扱って良いことを示すので覚えやすいですね。

となるわけですが、フェルミオンのHamiltonian(274)は次の様になります。

2005.5.18

(277) $$H_{ゲージノ} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} |k| \left\{ \hat{a}^{\dagger}_{k,L} a_{k,L} + a^{\dagger}_{k,R} a_{k,R} - (2\pi)^3 \delta^3(0) \right\}$$

つまり、粒子のエネルギーと反粒子のエネルギーの和(274)ではなくて、ヘリシティー左巻きの粒子のエネルギーと右巻き粒子のエネルギーの和になるわけです。(274)と(277)を較べれば、この2種類の質量ゼロフェルミオンには本質的な違いがないことがわかります。粒子と反粒子の区別は「内部」対称性の保存電荷によるわけですから、ローレンツ変換で変換される「スピノール」としては全く同じものです。実際、「内部」対称性が自発的に破れる標準模型ではこの区別が全く無くなってしまうことが起ります。MSSM(最小超対称性標準模型)では、左巻きの$\overbrace{\text{ヒッグスフェルミオン}}^{\text{中性}}$$\overbrace{\text{(ヒグシーノ)}}^{\text{中性}}$が2個、弱アイソスピンが$+\frac{1}{2}$のもの($\tilde{H}^0_d$)と$-\frac{1}{2}$のもの($\tilde{H}^0_u$)があります。それぞれ、弱アイソスピンが逆の反粒子をもつ「カイラル」フェルミオンなのですが、$SU(2)_L \times U(1)_Y \to U(1)_{EM}$、の対称性の破れが起きると、弱アイソスピンの値による粒子・反粒子の区別は絶対ではなくなります。「絶対」を維持する荷電は電荷(Q)だけなので、電荷ゼロの中性ヒッグシーノの粒子と反粒子の区別は便宜的なものになってしまいます。こうして、本来粒子と反粒子の区別がある(カイラルな)2個の$\overbrace{\text{ヒッグシーノ}}^{\text{中性}}$と、本来その区別が無い(実の)ゲージノ($\tilde{W}^3$と$\tilde{B}$)が混合して、4個のニュートラリーノになるわけです。粒子と反粒子の区別の無いフェルミオンのことをマヨラナフェルミオンと呼びます。質量がゼロの場合、カイラルフェルミオンとマヨラナフェルミオンの区別は内部対称性の

電荷の値がゼロでない（カイラル）か、ゼロである（マヨラナ）かの区別だけで、スピノールとしては全く同じであることを説明しました。電弱対称性が自発的に破れてフェルミオンが質量を持つときに、その質量項が（粒子数－反粒子数）を保存するときはDirac質量、そうでないときはMajorana質量と呼び、それぞれ有限質量のDiracフェルミオン、Majoranaフェルミオンと呼びます。「絶対」の電荷 $Q \neq 0$ のフェルミオンはQ保存によりDirac質量しかもつことができません。$Q=0$ のフェルミオンはどちらの可能性も、混合することも、可能です。$Q=0$ のフェルミオンがDirac質量を持つためには必ず ~~2組~~ 2個の質量ゼロフェルミオンの組みが必要です。1つめのフェルミオンのL成分を「粒子」、2つめのフェルミオンのR成分を「反粒子」、と名づけ、その上で「粒子数」が保存するように質量項を導入します。一方、2組あれば、同時に、粒子数を保存しないMajorana質量を許すことも可能です。シーソー機構はこの様な混合質量項の例と考えて良いですが、重いMajorana質量項の極限で、質量固有状態はほぼ純粋なMajorana粒子となります。さて、長々とマヨラナ（実）フェルミオンの説明をしましたが、MSSMで（277）の負のゼロ点エネルギーを相殺するのはゲージボソンの効果です。

$$(278)\quad H_{ゲージボソン} = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3} |\mathbb{k}| \left\{ \sum_{\lambda=\pm1} a^\dagger_{\mathbb{k},\lambda} a_{\mathbb{k},\lambda} + (2\pi)^3 \delta^3(0) \right\}$$

$\lambda=+1$ のゲージボソンを右巻き、$\lambda=-1$ を左巻きと呼べば（277）式との対応はより明らかですね。　// ここでちょっと長めの脱線を終わります。

さて、真面目な振幅の計算を始めましょう。QCD Lagrangian (244), (255), (260), (262) をもう1度整理します。

(279a) $$\mathcal{L}_{QCD} = \overline{\psi}_i (i \not{D}_{ij} - m\delta_{ij})\psi_j - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \text{gauge fix. terms}$$
$$= \mathcal{L}^0_{QCD} + \mathcal{L}^I_{QCD}$$

(279b) $$\mathcal{L}^0_{QCD} = \overline{\psi}_i (i\not{\partial} - m)\delta_{ij}\psi_j - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8} (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + \text{g.f.t.}$$

(279c) $$\mathcal{L}^I_{QCD} = -g\sum_{a=1}^{8} (\overline{\psi}_i T^a_{ij} \gamma^\mu \psi_j) A^a_\mu$$
$$+ \frac{g}{2}\sum_{a,b,c} f^{abc} (\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) A^b_\mu A^c_\nu$$
$$- \frac{g^2}{4}\sum_{a,b,c,d,e} f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu} A^{e\nu}$$
$$+ \text{ghost term}$$

p. 125 (357) に再掲.

このエラーは、p. 124 (355) で $gg \to Q\overline{Q}$ の振幅がゲージ不変でないことで発見されました。

ここで、とりあえず、gauge fixing terms (ghost terms) はスキップさせて下さい。これらの導出だけのために新しい場の量子化法（経路積分法）を説明するべきか、考え中です。

まず自由場の部分 (279b) からプロパゲータが求まります。クォークのプロパゲータは

(280) $$S_F(x-y)_{ij,\alpha\beta} \equiv \langle 0 | T\, \psi_{i,\alpha}(x) \overline{\psi}_{j,\beta}(y) | 0 \rangle$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} (\not{k} + m)_{\alpha\beta} \quad : \quad i \xleftarrow{\ \leftarrow k\ } j$$

ここで $i, j = 1, 2, 3$ は SU(3) の足、$\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4$ はスピノールの足です。[(206) 式の i, j はここでは α, β です。(206) 式の最後の行で $i\ (=\sqrt{-1})$ が抜けていました。]

