QCD for Collider Physics III

2005.5.5

まずは前回の反省から.

p.43 の Feynman Propagator の導出 をもう少していねいにやってみます。

まず

(53) $$\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left(a_k e^{-ikx}+\cdots\right)\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\left(\cdots + a_p^\dagger e^{+ipy}\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\int\frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p}\, 2E_k(2\pi)^3\delta^3(k-p)\, e^{-ik(x-y)}|0\rangle$$

$$= \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\, e^{-ik(x-y)}$$

ここで (34) の normalization

(54) $$\langle 0|a_k a_p^\dagger|0\rangle = \langle 0|[a_k, a_p^\dagger]|0\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^3(p-k)$$

を用いました。 (49)式 は 逆の方向で示してみます。

(55) $$D_F(x-y) = \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int\frac{d^3k\,dk^0}{(2\pi)^4}\frac{i}{(k^0)^2-E_k^2+i\epsilon}e^{-ik(x-y)}$$

$$= \int\frac{d^3k\,dk^0}{(2\pi)^4}\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{\left(k^0-(E_k-i\epsilon)\right)\left(k^0+(E_k-i\epsilon)\right)}$$

ここで $\int_{-\infty}^{\infty} dk^0$ をするのですが、 $x^0-y^0=t>0$ ならば e^{-ik^0t} は $\mathrm{Im}\,k^0<0$ (下側) で減衰, $x^0-y^0=-t<0$ ならば $e^{-ik^0(x^0-y^0)}=e^{ik^0t}$ は $\mathrm{Im}\,k^0>0$ (上側) で減衰する。

ここに注意すると.

(56) $$D_F(x-y) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left\{\theta(x^0-y^0)\int dk^0\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{\left(k^0-(E_k-i\epsilon)\right)2E_k} + \theta(y^0-x^0)\int dk^0\frac{i\,e^{-ik(x-y)}}{-2E_k(k^0+E_k-i\epsilon)}\right.$$

(56)'' $$D_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left\{\theta(x^0-y^0)\int dk^0\left[i(-2\pi i)\delta(k^0-E_k)\frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k}\right] + \theta(y^0-x^0)\int dk^0\left[i(2\pi i)\delta(k^0+E_k)\frac{e^{-ik(x-y)}}{2E_k}\right]\right\}$$

次に (50)式 $\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}$ を (46)式で $\left\{\theta(x^0-y^0)e^{-i(E_k(x^0-y^0)-k(x-y))} - \theta(y^0-x^0)e^{-i(E_k(y^0-x^0)-k(x-y))}\right\}$

(60) $$S^{(2)}_{fi} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_k}\left\{\frac{1}{2!}\theta \ldots \left[-\frac{i\lambda}{3!}\phi(x)^3\right] \ldots \left[\frac{i\lambda}{3!}\ldots\right] a_{p_1} a_{p_2} |0\rangle\right\}$$

$= \theta(x^0-y^0)$ x, y の順序 $\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ $\phi(x)$ が $\theta(y^0-x^0)$ $a_{p_1} a_{p_2}$ …… である。

$$\equiv \frac{(-i\lambda)^2}{\ldots}\int d^4x \int d^4y \ldots e^{ix(p_3+p_4)} \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p_1+p_2)}$$

In the 3'rd line of (56)'' $e^{ix(p-p)}$ の項で、$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p-p)}$ $d^3k \to -d^3(-k) = -d^3k$ とした。

$$+ e^{ix(p_3-p_2)}\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle e^{-iy(p_1-p_4)}$$

(57)' $$D_F(x-y) \equiv \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\underbrace{\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon}}_{\tilde{D}_F(k)} e^{-ik(x-y)}$$

$$= -\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\frac{i}{k^2-m^2+i\varepsilon} e^{-ik(x-y)} e^{ix(p_3+p_4)} e^{-iy(p_1+p_2)}\right.$$

は とても大切です。 $i\varepsilon$ の符号は、non-relativistic な …… を …… て。

(58)' $$\frac{1}{E-(E_k-i\varepsilon)} \Rightarrow e^{\mp iEt} = e^{-iE_k t} \ldots \quad \left. e^{ix(p_3-p_2)} e^{iy(p_1-p_4)}\right\}$$

$$= -i\lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\left\{(2\pi)^4\delta^4(k-p_3-p_4)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1+p_2)\right.$$

となること。それが、relativistic な resonance 散乱では $s = E^2$ として

$$+ (2\pi)^4\delta^4(k-p_4+p_2)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1-p_3)$$

(59) $$\frac{1}{s-m^2+im\Gamma} \approx \frac{1}{E^2-(m-\frac{i}{2}\Gamma)^2} \Rightarrow e^{-iEt} = e^{-i(m-\frac{i}{2}\Gamma)t} = e^{-imt-\frac{\Gamma}{2}t} = \psi(t)$$

$$+ (2\pi)^4\delta^4(k-p_3+p_2)(2\pi)^4\delta^4(-k+p_1-p_4)\Big\}$$

$$= -i\lambda^2\left\{\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1-p_3)^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1-p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\right\}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

