QCD for Collider Physics IV

先週の続きを完成させます。(168) を (167) に代入して

(169)
$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{2E}{4E}\sum_{\lambda,\lambda'}\left\{a^{\dagger}_{k,\lambda'}a_{k,\lambda}\delta_{\lambda\lambda'}-b_{k,\lambda'}b^{\dagger}_{k,\lambda}\delta_{\lambda\lambda'}\right\}$$
$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2}\sum_{\lambda}\left\{a^{\dagger}_{k,\lambda}a_{k,\lambda}-b_{k,\lambda}b^{\dagger}_{k,\lambda}\right\}$$

ここで、生成消滅演算子の covariant な規格化 (164) を通常の(粒子数の)規格化

(170)
$$\begin{cases} a_{k,\lambda}=\sqrt{2E}\,\hat{a}_{k,\lambda}\ , \quad b_{k,\lambda}=\sqrt{2E}\,\hat{b}_{k,\lambda} \\ \{\hat{a}_{k,\lambda},\hat{a}^{\dagger}_{k',\lambda'}\}=\{\hat{b}_{k,\lambda},\hat{b}^{\dagger}_{k',\lambda'}\}=(2\pi)^3\delta^3(k-k') \end{cases}$$

にもどすと、

(171)
$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}E_k\sum_{\lambda}\left\{\hat{a}^{\dagger}_{k,\lambda}\hat{a}_{k,\lambda}-\hat{b}_{k,\lambda}\hat{b}^{\dagger}_{k,\lambda}\right\}$$

ここで 反交換関係 (164), (170) を使うと

(172)
$$H=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}E_k\sum_{\lambda}\left\{\hat{a}^{\dagger}_{k,\lambda}\hat{a}_{k,\lambda}+\hat{b}^{\dagger}_{k,\lambda}\hat{b}_{k,\lambda}\underbrace{-(2\pi)^3\delta^3(0)}_{-\infty\text{ の定数}}\right\}$$

となって、粒子と反粒子のエネルギーの和となる。($a^{\dagger}_{k,\lambda}|0\rangle$ と $b^{\dagger}_{k,\lambda}|0\rangle$ の固有値。)

同様に (27) 式の $P^i=\int d^3x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0\psi}\partial^i\psi\right]$ から、$\partial^i=-\frac{\partial}{\partial x^i}$ に注意して、

(173)
$$\mathbb{P}=\int d^3x\,\psi^{\dagger}(-i\nabla)\psi=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,k\sum_{\lambda}\left\{\hat{a}^{\dagger}_{k,\lambda}\hat{a}_{k,\lambda}+\hat{b}^{\dagger}_{k,\lambda}\hat{b}_{k,\lambda}\right\}$$

を導くことができる。(172), (173) は反交換関係、(164), (170) の帰結で、Dirac 粒子がフェルミ統計に従わなければ量子化できないことを表しています。

スピノールのLorentz変換.

ここで少しだけ、Lorentz変換とそのgeneratorの関係を復習します。

Lorentz変換

(174) $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$

は6ヶの実パラメータ ($\omega_{ji}=-\omega_{ij}$, $\omega_{0i}=-\omega_{i0}$)

(175) $$\begin{cases} \omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\theta^k & \cdots\ \theta^1,\theta^2,\theta^3 \text{ はそれぞれ 2-3, 3-1, 1-2 面内の回転角.} \\ \omega_{0i} = \beta^i & \cdots\ \beta^1,\beta^2,\beta^3 \text{ は 1, 2, 3 軸方向の速度.} \end{cases}$$

で指定されますが、変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ を (175) のパラメータで表現することができて、

(178) $\Lambda^\alpha{}_\beta = \left(e^{-i\frac{\omega_{\mu\nu}}{2}M^{\mu\nu}}\right)^\alpha{}_\beta$

$M^{\mu\nu}=-M^{\nu\mu}$ をgenerator(生成演算子)と呼びます。微小なLorentz変換を2回行ない、順序を替えたものとの差をとることで、交換関係

(179) $[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = i\{g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}\}$

を導くことができます。面倒そうですが、$(\mu\nu)=(ij)$, $(\rho\sigma)=(jk)$ 成分をとると、$g^{\nu\rho}=g^{jj}=-1$ の項だけが右辺で残るので、

(180) $[M^{ij}, M^{jk}] = i\,g^{jj}M^{ik} = -iM^{ik} = iM^{ki}$

が分かります。これから

(181) $M^{ij} = \epsilon^{ijk}J^k$

が回転のgenerator(角運動量演算子)であることがわかります。

同様に

(182) $M^{0i} = K^i$

は i 軸方向の boost の generator です。座標表示では、

(183) $L^{\mu\nu} = i(x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu)$

で、例えば $(\mu\nu)=(ij)$ 成分が

(184)
$$\begin{cases} L^{ij} = i(x^i\partial^j - x^j\partial^i) = -i\left(x^i\dfrac{\partial}{\partial x^j} - x^j\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right) = x^i p^j - x^j p^i = J^k \\ \mathbb{J} = \mathbb{x} \times \mathbb{P} = \mathbb{x} \times (-i\nabla) \end{cases}$$

$\times$ はベクトル積.

確認できます。 $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$ を縦ベクトルとすると、$\Lambda^\mu{}_\nu$ を 4×4 の行列で表示することができて、6つの generator は

(185)
$$J^1 = M^{23} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0 \end{pmatrix},\quad J^2 = M^{31} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0 \end{pmatrix},\quad J^3 = M^{12} = -i\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$K^1 = M^{01} = i\begin{pmatrix} 0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad K^2 = M^{02} = i\begin{pmatrix} 0&0&1&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix},\quad K^3 = M^{03} = i\begin{pmatrix} 0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0 \end{pmatrix}$$

となります。例えば

(186)
$$e^{-i\phi J^3} = e^{-\phi\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\phi)^n}{n!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{-\phi(-\phi^2)^m}{(2m-1)!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&-1&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} + \frac{(-\phi^2)^m}{(2m)!}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi&0\\0&\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

；3軸の回りの回転φ.