グルオンのプロパゲータは 光のプロパゲータ (57) 式と同様。[(57) 式で $m^2 = 0$ と置いて下さいね。]

2005. 5. 19

さて、真面目な振幅の計算を始めましょう。QCD Lagrangian (244), (255), (260), (262) をもう1度整理します。

$$\text{(279a)}\quad \mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i (i\not{D}_{ij} - m\delta_{ij})\psi_j - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu} + \text{gauge fix. terms}$$

$$= \mathcal{L}^0_{QCD} + \mathcal{L}^I_{QCD}$$

$$\text{(279b)}\quad \mathcal{L}^0_{QCD} = \bar{\psi}_i (i\not{\partial} - m)\delta_{ij}\psi_j - \frac{1}{4}\sum_{a=1}^{8}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu}) + g.f.t.$$

$$\text{(279c)}\quad \mathcal{L}^I_{QCD} = -g\sum_{a=1}^{8}(\bar{\psi}_i T^a_{ij}\gamma^\mu\psi_j)A^a_\mu$$

$$-\frac{g}{2}\sum_{a,b,c} f^{abc}(\partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu})A^b_\mu A^c_\nu$$

$$-\frac{g^2}{4}\sum_{a,b,c,d,e} f^{abc}f^{ade}A^b_\mu A^c_\nu A^{d\mu}A^{e\nu}$$

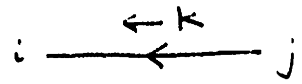
$$+ \text{ghost term}$$

ここで、とりあえず、gauge fixing terms (ghost terms) はスキップさせて下さい。これらの導出だけのために新しい場の量子化法（経路積分法）を説明するべきか、考え中です。

まず自由場の部分(279b)からプロパゲータが求まります。クォークのプロパゲータは

$$\text{(280)}\quad S_F(x-y)_{ij,\alpha\beta} \equiv \langle 0|T\,\psi_{i,\alpha}(x)\bar{\psi}_{j,\beta}(y)|0\rangle$$

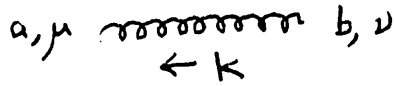
$$= \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i\delta_{ij}}{k^2-m^2+i\varepsilon}(\not{k}+m)_{\alpha\beta}$$



ここで $i,j=1,2,3$ は SU(3) の足、$\alpha,\beta=1,2,3,4$ はスピノールの足です。[(206)式の i,j はここでは α,β です。(206)式の最後の行で $i\ (=\sqrt{-1})$ が抜けていました。]

グルオンのプロパゲータは光のプロパゲータ(57)式と同様、[(57)式で $m^2=0$ と直して下さいね.]

(281) $$D_F(x-y)^{ab}_{\mu\nu} \equiv \langle 0|T A^a_\mu(x) A^b_\nu(y)|0\rangle$$



$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon} \sum_{\lambda=\pm 1} \varepsilon_\mu(k,\lambda)\varepsilon^*_\nu(k,\lambda)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i\delta^{ab}}{k^2+i\varepsilon} (-g_{\mu\nu} + \text{gauge fix terms})$$

質量ゼロのベクトルボソンの偏極ベクトル和は光子の場合と全く同じです。(280)と(281)は、カラー自由度の項、δ_{ij}とδ^{ab}を除けば電子のプロパゲータ(206)、光のプロパゲータ(57)と全く同じです。相互作用項が3項ある、(279c)、のが主要な違いになります。Feynman則を求めてみましょう。

(282) $$\langle 0| i\mathcal{L}^I_{QCD} | q_j(k_1,\lambda_1)\bar{q}_i(k_2,\lambda_2) g^a(k_3,\lambda_3)\rangle$$

$$= \langle 0| i\mathcal{L}^I_{QCD}(x)\ a^\dagger_{j,k_1,\lambda_1}\ b^\dagger_{i,k_2,\lambda_2}\ a^\dagger_{a,k_3,\lambda_3}|0\rangle$$

から、4運動量保存項、$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$、と外線の波動関数を除いた部分：

(283) $$\langle 0| i\mathcal{L}^I_{QCD}(x) | q_j(k_1,\lambda_1)\bar{q}_i(k_2,\lambda_2) g^a(k_3,\lambda_3)\rangle = \bar{v}(k_2\lambda_2)$$

$$= (\Gamma^{a\mu}_{ij})_{\alpha\beta}\ u(k_1,\lambda_1)_\beta\ \bar{v}(k_2,\lambda_2)_\alpha\ \varepsilon_\mu(k_3,\lambda_3)\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

$$= \bar{v}(k_2,\lambda_2)\ \Gamma^{a\mu}_{ij}\ u(k_1,\lambda_1)\ \varepsilon_\mu(k_3,\lambda_3)\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2+k_3)$$

上式で$(\Gamma^{a\mu}_{ij})_{\alpha\beta}$、その行列表示$\Gamma^{a\mu}_{ij}$、をFeynman則と呼びます。Feynman則は外線粒子がin state $|\ \rangle$にあるかout state $\langle\ |$にあるかに依存しませんが、私は常に全ての外線粒子をin state $|\ \rangle$に置いて計算します。e^{-ikx}項が選ばれるわけです。

ここで、クォーク場とグルオン場の自由場展開を書いておきましょう。

(284) $$\psi_j(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{j,\mathbb{k},\lambda}\, u(\mathbb{k},\lambda) e^{-ikx} + b^\dagger_{j,\mathbb{k},\lambda}\, v(\mathbb{k},\lambda) e^{ikx} \right\}$$

$$\overline{\psi_j}(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{j,\mathbb{k},\lambda}\, \overline{u}(\mathbb{k},\lambda) e^{ikx} + b_{j,\mathbb{k},\lambda}\, \overline{v}(\mathbb{k},\lambda) e^{-ikx} \right\}$$

(285) $$A^a_\mu(x) = \int \frac{d^3\mathbb{k}}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{a,\mathbb{k},\lambda}\, \varepsilon_\mu(\mathbb{k},\lambda) e^{-ikx} + a^\dagger_{a,\mathbb{k},\lambda}\, \varepsilon_\mu(\mathbb{k},\lambda)^* e^{ikx} \right\}$$