となることに到達するのです。ここで $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ は寿命です。

符号を間違えると、発散してしまいます。

$$= i\,M_{fi}\,(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

(61) $$M_{fi} = -\lambda^2\left\{\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1-p_3)^2-m^2+i\varepsilon} + \frac{1}{(p_1-p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\right\}$$

$$= -\lambda^2\left(\frac{1}{\ldots} + \frac{1}{\ldots} + \frac{1}{\ldots}\right)$$

(60)式で全ての規格化を説明したつもりです。簡単な計算ですのでやってみて下さい。大切なことは、$\phi(x)$の自由場の生成・消滅演算子による展開式(35)、共変規格化された交換関係(34)、T積の真空期待値(57)、と

(62) $$\int d^4x\, e^{-ixk} = (2\pi)^4 \delta^4(k)$$

くらいでしょうか。「Feynman Propagator (57)を外線にどうつなぐか」と考えても正しい散乱振幅が得られます。Feynman図も前ページに示しました。

理論の方は必ず、演算子による計算をマスターして下さい。標準模型やMSSM、GUT等、多くの粒子が1組(multiplet=多重項)として結合しているときに、多くの振幅の干渉が重要になるのですが、振幅間の相対的な位相を最も簡単に求められるのが演算子法です。

振幅(61)から断面積を求めてみましょう。

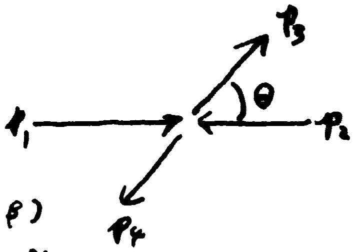
(63) $$d\sigma = \frac{1}{F} |M_{fi}|^2 \, d\Phi_2$$

ここで共変規格化されたフラックスは

(64)
$$\begin{aligned} F &= (2E_1)(2E_2)\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| \\ &= 4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \\ &= 2\sqrt{s^2 - 2(m_1^2+m_2^2)s + (m_1^2-m_2^2)^2} \qquad \cdots\ s = (p_1+p_2)^2 = 2p_1\cdot p_2 + m_1^2 + m_2^2 \\ &= \begin{cases} 4p_1\cdot p_2 = 2(p_1+p_2)^2 = 2s & \cdots\ m_1 = m_2 = 0 \\ 2s\sqrt{1-4m^2/s} & \cdots\ m_1 = m_2 = m \\ 4p_1 m_2 & \cdots\ p_2^\mu = (m_2,0,0,0)\ \text{frame で}\ p_1^\mu = (E_1,0,0,p_1) \end{cases} \end{aligned}$$

(65) $$d\sigma = \frac{1}{2s\sqrt{1-4m^2/s}}\ \lambda^4 \left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right|^2 \frac{1}{8\pi}\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}\ \frac{d\cos\theta}{2}\ \frac{d\phi}{2\pi}$$

(66) $$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{\lambda^4}{32\pi s}\left|\frac{1}{s-m^2}+\frac{1}{t-m^2}+\frac{1}{u-m^2}\right|^2$$



(67)
$$s = (p_1+p_2)^2 = 4E^2$$
$$t = (p_1-p_3)^2 = 2m^2 - 2E^2(1-\beta\cos\theta)$$
$$u = (p_1-p_4)^2 = 2m^2 - 2E^2(1+\beta\cos\theta)$$

$$p_1^\mu = E(1,0,0,\beta)$$
$$p_2^\mu = E(1,0,0,-\beta)$$
$$p_3^\mu = E(1,\beta\sin\theta,0,\beta\cos\theta)$$
$$p_4^\mu = E(1,-\beta\sin\theta,0,-\beta\cos\theta)$$

(67)式の s, t, u は それぞれ「s-, t-, u-channel に粒子が交換される過程」という表現を使うことが多いので覚えて下さい。(61)式の Feynman図で左から s, t, u です。

最後に一つだけ大切な注意。この例では $\vec{p}_3$ の粒子と $\vec{p}_4$ の粒子は区別がつきません。(これこそ量子力学の不思議ですよね。) その為、(67)の $(\cos\theta, \phi)$ による phase space の parametrization で、一般の場合のように

(68) $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

ととると、2重にカウントされてしまいます。2重カウントをさける為には、例えば

(69) $0 \leq \cos\theta \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$

とするのが一番理解し易いです。$0 \leq \cos\theta \leq 1$ の粒子を $\vec{p}_3$ の粒子と呼ぶわけです。

そうすれば (66)式は正しく、全断面積は

(70) $$\sigma_{tot} = \int_0^1 d\cos\theta\ \underbrace{\frac{d\sigma}{d\cos\theta}}_{(66)式}$$