同様に、2軸の回りのθの回転は

(187) $$e^{-i\theta J^2} = e^{-\theta\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}$$

又、3軸向きのboostは、$\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$ をrapidityとして ($\beta = \tanh\eta$)

(188) $$e^{-i\eta K^3} = e^{\eta\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^n}{n!}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^n$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty}\left\{\frac{\eta^{2m-1}}{(2m-1)!}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} + \frac{\eta^{2m}}{(2m)!}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \begin{pmatrix}\cosh\eta&0&0&\sinh\eta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\sinh\eta&0&0&\cosh\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}$$

ここで次の展開式を使いました。

(189) $$\begin{cases} e^{i\theta} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{(-\theta^2)^m}{(2m)!} + i\theta\frac{(-\theta^2)^m}{(2m+1)!}\right\} = \cos\theta + i\sin\theta \\ \cosh y \equiv \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{y^n}{n!} + \frac{(-y)^n}{n!}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{2m}}{(2m)!} \\ \sinh y \equiv \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{y^n}{n!} - \frac{(-y)^n}{n!}\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{cases}$$

$p^\mu = (m,0,0,0)^T$ から出発して

(190) $$\begin{pmatrix}E\\p^1\\p^2\\p^3\end{pmatrix} = e^{-i\phi J^3}e^{-i\theta J^2}e^{-i\eta K^3}\begin{pmatrix}m\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\phi&-\sin\phi&0\\0&\sin\phi&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&0&\sin\theta\\0&0&1&0\\0&-\sin\theta&0&\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma&0&0&\gamma\beta\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\gamma\beta&0&0&\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}E\\p\sin\theta\cos\phi\\p\sin\theta\sin\phi\\p\cos\theta\end{pmatrix} \quad ; \begin{cases}E = m\gamma = m\cosh\eta\\ p = m\gamma\beta = m\sinh\eta\end{cases}$$

以上の 4×4 行列表示を座標表示、ベクトル表示と呼びます。

一般の generator は、スピンの自由度を含み、$L^{\mu\nu}$ を (183) 式として、

(191) $$M^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} + S^{\mu\nu}$$

と表わされますが、スピン $\frac{1}{2}$ の場合、

(192) $$S^{\mu\nu} = \Sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

となります。(スピン 1 の場合、$S^{\mu\nu}$ は $L^{\mu\nu}$ と同型になるので、ベクトル表示と呼ぶ)。

(192) 式の $\Sigma^{\mu\nu}$ が交換関係 (179) を満たすことは、反交換関係 (114) 式だけを使って証明できます。表示を (115) のカイラル表示に決めればもっと簡単で

(193) $$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left\{\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} \sigma_+^\mu\sigma_-^\nu - \sigma_+^\nu\sigma_-^\mu & 0 \\ 0 & \sigma_-^\mu\sigma_+^\nu - \sigma_-^\nu\sigma_+^\mu \end{pmatrix}$$

から、

(194) $$\Sigma^{ij} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} \sigma^i(-\sigma^j) - \sigma^j(-\sigma^i) & 0 \\ 0 & (-\sigma^i)\sigma^j - (-\sigma^j)\sigma^i \end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -[\sigma^i, \sigma^j] & 0 \\ 0 & -[\sigma^i, \sigma^j] \end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -2i\sigma^k & 0 \\ 0 & -2i\sigma^k \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\sigma^k}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma^k/2 & 0 \\ 0 & \sigma^k/2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}$$

↑ この形の方が誤解しないですね。

が求まるし、boost は、

$$(195)\quad \Sigma^{0i} = \frac{i}{4}\begin{pmatrix} \sigma^0(-\sigma^i)-\sigma^i\sigma^0 & 0 \\ 0 & (\sigma^0)\sigma^i-(-\sigma^i)\sigma^0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{i}{4}\begin{pmatrix} -\sigma^i-\sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i+\sigma^i \end{pmatrix}$$
$$= -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & -\sigma^i \end{pmatrix}$$

(194), (195) はそれぞれ回転と boost の $\overbrace{\text{スピノール表示}}^{\text{generator の}}$ です。3軸の回りの $\overset{\phi\text{の}}{\text{回転}}$ は、

$$(196)\quad \begin{cases} e^{-i\phi J^3} = e^{-i\phi\Sigma^{12}} = e^{-i\phi\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0\\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3}\end{pmatrix} \\ e^{-i\frac{\phi}{2}\sigma^3} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^n(\sigma^3)^n \end{cases}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m}(\sigma^3)^{2m} + \frac{1}{(2m+1)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m+1}(\sigma^3)^{2m+1}\right\}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1}{(2m+1)!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^{2m+1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-i\frac{\phi}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(i\frac{\phi}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

同様に2軸の回りの θ の回転は

$$(197)\quad \begin{cases} e^{-i\theta J^2} = e^{-i\theta\Sigma^{31}} = e^{-i\theta\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sigma^2 & 0\\ 0 & \sigma^2\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2}\end{pmatrix} \\ e^{-i\frac{\theta}{2}\sigma^2} = e^{-i\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}} = e^{\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\theta}{2}\right)^n\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^n \end{cases}$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2m)!}\left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)^m\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{1}{(2m+1)!}\left(-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2\right)^m\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

最後に3軸方向の rapidity η の boost は

(198)
$$\begin{cases} e^{-i\eta K^3} = e^{-i\eta \Sigma^{03}} = e^{-i\eta\left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^3\end{pmatrix}} = e^{\frac{\eta}{2}\begin{pmatrix}-\sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}\sigma^3} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}\sigma^3}\end{pmatrix} \\ e^{-\frac{\eta}{2}\sigma^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^n (\sigma^3)^n \\ \quad = \sum_{m=0}^{\infty}\left\{ \frac{1}{(2m)!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + \left(-\frac{\eta}{2}\right)\frac{1}{(2m+1)!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^{2m}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} \\ \quad = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(-\frac{\eta}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{\eta}{2}\right)^n \end{pmatrix} \\ \quad = \begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} \\ e^{\frac{\eta}{2}\sigma^3} = \begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix} \end{cases}$$