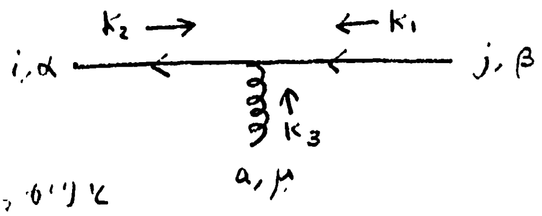
(284)と(285)を(283)に代入して(反)交換関係、

(286a) $$\{ a_{i,\mathbb{k},\lambda}, a^\dagger_{j,\mathbb{k}',\lambda'} \} = \{ b_{i,\mathbb{k},\lambda}, b^\dagger_{j,\mathbb{k}',\lambda'} \} = \delta_{ij} (2\pi)^3 2E\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

(286b) $$[a_{a,\mathbb{k},\lambda}, a^\dagger_{b,\mathbb{k}',\lambda'}] = \delta_{ab} (2\pi)^3 2E\, \delta^3(\mathbb{k}-\mathbb{k}')$$

を用いると、Feynman則 $\Gamma^{a\mu}_{ij}$ が求まります。

(287) $$\left(\Gamma^{a\mu}_{ij}\right)_{\alpha\beta} = -ig T^a_{ij} (\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$$



と求まりましたか？右図との対応をしっかりと納得して下さい。αとβの順序、iとjの順序とクォーク数の流れ(矢印の向き)との関係が重要です。($(T^a)^T \neq T^a$, $(\gamma^\mu)^T \neq \gamma^\mu$ を思い出して下さい)。矢印の向きと逆向きに式を書くと、カラー(3×3)とスピノール(4×4)共に、行列演算のルールになる、と覚えるのが良いと思います。さて、3グルオン、4グルオン結合も同様に求めてみましょう。QEDに無い項なので、少しだけていねいにやってみます。

定義はそれぞれ

(288) $\langle 0 | i \mathcal{L}^{I}_{QCD}(x) | g^{a}(k_1,\lambda_1)\, g^{b}(k_2,\lambda_2)\, g^{c}(k_3,\lambda_3) \rangle$

最後に4点結合ですが、(290)同様 repeated index を label替えして

(292) $\mathcal{L}_{QCD} \equiv \langle 0 | i \mathcal{L}^{I}_{QCD}(x)\, a^{\dagger}_{a,k_1,\lambda_1}\, a^{\dagger}_{c,k_2,\lambda_2}\, a^{\dagger}_{c,k_3,\lambda_3} = -\frac{g^2}{4}\sum A^{k_1}_{\alpha} A^{k_3}_{\beta} A^{a'\alpha} A^{d'\beta}$

$\equiv \Gamma^{abc\,a'b'c'd'e}\, \varepsilon(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon^{\nu}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^{\rho}(k_3,\lambda_3)\, (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3)$

としておいてから(289)を計算します。(289)をちょっと工夫して

(293) $\langle 0 | i \mathcal{L}^{II}_{QCD}(x) | a^{a\dagger}_{a_1,k_1,\lambda_1}(k_1,\lambda_1)\, a^{b\dagger}_{a_2,k_2,\lambda_2}(k_2,\lambda_2)\, a^{c\dagger}_{a_3,k_3,\lambda_3}(k_3,\lambda_3)\, a^{d\dagger}_{a_4,k_4,\lambda_4}(k_4,\lambda_4) | 0 \rangle$

$\equiv \Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} \mathcal{L}_{QCD}\, \varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\, \varepsilon^{\mu_2}_{b,k_2,\lambda_2}(k_2,\lambda_2)\, \varepsilon^{\mu_3}_{c,k_3,\lambda_3}(k_3,\lambda_3)\, \varepsilon^{\mu_4}_{d,k_4,\lambda_4}(k_4,\lambda_4)\, (2\pi)^4 \delta^4(k_1+k_2+k_3+k_4)$

としておきます。$\Gamma^{abcd}_{\mu\nu\rho\sigma}$ そうです (k_1,λ_1) に $\varepsilon(k_2,\lambda_2)$ を ρ 形式で... $(2\pi)^4\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$

と(289)は $\Gamma^{a_1a_2a_3a_4}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}$ (279c)式 $\frac{g^2}{4} f^{a'b'e} f^{c'd'e}$ 2行目が寄与しますが、$\{ \delta^{a'a_1} \delta^{b'a_2} \delta^{c'a_3} \delta^{d'a_4}$ repeated index $g\, g\, g^{\alpha}\, g^{\beta}$ が区別できるよう順列 $\}$

(290) $\mathcal{L}^{I}_{QCD} \cdot \frac{g^2}{4} = \left\{ \frac{g}{2}\, f^{a_1a_2b}\, f^{a_3a_4b}\, \frac{g}{2}\, f^{a'b'c'}_{a',b',c'}\, g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} (\partial^{\alpha} A^{a'\beta} - \partial^{\beta} A^{a'\alpha}) A^{b'}_{\alpha} A^{c'}_{\beta} (3!-1) \text{順列} \right\}$

$\underbrace{(12)(34)}_{} + \underbrace{(34)(12)}_{} + \underbrace{(21)(43)}_{} + \underbrace{(43)(21)}_{}$ ← カラーの足 ← ローレンツの足

$(a',b',c' = 1,2,3\ ;\ a_1a_2b\ \ a_3a_4b)$ としておいてから ~~(288)を評価しましょう~~

$= -ig^2 \left\{ f^{a_1a_2b} f^{a_3a_4b} (g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} - g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3}) \right.$

(291) $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho} = i\frac{g}{2} f^{a'b'c'} \left\{ \delta^{aa'} \delta^{bb'} \delta^{cc'} \left[(-ik_1^{\alpha}) g^{\beta}_{\mu} - (-ik_1^{\beta}) g^{\alpha}_{\mu} \right] g_{\alpha\nu} g_{\beta\rho} \right.$

$+ f^{a_1a_3b} f^{a_4a_2b} (g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} - g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4})$

$+ \delta^{aa'} \delta^{bc'} \delta^{cb'} \left[(-ik_1^{\alpha}) g^{\beta}_{\mu} - (-ik_1^{\beta}) g^{\alpha}_{\mu} \right] g_{\alpha\rho} g_{\beta\nu}$

$+ f^{a_1a_4b} f^{a_2a_3b} (g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} - g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4})$

$+ \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ \mu & \nu & \rho \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b & c & a \\ \nu & \rho & \mu \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{pmatrix} \right] + \left[\begin{pmatrix} b & c & a \\ \nu & \rho & \mu \\ k_2 & k_3 & k_1 \end{pmatrix} \to \boxed{\begin{matrix} a & & b \\ & & \nu \\ a'=a_1 & k_1 & \text{固定} \\ \alpha=\mu_1 & & \end{matrix}} \right] \Bigg\}$