となります。

ここでループの計算もやってみましょう。「大して難しいことではない」ということだけでも分かっておくことは大切です。正確な計算は理論家（とか計算機）にまかせれば良いです。

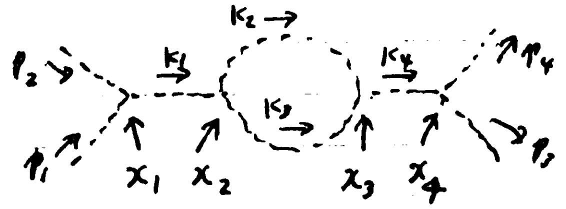
(60)式の $p_1+p_2 \to p_3+p_4$ 過程で、摂動の4次になると、

$$(70)\quad S_{fi}^{(4)} = \langle 0|\, a_{p_3} a_{p_4} \frac{1}{4!} T\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_4)^3 d^4x_4\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_3)^3 d^4x_3\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_2)^3 d^4x_2\right]\left[\int \frac{-i\lambda}{3!}\phi(x_1)^3 d^4x_1\right] a_{p_1}^{+} a_{p_2}^{+}|0\rangle$$

$\frac{1}{4!}$ は (x_1, x_2, x_3, x_4) の順序が4!通り。

これを全部やると手がくたびれるので、次の図に対応する部分だけやってみます。

(71)



$$(72)\quad S_{fi}^{(4)} = \frac{(-i\lambda)^4}{2!}\int d^4x_4 \int d^4x_3 \int d^4x_2 \int d^4x_1\, e^{ix_4(p_3+p_4)} e^{-ix_1(p_1+p_2)}$$

$$\langle 0|T\phi(x_4)\phi(x_3)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_3)\phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_3)\phi(x_2)|0\rangle \langle 0|T\phi(x_2)\phi(x_1)|0\rangle$$

全く同じものを2回カウントするので $\frac{1}{2!}$ で割っておく。

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int d^4x_4 \int d^4x_3 \int d^4x_2 \int d^4x_1\, e^{ix_4(p_3+p_4)} e^{-ix_1(p_1+p_2)} \int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}$$

$$\frac{i e^{-ik_1(x_2-x_1)}}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_2(x_3-x_2)}}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_3(x_3-x_2)}}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{i e^{-ik_4(x_4-x_3)}}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}$$

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int \frac{d^4k_1}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k_4}{(2\pi)^4}\ \frac{(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-k_1)(2\pi)^4\delta^4(k_1-k_2-k_3)(2\pi)^4\delta^4(k_2+k_3-k_4)(2\pi)^4\delta^4(k_4-p_3-p_4)}{(k_1^2-m^2+i\varepsilon)(k_2^2-m^2+i\varepsilon)(k_3^2-m^2+i\varepsilon)(k_4^2-m^2+i\varepsilon)}$$

$$= \frac{\lambda^4}{2}\int \frac{d^4k_3}{(2\pi)^4}\ \frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{(p_1+p_2-k_3)^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\ \frac{1}{(p_3+p_4)^2-m^2+i\varepsilon}\,(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$$\equiv i M_{fi}^{(4)}(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$$

$M_{fi}^{(4)}$ は (60) 式と同様、$i(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)$ をくくります。

(73) $$M_{fi}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{2i}\frac{1}{(p_1+p_2)^2-m^2+i\varepsilon}\left[\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right]\frac{1}{(p_3+p_4)^2-m^2+i\varepsilon}$$

ここで

(74) $$p_1+p_2=p_3+p_4=q$$

を導入して.

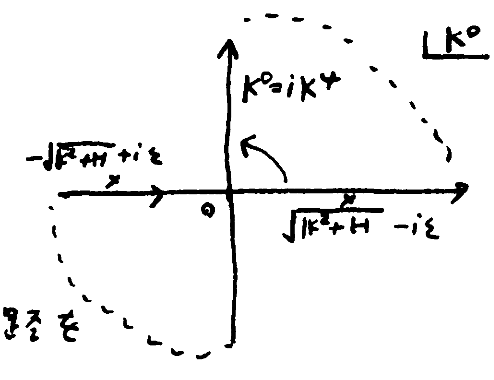
(75) $$M_{fi}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{(q^2-m^2+i\varepsilon)^2}\frac{1}{2}\underbrace{\left[\frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q-k)^2-m^2+i\varepsilon}\right]}_{F(q^2)}$$

(76) $$\begin{aligned}F &= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q-k)^2-m^2+i\varepsilon}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(1-x)(k^2-m^2+i\varepsilon)+x((q-k)^2-m^2+i\varepsilon)]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-2xq\cdot k+xq^2-m^2+i\varepsilon]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[(k-xq)^2-x^2q^2+xq^2-m^2+i\varepsilon]^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx\frac{1}{[xA+(1-x)B]^2}\\ &= \int_0^1 dx\frac{1}{((A-B)x+B)^2}\\ &= \frac{1}{B-A}\int d\frac{1}{(A-B)x+B}\\ &= \frac{1}{B-A}\left[\frac{1}{(A-B)x+B}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)=\frac{1}{AB}\end{aligned}$$

ここで $k-xq=k'$ に積分変数を換えて.