重心系 $p^\mu = (m, 0, 0, 0)$ で3軸方向に偏極しているDirac粒子のスピノール [(138)式で $E=m$, $|p|=0$, $\lambda=+$]

(199)
$$u(p, \lambda=+) = \begin{pmatrix} u(p,+)_- \\ u(p,+)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\,\chi_+ \\ \sqrt{m}\,\chi_+ \end{pmatrix} = \sqrt{m}\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$$

をまず3軸方向にboostし（ヘリシティーを変えないboost）、次に2軸の回りに θ 回転、最後に3軸の回りに ϕ 回転させてみます。

(200)
$$u(p, \lambda=+) = e^{-i\phi J^3} e^{-i\theta J^2} e^{-i\eta K^3} \sqrt{m}\begin{pmatrix}1 \\ 0 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix}$$

(201)
$$u(p,+)=\sqrt{m}\left(\begin{array}{cc|cc} e^{-i\frac{\phi}{2}} & & & \\ & e^{i\frac{\phi}{2}} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & e^{-i\frac{\phi}{2}} & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} & & \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} e^{-\frac{\eta}{2}} & & & \\ & e^{\frac{\eta}{2}} & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & e^{\frac{\eta}{2}} & \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{m}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{\eta}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\sqrt{m}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-\frac{\eta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{\frac{\eta}{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \sqrt{m}\,e^{-\frac{\eta}{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ \sqrt{m}\,e^{\frac{\eta}{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$=e^{-i\frac{\phi}{2}}\underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{me^{-\eta}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ \sqrt{me^{\eta}}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\,e^{i\phi} \end{pmatrix} \end{pmatrix}}_{\text{HELAS}}$$

ここで

(202)
$$\begin{cases} me^{-\eta} = m(\cosh\eta - \sinh\eta) = E - |p| \\ me^{\eta} = m(\cosh\eta + \sinh\eta) = E + |p| \end{cases}$$

を使うと，HELASの $u(p,+)$ の表式 (138) が位相 $e^{-i\frac{\phi}{2}}$ を除いて再現されることが分かります。スピノールのLorentz変換の練習でした。//

Dirac粒子のpropagatorをおためます。表式(163)をコピーして

(203)=(163)
$$\begin{cases} \psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{\mathbf{k},\lambda} u(k,\lambda) e^{-ikx} + b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} v(k,\lambda) e^{ikx} \right\} \\ \bar\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda} \bar u(k,\lambda) e^{ikx} + b_{\mathbf{k},\lambda} \bar v(k,\lambda) e^{-ikx} \right\} \end{cases}$$

反交換関係(164)を用いると $i,j=1,2,3,4$ をスピノールの足として

(204)
$$\begin{cases} \langle 0 | \psi_i(x) \bar\psi_j(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda u_i(k,\lambda) \bar u_j(k,\lambda) e^{-ik(x-y)} \\ \langle 0 | \bar\psi_j(y) \psi_i(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda v_i(k,\lambda) \bar v_j(k,\lambda) e^{-ik(y-x)} \end{cases}$$

ここでfreeなDirac波動関数の和則(158), (159)を

(205)
$$\begin{cases} \sum_\lambda u_i(p,\lambda) \bar u_j(p,\lambda) = (m + \not p)_{ij} \\ \sum_\lambda v_i(p,\lambda) \bar v_j(p,\lambda) = (-m + \not p)_{ij} \end{cases}$$

と書くと、Feynmanのpropagatorが

(206)
$$\begin{aligned} S_F(x-y)_{ij} &= \langle 0 | T \psi_i(x) \bar\psi_j(y) | 0 \rangle \\ &\equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \psi_i(x) \bar\psi_j(y) | 0 \rangle \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar\psi_j(y) \psi_i(x) | 0 \rangle \\ &= \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} (m + \not k)_{ij} e^{-ik(x-y)} \\ &\quad + \theta(y^0 - x^0) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} (m - \not k)_{ij} e^{-ik(y-x)} \\ &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(m + \not k)_{ij}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} \end{aligned}$$

が導かれる。p.48 の (56)'' 式と同様、$\theta(y^0-x^0)$ 項で

$$(207)\qquad (m+(-E\gamma^0)-\mathbb{k}\cdot\gamma)\,d^3\mathbb{k} = (m-E\gamma^0+\mathbb{k}'\cdot\gamma)\,d^3(-\mathbb{k}') = (-m+E\gamma^0-\mathbb{k}'\cdot\gamma)\,d^3\mathbb{k}' = (-m+\not{k})\,d^3k$$

に注意して下さい。(206) の表式は、ファインマン propagator が

$$(207)\qquad x \longleftarrow y = \theta(x^0-y^0)\; x \xleftarrow{\text{粒子}} y + \theta(y^0-x^0)\; y \xrightarrow[\leftarrow\ \text{反粒子}]{} x$$

の和であることを表わしています。

ここまでの準備で、Dirac粒子を含む理論の散乱振幅を、摂動論で求めることができます。その前に p.42 の (45)式が間違っていたのでここで修正しておきます。

$$(208)=(45)_{\text{正}}\qquad S = T e^{-i\int H_I t} \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,T\prod_{k=1}^{n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[-iH_I(t_k)]\,dt_k\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[-iH_I(t_n)]\,dt_n\right]\left[\int_{-\infty}^{t_n}[-iH_I(t_{n-1})]\,dt_{n-1}\right]\cdots\left[\int_{-\infty}^{t_3}[-iH_I(t_2)]\,dt_2\right]\left[\int_{-\infty}^{t_2}[-iH_I(t_1)]\,dt_1\right]$$

注意点は、時間積分の下限は全て$-\infty$であること、$t_n>t_{n-1}>\cdots>t_2>t_1$ の順を決めてしまったる、$\frac{1}{n!}$ の因子がなくなることです。[T積は $n!$個の項の和です。]

QED

$$(209)\quad \mathcal{L}_{QED} = \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \text{gauge fix term}$$

$$= \overline{\psi}(i\gamma_\mu(\partial^\mu + ieQA^\mu) - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots$$

$$= \left[\overline{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \cdots\right] - eQA_\mu\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$$

$$= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

ここで D^μ は共変微分

$$(210)\quad D^\mu = \partial^\mu + ieQA^\mu$$

私の convention は $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ が陽子の電荷(正)、Q が e を単位とした粒子の電荷です。 $Q=-1$ (e, μ, τ), $Q=\frac{2}{3}(u, c, t)$, $Q=-\frac{1}{3}(d, s, b)$.