$\begin{array}{l} (1\ 2)(3\ 4) \\ (1\ 2)(4\ 3) \\ (1\ 3)(4\ 2) \\ (1\ 3)(2\ 4) \\ (1\ 4)(2\ 3) \\ (1\ 4)(3\ 2) \end{array}$

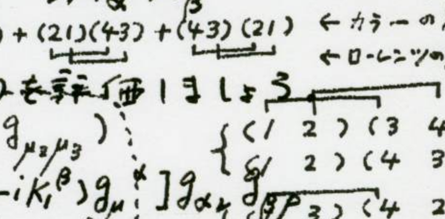
$= \frac{g}{2} \left\{ f^{abc} (k_{1\nu} g_{\mu\rho} - k_{1\rho} g_{\mu\nu}) + f^{acb} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\mu\rho}) + \text{cyclic} \right\}$

$a_1, \mu_1 \qquad k_4$

$= g \left\{ f^{abc} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\rho\mu}) + \text{cyclic} \right\}$

$= g \left\{ f^{abc} (k_{1\rho} g_{\mu\nu} - k_{1\nu} g_{\rho\mu}) + f^{bca} (k_{2\mu} g_{\nu\rho} - k_{2\rho} g_{\mu\nu}) + f^{cab} (k_{3\nu} g_{\rho\mu} - k_{3\mu} g_{\nu\rho}) \right\}$

$= g f^{abc} \left[(k_1 - k_2)_{\rho} g_{\mu\nu} + (k_2 - k_3)_{\mu} g_{\nu\rho} + (k_3 - k_1)_{\nu} g_{\rho\mu} \right]$



p.101の(279c)式の符号のエラーの修正です。

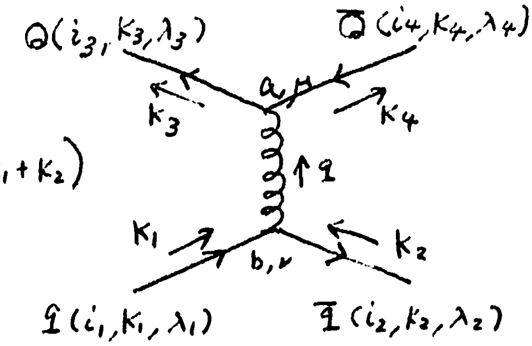
上の式は $a'=a_1$, $\alpha=\mu_1$ を固定すると全く同じ項が4回あること、あとは残りの順列です。//

ここまでの準備で、p.90 (224a)-(224e) の全 process の振幅が計算できます。

必要な Feynman 則は (280), (281), (287), (291), (294) です。まず

(295) $M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2} \equiv M\left(q_{i_1}(k_1,\lambda_1) + \bar{q}_{i_2}(k_2,\lambda_2) \longrightarrow Q_{i_3}(k_3,\lambda_3) + \bar{Q}_{i_4}(k_4,\lambda_4) \right)$

(296) $$iM = \bar{u}(k_3,\lambda_3)(-igT^a_{i_3 i_4})\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times \frac{i}{q^2+i\varepsilon}(-g_{\mu\nu}+\cdots)\delta^{ab} \qquad (q=k_1+k_2)$$
$$\times \bar{v}(k_2,\lambda_2)(-igT^b_{i_2 i_1})\gamma^\nu u(k_1,\lambda_1)$$



(297) $$\begin{cases} M = g^2 T^a_{i_3 i_4} T^a_{i_2 i_1} \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} \\ \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)\cdot \bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma_\mu u(k_1,\lambda_1)\cdot \frac{1}{s} \end{cases} \qquad [s=q^2]$$

ここで $\hat{M}$ は QED の場合の振幅 (227) と完全に同じです。ちなみに、QED の

γ-exchange 項を加えると、

(298) $$M \equiv M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2} = \left(g^2 T^a_{i_2 i_1} T^a_{i_3 i_4} + e^2 Q_q Q_Q \delta_{i_1 i_2}\delta_{i_3 i_4} \right) \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$$

となります。$\sum_{a=1}^{8}$ は省略しています。断面積は、スピンとカラー相方の平均・和をとります。

(299) $$d\sigma = \frac{1}{2s}\overline{\sum_{i_1 i_2 i_3 i_4}}\ \overline{\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}} \left| M^{\lambda_3\lambda_4\, i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2\, i_1 i_2}\right|^2 d\Phi_2$$
$$= C\ \frac{1}{2s}\overline{\sum_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}} \left|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right|^2 d\Phi_2$$
$$\equiv C\ d\hat{\sigma}$$

とおくと、$d\hat{\sigma}$ は QED と全く同じ（但し $|e^2 Q_q Q_Q|^2$ が C の中に含まれる）。

$\hat{M}$, $d\hat{\sigma}$ は p.89, (241), (242), (243) から明らか。C をカラー因子と呼ぶ。(298) の場合

$$(300)\quad C=\sum_{i_1i_2i_3i_4}\left|g^2 T^a_{i_2i_1}T^a_{i_3i_4}+e^2Q_qQ_Q\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\right|^2$$

$$=\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i_1i_2i_3i_4}\Big\{g^4 T^a_{i_2i_1}T^a_{i_3i_4}T^b_{i_1i_2}T^b_{i_4i_3}\qquad \Leftarrow (T^a_{ij})^* = T^a_{ji}$$

$$+g^2e^2Q_qQ_Q\, T^a_{i_2i_1}T^a_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\times 2$$

$$+e^4Q_q^2Q_Q^2\,\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3i_4}\Big\}$$

ここでカラーの自由度の数はSU(N)のNを用い、あとでN=3とおく。これにより、カラーフローで重要な$N\to\infty$ limitがとれることがメリットです。

$$(301)\quad C=\frac{1}{N^2}\Big\{g^4\,\underbrace{t_r(T^aT^b)}_{T_F\delta^{ab}}\,\underbrace{t_r(T^aT^b)}_{T_F\delta^{ab}}+2g^2e^2Q_qQ_Q\,\underbrace{t_r(T^a)}_{\to 0}\,\underbrace{t_r(T^b)}_{\to 0}+e^4Q_q^2Q_Q^2\,\underbrace{\delta_{i_1i_1}}_{\to N}\underbrace{\delta_{i_3i_3}}_{\to N}\Big\}$$