(77) $$\begin{aligned}F &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k'^2+x(1-x)q^2-m^2+i\varepsilon]^2}\\ &= \frac{1}{i}\int_0^1 dx\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\frac{1}{[k^2-H+i\varepsilon]^2}\end{aligned}$$



(78) $$H=m^2-x(1-x)q^2$$

で、$q^2<0$ のとき $H>0$ であることを考えて. k^0 の積分路を

(79) $k^0 = ik^4$; $-\infty < k^4 < \infty$ [Wick rotation]

と変更して良い。

(79) $\begin{cases} d^4k = dk^0dk^1dk^2dk^3 = i\,dk^1dk^2dk^3dk^4 = i\,d^4k_E \\ k^2 = k^{0\,2} - \boldsymbol{k}^2 = -(k^4)^2 - \boldsymbol{k}^2 = -[(k^1)^2 + (k^2)^2 + (k^3)^2 + (k^4)^2] \equiv -k_E^2 \end{cases}$

(80) $$F = \int_0^1 dx \int \frac{d^4k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[-k_E^2 - H + i\varepsilon]^2}$$

d^4k_E を4次元の極座標で表わすと、

(81) $(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4) = |k_E| \, (\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi, \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \cos\theta_1)$

(82) $$d^4k_E = \frac{\partial(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, \theta_1, \theta_2, \phi)} d|k_E| d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{\partial(k_E^1, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, k_E^2, k_E^3, k_E^4)} \frac{\partial(|k_E|, k_E^2, k_E^3, k_E^4)}{\partial(|k_E|, \theta_1, \theta_2, \theta_3)} d|k_E| d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{\partial\sqrt{|k_E|^2 - (k_E^2)^2 - (k_E^3)^2 - (k_E^4)^2}}{\partial|k_E|} \; |k_E|^3 \; \frac{\partial(\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\phi, \sin\theta_1 \cos\theta_2, \cos\theta_1)}{\partial(\theta_1, \theta_2, \phi)} d|k_E| d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{|k_E|^4}{k_E^1} \begin{vmatrix} * & * & -\sin\theta_1 \\ * & -\sin\theta_1 \sin\theta_2 & 0 \\ +\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi & 0 & 0 \end{vmatrix} d|k_E| d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= |k_E|^3 d|k_E| \frac{\sin^3\theta_1 \sin^2\theta_2 \cos\phi}{\sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\phi} d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= |k_E|^3 d|k_E| \sin^2\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 d\theta_2 d\phi$$

$$= \frac{1}{2} |k_E|^2 d|k_E|^2 \underbrace{\sqrt{1-\cos^2\theta_1}\, d\cos\theta_1}\, \underbrace{d\cos\theta_2}\, \underbrace{d\phi}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} |k_E|^2 d|k_E|^2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 2 \cdot 2\pi$$

$$= \pi^2 |k_E|^2 d|k_E|^2$$

(83) $$F_1 = \int_0^1 dx \int \frac{\pi^2 d|k_E|^2}{(2\pi)^4} \frac{|k_E|^2}{(|k_E|^2 + H - i\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{t}{(t+H-i\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \frac{t+H-H}{(t+H-i\varepsilon)^2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{\Lambda^2} dt \left[\frac{1}{t+H-i\varepsilon} - \frac{H}{(t+H-i\varepsilon)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln(t+H-i\varepsilon) + \frac{H}{t+H-i\varepsilon} \right]_0^{\Lambda^2}$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln \frac{\Lambda^2+H-i\varepsilon}{H-i\varepsilon} + \frac{H}{\Lambda^2+H-i\varepsilon} - \frac{H}{H-i\varepsilon} \right]$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[\ln \frac{\Lambda^2}{H-i\varepsilon} - 1 + O\left(\frac{H}{\Lambda^2}\right) \right]$$

$$\equiv \frac{1}{(4\pi)^2} B_0(q^2; m, m)$$

(84) $$B_0 = \ln\Lambda^2 - 1 - \int_0^1 dx \ln\left[m^2 - q^2 x(1-x) - i\varepsilon\right]$$

(84)の積分は

(85) $$q^2 = -Q^2 < 0$$

のときは簡単に実行できる.