QEDのゲージ変換 (x に依存する位相の変換)

$$(211)\quad \psi(x) \longrightarrow \psi'(x) = e^{ieQ\theta(x)}\psi(x)$$

で (209) が不変であるためには、

$$(212)\quad D^\mu \longrightarrow D^{\mu\prime} = e^{ieQ\theta(x)}D^\mu e^{-ieQ\theta(x)}$$

$$= e^{ieQ\theta(x)}(\partial^\mu + ieQA^\mu)e^{-ieQ\theta(x)}$$

$$= \partial^\mu - ieQ\partial^\mu\theta(x) + ieQA^\mu$$

$$= \partial^\mu + ieQ(A^\mu - \partial^\mu\theta(x))$$

$$= \partial^\mu + ieQA'^\mu$$

が必要で、

ゲージボソン場は

(213) $A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \cancel{i}\partial_\mu\theta(x)$

に従って変換しなければならない。$F_{\mu\nu}$ は

(214) $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \rightarrow F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$

$$= \partial_\mu(A_\nu - i\partial_\nu\theta) - \partial_\nu(A_\mu - i\partial_\mu\theta)$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i(\partial_\mu\partial_\nu - \partial_\nu\partial_\mu)\theta$$

$$= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$$

で不変。従って $\mathcal{L}_{QED}$ (209) [の…を除いた部分] はゲージ変換 (211)+(213) で不変。特に光の質量項

(215) $\mathcal{L}_{photon\ mass} = -\frac{m^2}{2}A^\mu A_\mu$

は (213) のもとで不変でないので禁止される。

量子化するためには、$A^\mu(x)$ の4つの自由度の内2つの横波成分だけを量子化しなければならないので工夫（ゲージ固定）が必要ですが、ここでは光子の Feynman propagator (98)

(215) $D_F^{\mu\nu}(x-y) = \langle 0|TA^\mu(x)A^\nu(y)|0\rangle$

$$= \int d^4k \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* e^{-i(x-y)}$$

$$= \int d^4k \frac{i}{k^2 + i\varepsilon} (-g^{\mu\nu} + \underset{k^\mu \text{又は} k^\nu}{\underset{\uparrow}{\cdots}}) e^{-i(x-y)}$$

を使って tree level の散乱振幅を計算する。最初は

$$(216)\qquad e^-(k_1,\lambda_1)+e^+(k_2,\lambda_2)\longrightarrow \mu^-(k_3,\lambda_3)+\mu^+(k_4,\lambda_4)$$

を計算してみよう。 $|i\rangle$ と $|f\rangle$ は

$$(217)\qquad \begin{cases} |i\rangle = a^\dagger_{k_1,\lambda_1}\, b^\dagger_{k_2,\lambda_2}|0\rangle = a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1}\, b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle \\ |f\rangle = a^\dagger_{k_3,\lambda_3}\, b^\dagger_{k_4,\lambda_4}|0\rangle = a^\dagger_{\mu,k_3,\lambda_3}\, b^\dagger_{\mu,k_4,\lambda_4}|0\rangle \end{cases}$$

$$(218)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_{I,e} = -eQ_e\overline{\psi}_e\gamma^\mu\psi_e A_\mu = -eQ_e A_\alpha(x)\overline{\psi}_e(x)\gamma^\alpha\psi_e(x) \\ \mathcal{L}_{I,\mu} = -eQ_\mu\overline{\psi}_\mu\gamma^\mu\psi_\mu A_\mu = -eQ_\mu A_\beta(x)\overline{\psi}_\mu(x)\gamma^\beta\psi_\mu(x) \end{cases}$$

2次の振幅は

$$(219)\qquad iT_{fi} = \langle 0|\, b_{\mu,k_4,\lambda_4}\, a_{\mu,k_3,\lambda_3}\, T\Big[i\int d^4x\,\mathcal{L}_{I,\mu}(x)\Big]\Big[i\int d^4y\,\mathcal{L}_{I,e}(y)\Big]a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1}\, b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle$$

$$= \langle 0|\, b_{\mu,k_4,\lambda_4}\, a_{\mu,k_3,\lambda_3}\, T\Big[\overbrace{(-ieQ_\mu)A_\alpha(x)}^{\int d^4x}\overline{\psi}_\mu(x)\gamma^\alpha\psi_\mu(x)\Big]\Big[\overbrace{(-ieQ_e)A_\beta(y)}^{\int d^4y}\overline{\psi}_e(y)\gamma^\beta\psi_e(y)\Big]\, a^\dagger_{e,k_1,\lambda_1}\, b^\dagger_{e,k_2,\lambda_2}|0\rangle$$

$$= (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\int d^4x\int d^4y\ \overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)e^{+ix(k_3+k_4)}$$
$$\langle 0|TA_\alpha(x)A_\beta(y)|0\rangle\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)e^{-iy(k_1+k_2)}$$

$$= (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\int d^4x\int d^4y\ \overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)e^{ix(k_3+k_4)}$$
$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{i e^{-ik(x-y)}}{k^2+i\varepsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)e^{-iy(k_1+k_2)}$$

p.49の(60)式と同じように、$\int d^4x \int d^4y$ を実行して $(2\pi)^4\delta^4(k-k_3-k_4)(2\pi)^4\delta^4(k-k_1-k_2)$