干渉項が消えるのは、グルオンがカラー$\underline{8}$、光がカラー$\underline{1}$で直交しているためです。

$$(302)\quad C=\frac{1}{N^2}\Big\{g^4\,T_F\delta^{ab}T_F\delta^{ab}+e^4Q_q^2Q_Q^2\,N\cdot N\Big\}$$

$$=T_F^2\frac{N^2-1}{N^2}g^4+e^4Q_q^2Q_Q^2$$

$$=\frac{2}{9}g^4+e^4Q_q^2Q_Q^2$$

上の例で、$N\to\infty$のときg^4項は$T_F^2g^4=\frac{1}{4}g^4$であり、Nと共に大きくならない項であることがわかります。ついでに、$q\bar{q}\to Q\bar{Q}$でs-channelにγ, Zが交換されるときのカラー因子が1であることもわかりました。Zの寄与は結合が$\lambda_1,\lambda_3,\lambda_4$に依存するので計算しません。干渉しないので、無視しても（Zのresonance以外）良いでしょう。(243)式を参考に、pure QCDの場合（(302)で$e^4\to 0$）の断面積を書くと

(303) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi\alpha_s^2}{2s}\left\{\left(1+\frac{4m^2}{s}\right)+\left(1-\frac{4m^2}{s}\right)\cos^2\theta\right\}\beta$$

(304) $$\alpha_s = \frac{g^2}{4\pi}$$

$m\to 0$ limit で

(305) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\pi\alpha_s^2}{2s}\left(1+\cos^2\theta\right)$$

次に $gg\to Q\bar{Q}$ を計算します.

(306) $$M^{\lambda_3\lambda_4 i_3 i_4}_{\lambda_1\lambda_2 a_1 a_2} \equiv M\left(g^{a_1}(k_1,\lambda_1)+g^{a_2}(k_2,\lambda_2)\longrightarrow Q_{i_3}(k_3,\lambda_3)+\bar{Q}_{i_4}(k_4,\lambda_4)\right)$$

(307) $iM =$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{(-igT^{a_1}_{i_3 i}\gamma^{\mu_1})\frac{i(\not{k}_3-\not{k}_1+m)}{(k_3-k_1)^2-m^2}(-igT^{a_2}_{i i_4}\gamma^{\mu_2})$$

$$+(-igT^{a_2}_{i_3 i}\gamma^{\mu_2})\frac{i(\not{k}_1-\not{k}_4+m)}{(k_1-k_4)^2-m^2}(-igT^{a_1}_{i i_4}\gamma^{\mu_1})$$

$$+(-igT^{a}_{i_3 i_4}\gamma^{\mu})\frac{-i}{k^2}(-gf^{a_1 a_2 a})\left[(k_1-k_2)_\mu g_{\mu_1\mu_2}+(k_2-k)_{\mu_1}g_{\mu\mu_2}+(k-k_1)_{\mu_2}g_{\mu\mu_1}\right]\Big\}$$

$$\times v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

(308) $$M = g^2\bar{u}(k_3,\lambda_3)\Big\{-(T^{a_1}T^{a_2})_{i_3 i_4}\frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{t-m^2}-(T^{a_2}T^{a_1})_{i_3 i_4}\frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{u-m^2}$$

$$-\cancel{+}\,if^{a_1 a_2 a}T^{a}_{i_3 i_4}\frac{\gamma^{\mu}}{s}\left[(k_1-k_2)_\mu g_{\mu_1\mu_2}+2k_{2\mu_1}g_{\mu\mu_2}-2k_{1\mu_2}g_{\mu\mu_1}\right]\Big\}$$

p.101 (279c)
グルオン3点結合の
符号のエラーの修正です。

$$\times v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

上で、運動方程式

(309) $k_{1\mu_1}\varepsilon^{\mu_1}(k_1,\lambda_1) = k_{2\mu_2}\varepsilon^{\mu_2}(k_2,\lambda_2) = 0$

を使いました。カラー因子を整理するため、

(310) $if^{a_1a_2a}T^a = [T^{a_1},T^{a_2}]$

$$T^{a_1}T^{a_2} = \frac{1}{2}\left([T^{a_1},T^{a_2}] + \{T^{a_1},T^{a_2}\}\right)$$

$$T^{a_2}T^{a_1} = \frac{1}{2}\left(\{T^{a_1},T^{a_2}\} - [T^{a_1},T^{a_2}]\right)$$

を使うと

(311) $M = g^2\left\{\frac{1}{2}\{T^{a_1},T^{a_2}\}_{i_3i_4}\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2}[T^{a_1},T^{a_2}]_{i_3i_4}\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}\right\}$

$\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ は QED の $\gamma\gamma\to\mu^+\mu^-$ と同じ項、$\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}$ が QCD 固有項です。

2つのカラー因子は、a_1, a_2 について対称、反対称なので干渉しない。

(312) $\overline{\sum}|M|^2 = g^4\left\{C_+\sum_{\lambda_i}|\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2 + C_-\sum_{\lambda_i}|\hat{N}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2}|^2\right\}$

それぞれのカラー因子は

(313) $C_+ = \frac{1}{(N^2-1)^2}\frac{1}{4}\sum\{T^{a_1},T^{a_2}\}_{i_3i_4}\{T^{a_2},T^{a_1}\}_{i_4i_3}$

$$= \frac{1}{4(N^2-1)^2}\mathrm{Tr}\left[(T^{a_1}T^{a_2}+T^{a_2}T^{a_1})(T^{a_2}T^{a_1}+T^{a_1}T^{a_2})\right]$$

$$= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\mathrm{Tr}\left[T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2} + T^{a_1}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_2}\right]$$

このトレースの計算のため、SU(N) の generator の Fierz 則を使います。

(314) $\sum_a T^a_{ij}T^a_{kl} = T_F\left(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{kl}\right)$

2005. 5.19

SU(2) なら、$T_F=2$ で σ^i の Fierz 則です。一般のNの証明は、

(315) $\sum_a T^a_{ij} T^a_{k\ell} = A\delta_{i\ell}\delta_{kj} + B\delta_{ij}\delta_{k\ell}$

とおいて、両辺に $\delta_{ij}\delta_{k\ell}$ をかけて i,j,k,ℓ の和、$\delta_{i\ell}\delta_{kj}$ をかけて和。