(86) $$\int_0^1 dx \ln\left[\underbrace{m^2 + Q^2 x(1-x)}_{\text{>0 なので位相は現われない}} - i\varepsilon\right]$$

$$= \int_0^1 dx \ln\left[Q^2 (x-\alpha_-)(\alpha_+ - x)\right]$$

(87) $$\begin{cases} \alpha_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4m^2/Q^2}}{2} \\ \alpha_+ + \alpha_- = 1 \\ \alpha_+\alpha_- = -m^2/Q^2 \end{cases}$$ $$\alpha_- < 0 < x < 1 < \alpha_+$$

(88) $B_0 = \ln\Lambda^2 - 1 - \ln Q^2 - \int_0^1 dx\left[\ln(x-\alpha_-) + \ln(\alpha_+ - x)\right]$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \Big[(x-\alpha_-)[\ln(x-\alpha_-)-1] - (\alpha_+-x)[\ln(\alpha_+-x)-1]\Big]_0^1$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \Big[(x-\alpha_-)\ln(x-\alpha_-) - (\alpha_+-x)\ln(\alpha_+-x) - 2x + 1\Big]_0^1$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} - 1 - \Big[(1-\alpha_-)\ln(1-\alpha_-) - (\alpha_+-1)\ln(\alpha_+-1) - 2 - (-\alpha_-)\ln(-\alpha_-) + \alpha_+\ln\alpha_+\Big]$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \Big[2\alpha_+\ln\alpha_+ + 2\alpha_-\ln(-\alpha_-)\Big]$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \Big[(1+\beta)\ln\frac{(1+\beta)}{2} + (1-\beta)\ln\frac{(\beta-1)}{2}\Big] \quad ; \ \beta = \sqrt{1+\frac{4m^2}{Q^2}}$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \Big[\ln\frac{(\beta+1)(\beta-1)}{4} + \beta\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}\Big]$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \ln\frac{\cancel{4}m^2}{Q^2} - \beta\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{\cancel{4}m^2} + 1 - \beta\ln\frac{\beta+1}{\beta-1}$$

(89) $Q^2 \gg m^2 \Rightarrow \beta = 1 + \frac{2m^2}{Q^2}$, $\ln\frac{2}{\frac{2m^2}{Q^2}} = \ln\frac{Q^2}{m^2}$; $\ln\frac{\beta+1}{\beta-1} = \ln\frac{(\beta+1)^2}{\beta^2-1} = 2\ln\frac{Q}{2m}(\beta+1)$

$$= 2\ln\frac{Q}{2m}\left(1+1+\frac{2m^2}{Q^2}\right)$$
$$= 2\ln\frac{Q}{m}\left(1+\frac{m^2}{Q^2}\right)$$
$$= 2\left(\ln\frac{Q}{m} + \ln\left(1+\frac{m^2}{Q^2}\right)\right)$$
$$= \ln\frac{Q^2}{m^2} + \frac{2m^2}{Q^2} + \cdots$$

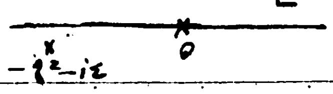
$$B_0 \longrightarrow \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \left(1+\frac{2m^2}{Q^2}\right)\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + \frac{2m^2}{Q^2} + \cdots\right)$$
$$= \ln\frac{\Lambda^2}{Q^2} + 1 - \frac{2m^2}{Q^2}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} + 1\right) + \cdots$$

ここで　$q^2 > 4m^2$ のとき、$Q^2 = -q^2 - i\varepsilon$ を代入すると.

(90) $\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q^2-i\varepsilon}} = \sqrt{1-\frac{4m^2}{q^2}}$ if $q^2 > 4m^2$

$$\ln\frac{\beta+1}{\beta-1} = \ln\frac{(\beta+1)^2}{\beta^2-1} = \ln\frac{(\beta+1)^2}{\frac{4m^2}{-q^2-i\varepsilon}} = \ln(\beta+1)^2 - \ln(4m^2) + \ln(-q^2-i\varepsilon)$$

(91) $\ln(-q^2-i\varepsilon) = \ln(\underbrace{|q^2|}_{q^2} e^{-i\pi}) = \ln s - i\pi$



従って　$q^2 = s > 4m^2$ のとき.

(92) $$B_0 = \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \beta\left[\ln\frac{(\beta+1)^2}{\frac{4m^2}{s}} - i\pi\right]\theta(s-4m^2)$$

$$= \ln\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1 - \beta\left[\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - i\pi\right]\theta(s-4m^2)$$

(93) $$\mathrm{Im}\, B_0 = \pi\beta\ \theta(s-4m^2)$$

ここまで計算した理由は、ユニタリティー(光学定理), p.14, が示せるからです。

(53)式で

(94) $$2\,\mathrm{Im}\, M_{ii}^{(4)} = \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{2}\,2\,\mathrm{Im}\, F(s)$$

$$= \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}\cdot\frac{1}{(4\pi)^2}\mathrm{Im}\, B_0(s)$$

$$= \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16\pi^2}\beta\pi\ \theta(s-4m^2) \qquad \cdots (93)$$

$$= \frac{\lambda^4}{(s-m^2)^2}\frac{1}{16\pi}\beta\ \theta(s-4m^2)$$

一方、(70)式を使って s-channel 過程の全断面積を計算すると.