を求め、$\int d^4k$ を実行すると

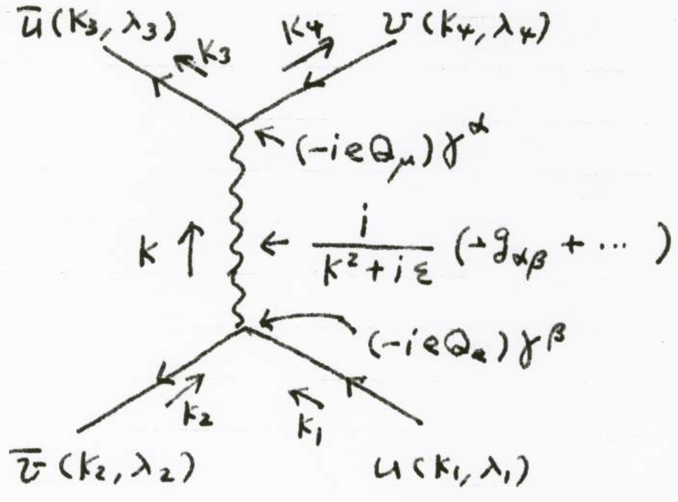
(220)
$$iT_{fi} = (-ieQ_e)(-ieQ_\mu)\,\overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times \frac{i}{k^2+i\varepsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4)$$
$$\equiv iM_{fi}\ (2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-k_3-k_4)$$

となり、全運動量保存を因子化した振幅

(221)
$$M_{fi} = \frac{1}{i}\,\overline{u}(k_3,\lambda_3)(-ieQ_\mu\gamma^\alpha)\,v(k_4,\lambda_4)$$
$$\times\frac{i}{k^2+i\varepsilon}(-g_{\alpha\beta}+\cdots)\,\overline{v}(k_2,\lambda_2)(-ieQ_e\gamma^\beta)\,u(k_1,\lambda_1)$$

上式は Feynman 図

(222) $iM_{fi} =$



$k = k_1+k_2 = k_3+k_4$

i 因子をまとめると、

(223)
$$M = -e^2Q_eQ_\mu\,\overline{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)\frac{-g_{\alpha\beta}+\cdots}{k^2+i\varepsilon}\overline{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1)$$

$k = k_1+k_2 = k_3+k_4$

光子 propagator のスピン和項 $(-g_{\alpha\beta}+\cdots)$ の $\cdots$ は k_α 又は k_β を持つ。

その寄与は消える。

(224) $$k_\alpha \bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4) = \bar{u}(k_3,\lambda_3)(\not{k}_3+\not{k}_4)v(k_4,\lambda_4)$$

$$= \bar{u}(k_3,\lambda_3)\left[(\not{k}_3-m_\mu)+(\not{k}_4+m_\mu)\right]v(k_4,\lambda_4)$$

$$=0$$

(225) $$k_\beta \bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma^\beta u(k_1,\lambda_1) = \bar{v}(k_2,\lambda_2)(\not{k}_1+\not{k}_2)u(k_1,\lambda_1)$$

$$= \bar{v}(k_2,\lambda_2)\left[(\not{k}_1+m_e)+(\not{k}_2-m_e)\right]u(k_1,\lambda_1)$$

$$=0$$

ここで Dirac 方程式 (131)

(226) $$\begin{cases} (\not{p}-m)u(p,\lambda) = \bar{u}(p,\lambda)(\not{p}-m)=0 \\ (\not{p}+m)v(p,\lambda) = \bar{v}(p,\lambda)(\not{p}+m)=0 \end{cases}$$

を用いた。最終的に

(227) $$M = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}\,\bar{u}(k_3,\lambda_3)\gamma^\alpha v(k_4,\lambda_4)\cdot\bar{v}(k_2,\lambda_2)\gamma_\alpha u(k_1,\lambda_1) \quad ; s=(k_1+k_2)^2 = (k_3+k_4)^2$$

を得る。ここで

(228) $$m_e = 0\ ,\quad m_\mu = m$$

として、e^+e^- の重心系.

(229) $k_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, 1)$ $k_3^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, \beta\sin\theta, 0, \beta\cos\theta)$

$k_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, -1)$ $k_4^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, -\beta\sin\theta, 0, -\beta\cos\theta)$

$\beta = \sqrt{1-4m^2/s}$, で 振幅 (227) を求めてみます。helicity に依存するので

(230) $$\mathcal{M}^{\lambda_3\lambda_4}_{\lambda_1\lambda_2} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}\, g_{\alpha\beta}\, J^\alpha_{\lambda_3\lambda_4}\, J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}$$

と置いて、カレント $J^\alpha_{\lambda_3\lambda_4}$, $J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}$ を求めます。$k_1^2 = k_2^2 = m_e^2 = 0$ なので

(231) $$\begin{aligned} J^\beta_{\lambda_1\lambda_2} &= \bar{v}(k_2,\lambda_2)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\beta \\ \sigma_-^\beta & 0 \end{pmatrix} u(k_1,\lambda_1) \\ &= \left(v(k_2,\lambda_2)_+^\dagger,\ v(k_2,\lambda_2)_-^\dagger\right)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\beta \\ \sigma_-^\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(k_1,\lambda_1)_- \\ u(k_1,\lambda_1)_+ \end{pmatrix} \\ &= v(k_2,\lambda_2)_+^\dagger\, \sigma_+^\beta\, u(k_1,\lambda_1)_+ + v(k_2,\lambda_2)_-^\dagger\, \sigma_-^\beta\, u(k_1,\lambda_1)_- \end{aligned}$$

ここで (138) と (151) をコピーしておきます。

(232) $$\begin{cases} u(p,\lambda)_\pm = \sqrt{E \pm \lambda|p|}\, \chi_\lambda(\vec{p}) \xrightarrow{m\to 0} \delta_{\lambda,\pm}\sqrt{2E}\, \chi_\pm(\vec{p}) \\ v(p,\lambda)_\pm = \pm\lambda\sqrt{E \mp \lambda|p|}\, \chi_{-\lambda}(\vec{p}) \xrightarrow{m\to 0} -\delta_{\lambda,\mp}\sqrt{2E}\, \chi_\pm(\vec{p}) \end{cases}$$