(316a) $\times\delta_{ij}\delta_{k\ell} \Rightarrow tr(T^a)tr(T^a) = 0 = AN + BN^2$

(316b) $\times\delta_{i\ell}\delta_{kj} \Rightarrow tr(T^aT^a) = T_F(N^2-1) = AN^2 + BN$

(314) から、δ_{jk} をかけて j,k の和をとって

(317) $(T^aT^a)_{i\ell} = T_F\dfrac{N^2-1}{N}\delta_{i\ell} \equiv C_F\delta_{i\ell}$ $\left(C_F = T_F\dfrac{N^2-1}{N} = \dfrac{4}{3}\right)$

(314) と (317) を使って (313) が計算できます。

(318) $$C_+ = \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{T^{a_1}_{ij}T^{a_1}_{jk}T^{a_2}_{k\ell}T^{a_2}_{\ell i} + T^{a_1}_{ij}T^{a_2}_{jk}T^{a_1}_{k\ell}T^{a_2}_{\ell i}\right\}$$

$$= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{C_F\delta_{ik}C_F\delta_{ki} + T_F^2\left(\delta_{i\ell}\delta_{kj} - \frac{1}{N}\delta_{ij}\delta_{k\ell}\right)\left(\delta_{ji}\delta_{\ell k} - \frac{1}{N}\delta_{jk}\delta_{\ell i}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{C_F^2 N + T_F^2\left(N - \frac{1}{N}N\cdot N\times 2 + \frac{1}{N^2}N\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{T_F^2\frac{(N^2-1)^2}{N} + T_F^2\left(-N + \frac{1}{N}\right)\right\}$$

$$= \frac{T_F^2}{2N}\frac{N^2-2}{N^2-1}$$

$$= \frac{7}{192}$$

どこかで計算まちがいしたような気がします。C_- の方は

(319) $$C_- = \frac{1}{(N^2-1)^2}\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left[(T^{a_1}T^{a_2} - T^{a_2}T^{a_1})(T^{a_2}T^{a_1} - T^{a_1}T^{a_2})\right]$$

$$= \frac{1}{2(N^2-1)^2}\mathrm{Tr}\left[T^{a_1}T^{a_1}T^{a_2}T^{a_2} - T^{a_1}T^{a_2}T^{a_1}T^{a_2}\right]$$

2005. 5. 19

$$(320)\quad C_- = \frac{1}{2(N^2-1)^2}\left\{ T_F^2 \frac{(N^2-1)^2}{N} + T_F^2 \frac{N^2-1}{N} \right\}$$

$$= \frac{T_F^2 N}{2(N^2-1)}$$

$$= \frac{3}{64} \quad \left(= \frac{9}{192}\right)$$

QED-like 項 と QCD 固有項 のカラー因子の比は、$N^2-1-1=7$ と $N^2-1+1=9$ です。

まず QED-like 項

$$(321)\quad \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\gamma^{\mu_1}(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4} \right\} v(k_4,\lambda_4)$$

$$\times \varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

ゲージ不変性のテスト：$\varepsilon_{\mu_1} \to k_{1\mu_1}$ でゼロ

$$(322)\quad \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{\not{k}_1(\not{k}_3-\not{k}_1+m)\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}(\not{k}_1-\not{k}_4+m)\not{k}_1}{2k_1k_4} \right\} v(k_4,\lambda_4)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{[(2k_1k_3) - \not{k}_3\not{k}_1 + m\not{k}_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}[-(2k_4k_1) + \not{k}_1\not{k}_4 + \not{k}_1 m]}{2k_1k_4} \right\} v$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \gamma^{\mu_2} - \frac{\overset{0\leftarrow}{(\not{k}_3-m)}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \gamma^{\mu_2} + \frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1(\not{k}_4\overset{\rightarrow 0}{+m})}{2k_1k_4} \right\} v(k_4,\lambda_4)$$

$\to 0$

$$= 0 \qquad ; \quad \bar{u}(k_3)(\not{k}_3-m) = (\not{k}_4+m)v(k_4) = 0$$

テスト OK なので (321) の計算をすすめます。

$$(323)\quad \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \frac{[2k_3^{\mu_1} - \overset{0\leftarrow}{(\not{k}_3-m)}\gamma^{\mu_1} - \gamma^{\mu_1}\not{k}_1]\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}[\not{k}_1\gamma^{\mu_1} + \gamma^{\mu_1}\overset{\rightarrow 0}{(\not{k}_4+m)} - 2k_4^{\mu_1}]}{2k_1k_4} \right\}$$

$$\times v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{ \left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3} - \frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2} - \frac{\gamma^{\mu_1}\not{k}_1\gamma^{\mu_2}}{2k_1k_3} + \frac{\gamma^{\mu_2}\not{k}_1\gamma^{\mu_1}}{2k_1k_4} \right\} v(k_4,\lambda_4)\,\varepsilon_{\mu_1}(k_1\lambda_1)\,\varepsilon_{\mu_2}(k_2\lambda_2)$$

ここで 次の公式 を使う. [証明は右から γ^σ をかけて trace, $\gamma^\sigma\gamma_5$ をかけて trace]

(324) $\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho = g^{\mu\nu}\gamma^\rho - g^{\mu\rho}\gamma^\nu + g^{\nu\rho}\gamma^\mu + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\sigma$

(325) $-\gamma^{\mu_1}\cdot K_1\gamma^{\mu_2} = -\underbrace{k_1^{\mu_1}}_{\to 0}\gamma^{\mu_2} + g^{\mu_1\mu_2}\cdot K_1 - k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1} - i\varepsilon^{\mu_1\alpha\mu_2\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{1\alpha}$

$\gamma^{\mu_2}K_1\gamma^{\mu_1} = k_1^{\mu_2}\gamma^{\mu_1} - g^{\mu_1\mu_2}\cdot K_1 + \underbrace{k_1^{\mu_1}}_{\to 0}\gamma^{\mu_2} + i\varepsilon^{\mu_2\alpha\mu_1\beta}\gamma_5\gamma_\beta k_{1\alpha}$

(326) $\hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left\{\left(\frac{k_3^{\mu_1}}{k_1k_3} - \frac{k_4^{\mu_1}}{k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_2} - \left(\frac{k_1^{\mu_2}}{2k_1k_3} - \frac{k_1^{\mu_2}}{2k_1k_4}\right)\gamma^{\mu_1} + g^{\mu_1\mu_2}\left(\frac{K_1}{2k_1k_3} - \frac{K_1}{2k_1k_4}\right)\right.$

$\left. - i\varepsilon^{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\gamma_\beta\gamma_5 k_{1\alpha}\left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4}\right)\right\} v(k_4,\lambda_4)\varepsilon_{\mu_1}(k_1,\lambda_1)\varepsilon_{\mu_2}(k_2,\lambda_2)$

ここで p.87 (237) の $J^\mu_{\lambda_3\lambda_4}$ と, $\gamma^\mu\gamma_5$ カレントの $J^{5\mu}_{\lambda_3\lambda_4}$ を導入する.