(95) $$\sigma_{tot} = \frac{1}{2s\beta}\int |M_{fi}^{(2)}|^2 d\Phi_2$$

$$= \frac{1}{2s\beta}\cdot\int_0^1 d\cos\theta\ \frac{\lambda^4\beta}{16\pi\ (s-m^2)^2}$$

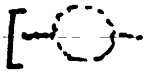
$$= \frac{1}{2s\beta}\cdot\frac{\lambda^4}{16\pi}\frac{\beta}{(s-m^2)^2}$$

従って unitarity の式が成立することが読みとれます.

(96) $$2\,\mathrm{Im}\, M_{ii}^{(4)} = \int |M_{fi}^{(2)}|^2 d\Phi_2$$

(95)式で同種粒子の2重カウントをさける為の $\int_0^1 d\cos\theta$ と、(72)式で2重カウントを補正するために $\frac{1}{2!}$ をかけることが対応しています。

Feynman図間のユニタリティーは Cutkosky則で保証されています。上の例では、

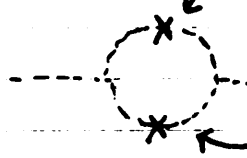
(96) $2i\,\mathrm{Im}$  $=$ [] $-$ []*

$$= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{1}{k^2-m^2+i\epsilon}\,\frac{1}{(k-q)^2-m^2+i\epsilon} - \frac{1}{k^2-m^2-i\epsilon}\,\frac{1}{(k-q)^2-m^2-i\epsilon}\right]$$

$$= \frac{1}{i}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[(-2\pi i)\,\delta(k^2-m^2)\,(2\pi i)\,\delta((k-q)^2-m^2)\right]$$

Cutkosky則

証明はやっかいです。

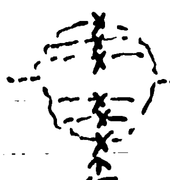
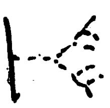
$=$ 

$$= i\int\frac{d^4k}{(2\pi)^2}\,\delta(k^2-m^2)\,\delta((q-k)^2-m^2)$$

$$= i\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3\,2E}\,(2\pi)\,\delta((q-k)^2-m^2)$$

$$= i\int d\Phi_2$$ …… p.16, (5)式

ここで、ループ運動量積分が、Im部に対しては、実粒子2体のphase space積分になることが、鍵です。多重ループ積分のIm部は、n粒子生成の寄与について、n体のphase spaceの積分になります。

(97) $2i\,\mathrm{Im}$  $=$  $= i\int\left|\right.$  $\left.\right|^2 d\Phi_n$

(n−1)ループ

n個の $-2\pi i\,\delta(k_i^2-m_i^2)$

(n−1)個の $\int\frac{d^4k_i}{(2\pi)^4}$

n体 phase space

ユニタリティーの要請は、例えばベクトルボソンのFeynman Propagatorが、

on-shellのときに

$$\text{(98)}\quad \frac{i}{k^2-\cancel{m^2}+i\epsilon}\left(-g^{\mu\nu}+\cdots\right) \longrightarrow \frac{i}{k^2-\cancel{m^2}+i\epsilon}\sum_\lambda \epsilon^\mu(k,\lambda)\,\epsilon^\nu(k,\lambda)^*$$

となっていなければならないことを意味します。この条件と、くり込み可能性の条件を同時に満たす為には、ベクトルボソンがゲージボソンである必要があります。

p.45の(52)式で $n^2=1$ のaxial gaugeの表式を書いたのですが、

$$\text{(99)}\quad n^2=0 \qquad n\cdot k\neq 0$$

のゲージ (light-cone axial gauge) が便利ですので、ここで導入します。

$$\text{(100)}\quad \begin{aligned} k^\mu &= k(1,0,0,1) \\ n^\mu &= n(1,0,0,-1) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} k^2 &= n^2 = 0 \\ k\cdot n &= 2kn \end{aligned}$$

のframeをとるととても簡単です。

$$\text{(101)}\quad \frac{k^\mu}{k} = (1,0,0,1) \qquad \frac{n^\mu}{n} = (1,0,0,-1)$$

なので

$$\text{(102)}\quad \frac{1}{2}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right) = (1,0,0,0)\ ,\quad \frac{1}{2}\left(\frac{k^\mu}{k}-\frac{n^\mu}{n}\right) = (0,0,0,1)$$

従って

$$\text{(103)}\quad \sum_\lambda \epsilon^\mu(k,\lambda)\,\epsilon^\nu(k,\lambda)^* = \begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 &&& \\ & 1 && \\ && 1 & \\ &&& 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 &&& \\ & 0 && \\ && 0 & \\ &&& 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 &&& \\ & 0 && \\ && 0 & \\ &&& 1 \end{pmatrix}$$

$$= -g^{\mu\nu} + \frac{1}{4}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right)\left(\frac{k^\nu}{k}+\frac{n^\nu}{n}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{k^\mu}{k}+\frac{n^\mu}{n}\right)\left(\frac{k^\nu}{k}-\frac{n^\nu}{n}\right)$$