(233) $$\begin{aligned} J^\beta_{+-} &= J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1=+, \lambda_2=-) = v(k_2,-)_+^\dagger\, \sigma_+^\beta\, u(k_1,+)_+ \\ &= -2E\, \chi_+^\dagger(\vec{k}_2)\, \sigma_+^\beta\, \chi_+(\vec{k}_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J^\beta_{-+} &= J^\beta_{\lambda_1\lambda_2}(\lambda_1=-, \lambda_2=+) = v(k_2,+)_-^\dagger\, \sigma_-^\mu\, u(k_1,-)_- \\ &= -2E\, \chi_-^\dagger(\vec{k}_2)\, \sigma_-^\beta\, \chi_-(\vec{k}_1) \end{aligned}$$

ここで、(142), (145) で $\vec{k}_1 : (\theta,\phi) = (0,0)$; $\vec{k}_2 : (\theta,\phi) = (\pi, 0)$ とすると

(234) $\chi_+(\vec{K}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\chi_+(\vec{K}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\chi_-(\vec{K}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\chi_-(\vec{K}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(233) に代入すると

(235) $J^\beta_{+-} = -2E\,(0,1)\left(1, \vec{\sigma}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\sqrt{s}\,(0, 1, i, 0)$

$J^\beta_{-+} = -2E\,(-1,0)\left(1, -\vec{\sigma}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{s}\,(0, -1, i, 0)$
$= -\sqrt{s}\,(0, 1, -i, 0)$

(236) $J^\beta_{\lambda,-\lambda} = -\sqrt{s}\,(0, 1, \lambda i, 0)$

一方 μ のカレントは $m \neq 0$ を keep して

(237) $J^\alpha_{\lambda_3\lambda_4} = \bar{u}(k_3, \lambda_3)\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\alpha \\ \sigma_-^\alpha & 0 \end{pmatrix} v(k_4, \lambda_4)$

$= u(k_3, \lambda_3)^\dagger_+\, \sigma_+^\alpha\, v(k_4, \lambda_4)_+ + u(k_3, \lambda_3)^\dagger_-\, \sigma_-^\alpha\, v(k_4, \lambda_4)_-$

$= \lambda_4 E \Big\{ \sqrt{1+\lambda_3\beta}\sqrt{1-\lambda_4\beta}\, \chi^\dagger_{\lambda_3}(\vec{K}_3)\sigma_+^\alpha \chi_{-\lambda_4}(\vec{K}_4)$

$- \sqrt{1-\lambda_3\beta}\sqrt{1+\lambda_4\beta}\, \chi^\dagger_{\lambda_3}(\vec{K}_3)\sigma_-^\alpha \chi_{-\lambda_4}(\vec{K}_4) \Big\}$

(238)
$$\begin{cases} J^\alpha_{\sigma,\sigma} = \sigma E\sqrt{1-\beta^2}\left\{ \chi^\dagger_\sigma(\vec{K}_3)\sigma_+^\alpha \chi_{-\sigma}(\vec{K}_4) - \chi^\dagger_\sigma(\vec{K}_3)\sigma_-^\alpha \chi_{-\sigma}(\vec{K}_4) \right\} \\ \qquad = \sigma E\sqrt{1-\beta^2}\left\{ 0,\ 2\chi^\dagger_\sigma(\vec{K}_3)\vec{\sigma}\chi_{-\sigma}(\vec{K}_4) \right\} \\ J^\alpha_{+,-} = -E\left\{ (1+\beta)\chi^\dagger_+(\vec{K}_3)\sigma_+^\alpha\chi_+(\vec{K}_4) - (1-\beta)\chi^\dagger_+(\vec{K}_3)\sigma_-^\alpha\chi_+(\vec{K}_4) \right\} \\ J^\alpha_{-,+} = E\left\{ (1-\beta)\chi^\dagger_-(\vec{K}_3)\sigma_+^\alpha\chi_-(\vec{K}_4) - (1+\beta)\chi^\dagger_-(\vec{K}_3)\sigma_-^\alpha\chi_-(\vec{K}_4) \right\} \end{cases}$$

ここで $\vec{k_3}:(\theta,\phi)=(\theta,0)$; $\vec{k_4}:(\theta,\phi)=(\pi-\theta,\pi)$ とすると、(142), (145) より

(239) $\chi_+(\vec{k_3}) = \begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ $\qquad \chi_+(\vec{k_4}) = \begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

$\chi_-(\vec{k_3}) = \begin{pmatrix}-\sin\frac{\theta}{2}\\ \cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$ $\qquad \chi_-(\vec{k_4}) = \begin{pmatrix}+\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$

これらを (238) に代入すると、

(240) $J^\alpha_{+,+} = E\sqrt{1-\beta^2}\left\{0,\ 2\chi_+^\dagger(\vec{k_3})\vec{\sigma}\chi_-(\vec{k_4})\right\}$

$= E\cdot\frac{m}{E}\cdot 2\left\{0,\ (\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\vec{\sigma}\begin{pmatrix}+\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\}$

$= 2m[0,\ \sin\theta,\ 0,\ \cos\theta]$

$J^\alpha_{-,-} = -2m[0,\ \chi_-^\dagger(\vec{k_3})\vec{\sigma}\chi_+(\vec{k_4})]$

$= -2m\left[0,\ (-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\vec{\sigma}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right]$

$= +2m[0, -\sin\theta,\ 0, -\cos\theta]$

$J^\alpha_{+,-} = -E\left\{(1+\beta)(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\sigma_+^\alpha\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} - (1-\beta)(\cos\frac{\theta}{2},\sin\frac{\theta}{2})\sigma_-^\alpha\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\}$

$= -E(1+\beta)[0, -\cos\theta,\ i,\ \sin\theta] + E(1-\beta)[0, \cos\theta, -i, -\sin\theta]$

$= 2E[0,\ \cos\theta, -i, -\sin\theta]$

$J^\alpha_{-,+} = E\left\{(1-\beta)(-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\sigma_+^\alpha\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} - (1+\beta)(-\sin\frac{\theta}{2},\cos\frac{\theta}{2})\sigma_-^\alpha\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}\right\}$