(327a) $J^\mu_{\lambda_3\lambda_4} \equiv \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu v(k_4,\lambda_4)$

$= u(k_3,\lambda_3)^\dagger_+ \sigma_+^\mu v(k_4,\lambda_4)_+ + u(k_3,\lambda_3)^\dagger_- \sigma_-^\mu v(k_4,\lambda_4)_-$

(327b) $J^{5\mu}_{\lambda_3\lambda_4} \equiv \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\mu\gamma_5 v(k_4,\lambda_4)$

$= u(k_3,\lambda_3)^\dagger_+ \sigma_+^\mu v(k_4,\lambda_4)_+ - u(k_3,\lambda_3)^\dagger_- \sigma_-^\mu v(k_4,\lambda_4)_-$

(240) は次の2式にまとまる.

(328) $\begin{cases} J^\mu_{\sigma,\sigma} = \sigma\, 2m\,[0, \sin\theta, 0, \cos\theta] \\ J^\mu_{\sigma,-\sigma} = 2E\,[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta] \end{cases}$

$\gamma^\mu\gamma_5$ カレントの方は, (238)式で σ_-^α を $-\sigma_-^\alpha$ におきかえるので.

(329) $\begin{cases} J^{5\mu}_{\sigma,\sigma} = 2m\,[1, 0, 0, 0] \\ J^{5\mu}_{\sigma,-\sigma} = \sigma\, 2E\beta\,[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta] \end{cases}$

カレント (327a), (327b) を使って振幅 (326) を整理すると.

$$(330)\quad \hat{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \left(\frac{k_3\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_3} - \frac{k_4\cdot\varepsilon_1}{k_1\cdot k_4}\right) J\cdot\varepsilon_2 - \left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)\underbrace{(k_1\cdot\varepsilon_2)}_{\to 0}(J\cdot\varepsilon_1)$$
$$+\left(\frac{1}{2k_1k_3} - \frac{1}{2k_1k_4}\right)(k_1\cdot J)(\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2)$$
$$-i\,\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}\,k_1^{\alpha}\varepsilon^{\mu_1}\varepsilon^{\mu_2}J^{\beta}\left(\frac{1}{2k_1k_3} + \frac{1}{2k_1k_4}\right)$$

重心系で振幅を計算しよう。

$$(331)\quad \begin{aligned} k_1^\mu &= E(1,0,0,1) \\ k_2^\mu &= E(1,0,0,-1) \\ k_3^\mu &= E(1,\beta\sin\theta,0,\beta\cos\theta) \\ k_4^\mu &= E(1,-\beta\sin\theta,0,-\beta\cos\theta) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} k_1\cdot k_3 &= E^2(1-\beta\cos\theta) \\ k_1\cdot k_4 &= E^2(1+\beta\cos\theta) \end{aligned}$$

$\varepsilon_1^\mu(k_1,\lambda_1)$ は (58) 式だが, $\varepsilon_2^\mu(k_2,\lambda_2)$ は極座標の不定性があるので

一般の向きのヘリシティーベクトル (106) から定義する:

$$(332)\quad \epsilon^\mu(\mathbb{k},\lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\varepsilon^\mu(\mathbb{k},x) - i\,\varepsilon^\mu(\mathbb{k},y)\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,\ \mp\cos\theta\cos\phi + i\sin\phi,\ \mp\cos\theta\sin\phi - i\cos\phi,\ \pm\sin\theta\right)$$

$$(333a)\quad \varepsilon_1^\mu(k_1,\lambda_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-\lambda_1,-i,0) \quad \Leftarrow \theta=0,\ \phi=0$$

$$(333b)\quad \varepsilon_2^\mu(k_2,\lambda_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,\lambda_2,-i,0) \quad \Leftarrow \theta=\pi,\ \phi=0\ [\text{convention}]$$

従って

$$(334)\quad \begin{cases} k_3\cdot\varepsilon_1 = \dfrac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda_1 & k_4\cdot\varepsilon_1 = -\dfrac{E\beta}{\sqrt{2}}\sin\theta\,\lambda_1 \\ k_1\cdot\varepsilon_2 = 0 & \varepsilon_1\cdot\varepsilon_2 = \dfrac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2+1) = \delta_{\lambda_1\lambda_2} \end{cases}$$

(335) $$(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,\sigma}_{\lambda_2} = \frac{\sigma 2m}{\sqrt{2}}(0-\lambda_2\sin\theta-0) = -\sqrt{2}\, m\,\sigma\lambda_2\sin\theta$$

$$(J\cdot\varepsilon_2)^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_2} = \frac{2E}{\sqrt{2}}(0-\lambda_2\cos\theta+\sigma-0) = \sqrt{2}\,E\sigma(1-\sigma\lambda_2\cos\theta)$$

$$(k_1\cdot J)^{\sigma,\sigma} = \sigma\, 2mE\,(0-0-0-\cos\theta) = -2mE\sigma\cos\theta$$

$$(k_1\cdot J)^{\sigma,-\sigma} = 2E^2(0-0-0-(-\sin\theta)) = 2E^2\sin\theta$$

(336) $$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,\sigma}_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{i}\cdot E\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2m\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & -\lambda_1 & -i & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad \underbrace{\varepsilon_{3ij0}}_{\Downarrow\ \underline{-1}} k_1^3\varepsilon_1^i\varepsilon_2^j J_5^0$$

$$= \frac{mE}{i}\begin{vmatrix} -\lambda_1 & -i \\ \lambda_2 & -i \end{vmatrix} \times(-1)$$

$$= \frac{mE}{i}(-i)(-\lambda_1-\lambda_2)\times(-1)$$

$$= \underbrace{mE(\lambda_1+\lambda_2)}_{\times(-1)} = 2mE\,\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}\times(-1)$$