(104) $$\sum_\lambda \epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k\cdot n} \qquad (\text{light-cone gauge})$$

上の式は covariant になったので、$k\cdot n \neq 0$ である限り、どんな frame でもOKです。

このゲージでは、

(105) $$k_\mu \epsilon^\mu(k,\lambda) = n_\mu \epsilon^\mu(k,\lambda) = 0$$

が成立している。

ちなみに、HELAS では、光子、グルオンの polarization vector として、

(106) $$\begin{cases} k^\mu = k(1, \sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \quad \text{に対し} \\ \epsilon^\mu(k,x) = (0, \cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \xrightarrow{\theta=\phi=0} (0,1,0,0) \\ \epsilon^\mu(k,y) = (0, -\sin\phi, \cos\phi, 0) \xrightarrow{\theta=\phi=0} (0,0,1,0) \\ \epsilon^\mu(k,\lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mp\epsilon^\mu(k,x) - i\epsilon^\mu(k,y)) \end{cases}$$

を用いている。これも実は light-cone gauge で、

(107) $$n^\mu = n(1, -\sin\theta\cos\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\theta)$$

に対応している。つまり $n^2=0$ ベクトルとして、k^μ の運動量成分が逆のベクトル

(108) $$n^\mu \propto (k^0, -\mathbf{k})$$

を用いている。このchoiceにより、n^μの依存性が露わでない表式(106)が得られた。一方、各々の光子、グルオンに対し異なる n^μ(ゲージ)をとっていることに注意して下さい。//

この場で、massive $(m\neq 0)$ vector boson の propagator についてコメントします。

vector boson の重心系では

$$(109)\quad \begin{cases} k^\mu = (m, 0, 0, 0) \\ \varepsilon^\mu_x = (0, 1, 0, 0) \\ \varepsilon^\mu_y = (0, 0, 1, 0) \\ \varepsilon^\mu_z = (0, 0, 0, 1) \end{cases}$$

z方向へboostすると

$$(110)\quad \begin{cases} \varepsilon^\mu(k, \lambda=\pm) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mp\varepsilon^\mu(k,x) - i\varepsilon^\mu(k,y)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, \mp 1, -i, 0) \quad \cdots \text{不変} \\ \varepsilon^\mu(k, \lambda=0) = \varepsilon^\mu(k,z) = \gamma(\beta, 0, 0, 1) \end{cases}$$

Polarization sum は、rest frame ではすぐにわかり、

$$(111)\quad \sum_\lambda \varepsilon^\mu(k,\lambda)\varepsilon^\nu(k,\lambda)^* = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \underline{-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}}$$

右はしの表式は共変的なので任意のフレームで成立する。Propagator は

$$(112)\quad \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \underline{\frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\left(-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{m^2}\right)}$$

この表示は、ユニタリティーが明らかなので、ユニタリーゲージと呼ぶ。

一方、〜〜〜部が $k\to\infty$ で constant であるため、くり込みができない(後述)。

自発的対称性の破れによって質量をもつゲージボソンの場合、散乱振幅のゲージ不変性により、くり込み可能なゲージ、例えば $(-g^{\mu\nu})$ だけのゲージ(Feynmanゲージ)で計算ができる。ユニタリティーは、$(k^\mu k^\nu/m^2)$ に対応する成分が、南部Goldstonボソンの寄与として現れる為に満たされる。//

Dirac 方程式.

Dirac 方程式は スピン$\frac{1}{2}$の粒子の運動方程式 なので. 少なくとも2成分必要だ. 実際には(質量がゼロで無ければ) 4成分が Lorentz 変換のもとで変換する. 質量ゼロの極限(高エネルギー極限)で, カイラリティーによって二成分に分離される ので, 4成分のDiracフェルミオンを カイラリティーが +(R)と−(L), ヘリシティーが +(R)と−(L)の4成分で表示する。まず, Dirac に従い, 一次の微分方程式を求める;

$$(113)\quad [\partial^\mu\partial_\mu + m^2]\psi = [i\gamma^\nu\partial_\nu + m][-i\gamma^\mu\partial_\mu + m]\psi = 0$$
$$= [\gamma^\nu\gamma^\mu\partial_\nu\partial_\mu + m^2]\psi$$
$$= [\gamma^\nu\gamma^\mu \frac{\partial_\nu\partial_\mu + \partial_\mu\partial_\nu}{2} + m^2]\psi$$

(113)式が成立するのは

$$(114)\quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

のときである. カイラル表現(HELAS convention)をとると.