$= E(1-\beta)[0,\ \cos\theta,\ i, -\sin\theta] - E(1+\beta)[0, -\cos\theta, -i,\ \sin\theta]$

$= E(1-\beta)[0,\ \cos\theta,\ i, -\sin\theta] + E(1+\beta)[0,\ \cos\theta,\ i, -\sin\theta]$

$= 2E[0, \cos\theta,\ i, -\sin\theta]$

(236) と (240) を (230) に代入すると全ての helicity 振幅が得られる。

(241) $$M^{\sigma,\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s} g_{\alpha\beta}\ 2m\left[0, \sigma\sin\theta, 0, \sigma\cos\theta\right]\cdot\left[0, 1, \lambda i, 0\right](-\sqrt{s})$$

$$= \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}(-2m\sqrt{s})\left[0 - \sigma\sin\theta - 0 - 0\right]$$

$$= e^2 Q_e Q_\mu \frac{2m}{\sqrt{s}} \sin\theta \cdot \sigma$$

$$M^{\sigma,-\sigma}_{\lambda,-\lambda} = \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s} g_{\alpha\beta}\ \sqrt{s}\left[0, \cos\theta, -\sigma i, -\sin\theta\right]\cdot\left[0, 1, \lambda i, 0\right](-\sqrt{s})$$

$$= \frac{e^2 Q_e Q_\mu}{s}(-s)\left[0 - \cos\theta - \sigma\lambda - 0\right]$$

$$= e^2 Q_e Q_\mu (\cos\theta + \sigma\lambda)$$

断面積は

(242) $$d\sigma^{LL}_{LR} = d\sigma^{RR}_{LR} = d\sigma^{LL}_{RL} = d\sigma^{RR}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu \frac{2m}{\sqrt{s}}\sin\theta\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}\frac{4m^2}{s}\sin^2\theta \cdot \beta\, d\cos\theta$$

$$d\sigma^{LR}_{LR} = d\sigma^{RL}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu(\cos\theta + 1)\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}(1+\cos\theta)^2 \beta\, d\cos\theta$$

$$d\sigma^{RL}_{LR} = d\sigma^{LR}_{RL} = \frac{1}{2s}\left|e^2 Q_e Q_\mu(\cos\theta - 1)\right|^2 \frac{\beta}{8\pi}\frac{d\cos\theta}{2}$$

$$= \frac{e^4 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}(1-\cos\theta)^2 \beta\, d\cos\theta$$

e^+e^- のスピンを平均、$\mu^+\mu^-$ のスピンを足すと.

(243) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{(4\pi\alpha)^2 Q_e^2 Q_\mu^2}{32\pi s}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left\{(1-\beta^2)\sin^2\theta \times 4 + (1+\cos\theta)^2\times 2 + (1-\cos\theta)^2 \times 2\right\}\beta$$

$$= \frac{\pi\alpha^2 Q_e^2 Q_\mu^2}{2s}\left\{\left(1+\frac{4m^2}{s}\right) + \left(1 - \frac{4m^2}{s}\right)\cos^2\theta\right\}\beta \qquad ;\ Q_e = Q_\mu = 1$$

LHCでの quark, gluon 散乱との比較のために計算しておいた方が良いと思われるQEDの 2→2 過程は、次の通りです。

(244a) $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ $(m_\mu \neq 0)$ $\Longleftrightarrow$ $q\bar{q} \to Q\bar{Q}$

(244b) $\gamma\gamma \to \mu^+\mu^-$ $(m_\mu \neq 0)$ $\Longleftrightarrow$ $gg \to Q\bar{Q}$

(244c) $e^-e^- \to e^-e^-$ $(m_e = 0)$ $\Longleftrightarrow$ $qq \to qq$

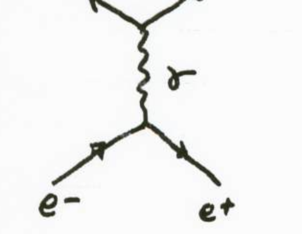
(244d) $e^-\gamma \to e^-\gamma$ $(m_e = 0)$ $\Longleftrightarrow$ $qg \to qg$

(244e) none $\Longleftrightarrow$ $gg \to gg$

一応、(244a)−(244e)の全ての過程についてヘリシティー振幅を求めようと思いますが、今日は時間切れですので、次ページからQCDの紹介をさせて下さい。

(244a)の $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ の振幅は (241)式にまとまっていますが、覚えるべきキーポイントは次の点です。

(245) $e^+e^+ \to \mu^+\mu^-$ 等 s-channel の vector boson 交換過程では



$m=0$ 極限で、$\sigma_{e^-} = -\sigma_{e^+}$, $\sigma_{\mu^-} = -\sigma_{\mu^+}$ が残り、

重心系で e^- と μ^- の角度を θ としたときに

$\sigma_{e^-} = \sigma_{\mu^-}$ のとき $|M| \sim 1+\cos\theta$

$\sigma_{e^-} = -\sigma_{\mu^-}$ のとき $|M| \sim 1-\cos\theta$

QCD

残った時間で、簡単にQCDの紹介をします。Lagrangian密度は

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i (i \not{D}_{ij} - m\delta_{ij}) \psi_j - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu} + \text{gauge fix terms} \tag{244}$$

と表わすことができ（quark 1ヶだけを書きました）、QEDの(209)式と見かけはそっくりです。ここで

$$\begin{cases} i = 1, 2, 3 \quad (\text{又は red, blue, green}) & \text{は } SU(3) \text{ の基本表現の自由度} \\ a = 1, 2, 3, \cdots, 8 & \text{は } SU(3) \text{ の adjoint 表現の自由度} \end{cases} \tag{245}$$

です。quark field $\psi_j(x)$ は、SU(3)空間の3次元縦ベクトルとすることができて

$$\psi_j(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \tag{246}$$

SU(3)のゲージ変換は

$$\psi_j(x) \to \psi_j'(x) = \left[e^{igT^a\theta^a(x)} \right]_{jk} \psi_k(x) \equiv U(x)_{jk} \psi_k(x) \tag{247}$$