(337) $$\left[\frac{1}{i}\varepsilon_{\alpha\mu_1\mu_2\beta}k_1^{\alpha}\varepsilon_1^{\mu_1}\varepsilon_2^{\mu_2}J^{5\beta}\right]^{\sigma,-\sigma}_{\lambda_1\lambda_2}$$

$$= \frac{1}{i}E\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2E\beta\sigma\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda_1 & -i & 0 \\ 0 & \lambda_2 & -i & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sigma i & \boxed{-\sin\theta} \end{vmatrix} \qquad \underbrace{\varepsilon_{0ij3}}_{\Downarrow\ \underline{1}}$$

$$= \frac{E^2\beta\sigma}{i}(-\sin\theta)\begin{vmatrix} -\lambda_1 & -i \\ \lambda_2 & -i \end{vmatrix}$$

$$= -E^2\beta\sigma(\lambda_1+\lambda_2)\times\sin\theta$$

$$= -2E^2\beta\sigma\,\lambda_1\delta_{\lambda_1\lambda_2}\times\sin\theta$$

(330)を計算する準備ができたと思います。

2005. 5.19

(336)の(−1)，(337)の(sinθ)のエラーのため、デタラメになってしまいました。正答はp.121 (348)，(349)に再掲しました。

$\boxed{(338)}$ → $\boxed{\text{p.121 } (349)}$

$$\hat{M}^{\sigma\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\cancel{\lambda}\,(-\cancel{\sqrt{2}}\,m\sigma\cancel{\lambda}\sin\theta)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1k_3}-\frac{1}{k_1k_4}\right)(-2mE\sigma)\cos\theta\,\delta_{\lambda\lambda} \quad \overset{-}{\cancel{+}}\,2mE\lambda\delta_{\lambda\lambda}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_1k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{k_1k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)(-mE\beta\sigma\sin^2\theta\,\underset{-}{\cancel{+}}\,mE\lambda)$$

$$-\left(\frac{1}{k_1k_3}-\frac{1}{k_1k_4}\right)mE\sigma\cos\theta$$

$$=-mE\left[\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)(\lambda+\sigma\beta\sin^2\theta)+\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\sigma\cos\theta\right]$$

$$=-\lambda\frac{2mE^3}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}[1+\lambda\sigma\beta] \quad ---- \begin{cases}1+\beta & \lambda\sigma=+\text{ のとき。}\\ 1-\beta & \lambda\sigma=-\text{ のとき。}\end{cases}$$

$\boxed{(339)}$ → $\boxed{\text{p.121 } (348)}$

$$\hat{M}^{\sigma,-\sigma}_{\lambda\lambda} = \left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1k_4}\right)\frac{E\beta}{\cancel{\sqrt{2}}}\sin\theta\,\lambda\cdot\cancel{\sqrt{2}}\,E\sigma(1-\sigma\lambda\cos\theta)$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)\cdot\cancel{2}E^2\sin\theta\cdot\delta_{\lambda\lambda}$$

$$+\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)(-\cancel{2}E^2\beta\sigma\lambda\,\delta_{\lambda\lambda})\times\sin\theta$$

$$=\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}+\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)E^2\beta\sigma\lambda(\cancel{-1}+\sin\theta-\sigma\lambda\sin\theta\cos\theta)$$

$\boxed{-\sin\theta}$

$$+\left(\frac{1}{k_1\cdot k_3}-\frac{1}{k_1\cdot k_4}\right)E^2\sin\theta$$

$$=\frac{1}{(k_1\cdot k_3)(k_1\cdot k_4)}\left\{2E^4\beta\sigma\lambda(\cancel{-1}+\sin\theta-\sigma\lambda\sin\theta\cos\theta)+2E^4\beta\cos\theta\sin\theta\right\}$$

$$=0$$

2005. 5. 20

カラー因子については、p.130〜132で少しだけ詳しく説明をしました。

前ページまでの計算のまちがいをみつけるのには、少し休んでからやり直す必要があるので、ここではカラー因子について、少し大切なことを学びます。(311)式では $g^a + g^b \to Q_i + \overline{Q}_j$ について

(#) $M^{QCD}_{ij} = \frac{1}{2}\{T^a, T^b\}_{ij} A + \frac{1}{2}[T^a, T^b]_{ij} B$

p.130 (374)

の二つを独立なカラー因子として選びました。これは、s-channel のカラー量子数が $\underline{1}$ の振幅をA、$\underline{8}$ の振幅をBとするためです。

実際、s-channel に EW ボソン(~~スピン1なるγ, Z~~, スピン0なるH, A)

$\boxed{\text{C.N.Yangの定理により、スピン1のボソンは同種の質量ゼロスピン1粒子の対とは結合しない。(例えば } \gamma\gamma\text{, カラー1の } g^a g^a\text{)}}$

p.132で少し詳しく説明。

が交換される振幅は

(#) $M^{EW}_{ij} = \delta_{ij}\delta^{ab} C$

p.131 (379)

となるので、カラー $\underline{1}$ のA振幅だけがCと干渉します。カラーの和だけを考えると

(#) $\sum |M^{QCD} + M^{EW}|^2 = \sum |M^{QCD}|^2 + \sum 2\mathrm{Re}\, M^{QCD} M^{EW*} + \sum |M^{EW}|^2$

p.132 (380)

$$= \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T^aT^bT^bT^a + T^aT^bT^aT^b)|A|^2 + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(T^aT^bT^bT^a - T^aT^bT^aT^b)|B|^2$$

$$+ \mathrm{tr}(T^aT^b)\delta^{ab}\, 2\mathrm{Re}(AC^*) + \delta_{ii}\delta^{aa}|C|^2$$

$$= T_F^2 \frac{(N^2-1)(N^2-2)}{N}|A|^2 + T_F^2 N(N^2-1)|B|^2 + T_F(N^2-1)\, 2\mathrm{Re}(AC^*) + N(N^2-1)|C|^2$$

$$= \frac{14}{3}|A|^2 + 6|B|^2 + 8\mathrm{Re}(AC^*) + 24|C|^2$$

一方、$|A|^2$ と $|B|^2$ は α_s^2、AC^* は $\alpha_s\alpha_w$、$|C|^2$ は α_w^2 ですから、AC^* 項の評価はしたいものですし、そのために上のベースをとりました。