の様に、3×3の Unitary で determinant が 1 の行列 $U(x)_{jk}$ で表わされます。

$$\begin{cases} U(x)^\dagger U(x) = 1 & \cdots \text{unitary な } 3\times 3 \text{ 行列} \\ \det U(x) = 1 & \cdots \text{special (?) と呼んで、} SU(3) \text{ と書きます.} \end{cases} \tag{248}$$

SU(3)群の要素 $U(x)$ は、Hermite で traceless な 8ヶの generator で生成されます。

$$\begin{cases} (T^a)^\dagger = T^a & \Leftarrow U^\dagger U = e^{-ig(T^a)^\dagger\theta^a(x)} e^{igT^a\theta^a(x)} = 1 \\ \mathrm{tr}(T^a) = 0 & \Leftarrow \det U = e^{ig\,\mathrm{tr}(T^a)\theta^a(x)} = e^0 = 1 \end{cases} \tag{249}$$

(249)を満たす complex な 3×3 行列は $3\times3\times2-3\times3-1=8$ ヶあり、次の様に選ぶことができます。

(250) $$T^1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad T^2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad T^3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$T^4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\quad T^5=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},$$

$$T^6=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad T^7=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad T^8=\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

ここで、T^1, T^2, T^3 の 2×2 成分は SU(2) の generator $\frac{\sigma^1}{2}, \frac{\sigma^2}{2}, \frac{\sigma^3}{2}$ で、T^4, T^5 は $(j,k)=(2,3)$ 成分が $\frac{\sigma^1}{2}, \frac{\sigma^2}{2}$，$T^6$ と T^7 は $(j,k)=(3,1)$ 成分、T^8 は残りの diagonal な traceless matrix です。規格化は

(251) $$\mathrm{tr}\left(T^a T^b\right) = T_F\,\delta^{ab} \quad ; \quad T_F=\frac{1}{2}$$

です。diagonal な generator の数（「中性」カレントの数）をランクといい、SU(3) は T^3 と T^8 だけが diagonal なので、rank = 2 です。変換 $U(x)$ が群を作る、

(252) $$U_1(x)\cdot U_2(x) = U_3(x)$$ が矢張り SU(3) 変換である。

ことは、generator の交換関係（又は反交換関係）が閉じることと等価で

(253) $$\left[T^a, T^b\right] = i f^{abc} T^c$$

を SU(3) 代数 (algebra) と呼びます。$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots}$ だからです。

$\mathcal{L}_{QCD}$ (244) がゲージ変換 (247) で不変であるためには、共変微分が

(254) $D_\mu \to D_\mu' = U(x) D_\mu U(x)^\dagger$

と変換する必要があります。8ヶのゲージ場(グルオン)を導入して

(255) $D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a(x)$

$$\to \partial_\mu + igT^a A_\mu^a(x)'$$

$$= U(x) D_\mu U^\dagger(x)$$

$$= U(x)(\partial_\mu + igT^a A_\mu^a(x)) U^\dagger(x)$$

$$= U(x)(\partial_\mu U^\dagger(x)) + \underbrace{U(x)U^\dagger(x)}_{=1}\partial_\mu$$

$$+ igA_\mu^a U(x)[T^a, U^\dagger(x)] + igA_\mu^a \underbrace{U(x)U^\dagger(x)}_{=1} T^a$$

$$= \partial_\mu + igT^a A_\mu^a + U(x)\left[(\partial_\mu U^\dagger(x)) + igA_\mu^a [T^a, U^\dagger(x)]\right]$$

ここで

(256) $\partial_\mu U^\dagger(x) = \partial_\mu e^{-igT^a\theta^a(x)} = \partial_\mu [1 - igT^a\theta^a(x) + \cdots] = -igT^a \partial_\mu \theta^a(x) + \cdots$

$$[T^a, U^\dagger(x)] = [T^a, 1 - igT^b\theta^b(x) + \cdots] = -ig[T^a, T^b]\theta^b(x) + \cdots$$

$$= gf^{abc}\theta^b(x) T^c + \cdots$$

代入すると

(257) $A_\mu^a(x) \to A_\mu^a(x)' = A_\mu^a(x) - \partial_\mu \theta^a(x) + gf^{cba}\theta^b(x) A_\mu^c(x)$

$$= A_\mu^a(x) - \partial_\mu \theta^a(x) - gf^{abc}\theta^b(x) A_\mu^c(x)$$

グルオンの kinetic part は上の変換で不変でなければならない。

共変微分を使うと、簡単にゲージ不変なグルオンのkinetic partが求まります。

(258) $[D_\mu, D_\nu] \to [D'_\mu, D'_\nu] = U(x)[D_\mu, D_\nu]U^+(x)$

なので

(259) $tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} \to tr\{U(x)[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]U^+(x)\}$

$= tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\}$

がゲージ不変、且つLorentz不変であることに注目します。

(260) $[D_\mu, D_\nu] = [\partial_\mu + igT^b A^b_\mu, \partial_\nu + igT^c A^c_\nu]$

$= igT^c(\partial_\mu A^c_\nu - \partial_\nu A^c_\mu) - g^2[T^b, T^c]A^b_\mu A^c_\nu$

$= igT^a(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) - ig^2 f^{abc} T^a A^b_\mu A^c_\nu$

$= igT^a[\underline{\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu - gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu}]$

$\equiv igT^a F^a_{\mu\nu}$

(261) $tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} = tr\{[igT^a F^a_{\mu\nu}][igT^b F^{b\mu\nu}]\}$

$= -g^2 tr(T^a T^b) F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu}$

$= -g^2 \frac{\delta^{ab}}{2} F^a_{\mu\nu} F^{b\mu\nu}$

$= -\frac{g^2}{2} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$

従って"free part"が正しく規格化されたkinetic partは

(262) $\mathcal{L}_{gluon} = \frac{1}{2g^2} tr\{[D_\mu, D_\nu][D^\mu, D^\nu]\} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}$ ///