$$(115)\quad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_\pm^\mu = (1, \pm\sigma^i)$$

$$(116)\quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\nu \\ \sigma_-^\nu & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_+^\mu\sigma_-^\nu + \sigma_+^\nu\sigma_-^\mu & 0 \\ 0 & \sigma_-^\mu\sigma_+^\nu + \sigma_-^\nu\sigma_+^\mu \end{pmatrix}$$

$$(117)\quad \gamma^0\gamma^0 + \gamma^0\gamma^0 = 2\gamma^0\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1\cdot1+1\cdot1 & 0 \\ 0 & 1\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix} = 2 \qquad (\gamma^0)^2 = 1$$

$$\gamma^i\gamma^i + \gamma^i\gamma^i = 2\gamma^i\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i(-\sigma^i)\times2 & \\ & (-\sigma^i)(\sigma^i)\times2 \end{pmatrix} = -2 \qquad (\gamma^i)^2 = 1$$

(118) $\gamma^0\gamma^i + \gamma^i\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1(-\sigma^i) + (\sigma^i)\cdot 1 & \\ 0 & 1\cdot(+\sigma^i) + (-\sigma^i)\cdot 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\gamma^i\gamma^j + \gamma^j\gamma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i(-\sigma^j) + \sigma^j(-\sigma^i) & 0 \\ 0 & (-\sigma^i)(\sigma^j) + (-\sigma^j)(\sigma^i) \end{pmatrix} = i\begin{pmatrix} -\sigma^k + \sigma^k & 0 \\ 0 & -\sigma^k + \sigma^k \end{pmatrix} = 0$$

(117), (118) により, (115) は (114) を満たす表式である. この表式の利点は

(119) $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{pmatrix}$

$$= i\begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^1\sigma^2\sigma^3 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1\sigma^2\sigma^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i\sigma^1(i\sigma^1) & 0 \\ 0 & (-i\sigma^1)(i\sigma^1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(120) $P_L \equiv P_- = \frac{1-\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ L カイラリティー

$P_R \equiv P_+ = \frac{1+\gamma_5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ R カイラリティー

の projection

(130) $P_L\psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_R\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_+ \end{pmatrix}$ $\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_- \\ \psi_+ \end{pmatrix}$ ← 上2つがカイラリティー ⊖ ← 下 〃 ⊕

まずは momentum space の free spinor を求める: λ を helicity として. (HELAS に従い, 2倍のヘリシティー, λ=± ととります)

(131) $(p^\mu\gamma_\mu - m)\,u(p,\lambda) = 0$

(132) $\begin{pmatrix} -m & p^\mu\sigma_{+\mu} \\ p^\mu\sigma_{-\mu} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\not p)_+\, u(p,\lambda)_+ = m\, u(p,\lambda)_- \\ (\not p)_-\, u(p,\lambda)_- = m\, u(p,\lambda)_+ \end{cases}$

(133) $\begin{cases} [p^0 - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\, u(p,\lambda)_+ = m\, u(p,\lambda)_- \\ [p^0 + \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma}]\, u(p,\lambda)_- = m\, u(p,\lambda)_+ \end{cases}$ 但し $p^0 = E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$

(133) 式は、ヘリシティーの固有スピノール (λ は ± 1)

(134) $\dfrac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|}\chi_\lambda = \lambda \chi_\lambda$ 　　($\sigma = 2J$ なので $\lambda = \pm 1$)

を用いて、normalization 以外が定まる。

(135) $u(p,\lambda)_\alpha = \omega(\alpha,\lambda)\chi_\lambda$ 　　($\alpha = \pm, \lambda = \pm$)

とおくと、(130) は、

(136) $\begin{cases} (E - |P|\lambda)\,\omega(+,\lambda) = m\,\omega(-,\lambda) \\ (E + |P|\lambda)\,\omega(-,\lambda) = m\,\omega(+,\lambda) \end{cases}$

(137) $\omega(\pm,\lambda) = \sqrt{E \pm \lambda|P|}$ 　　又は $\omega(\alpha,\lambda) = \sqrt{E + \alpha\lambda|P|}$

(138) $u(p,\lambda)_\pm = \sqrt{E \pm \lambda|P|}\,\chi_\lambda$ 　　又は $u(p,\lambda)_\alpha = \sqrt{E + \alpha\lambda|P|}\,\chi_\lambda$

(138) 式より、high-energy (massless fermion) の selection rule :

(139) $u(p,\lambda)_\alpha \xrightarrow{E \gg m} \delta_{\alpha\lambda}\sqrt{2E}\,\chi_\lambda$ 　　(カイラリティー＝ヘリシティー)

が導かれる。(139) 式のため、高エネルギー現象の記述にはカイラル表示が適している。

次に (134) 式の解を求める：

(140) $\mathbb{P} = |P|(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$

とすると

(141) $\dfrac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|} = \sin\theta\cos\phi\,\sigma^1 + \sin\theta\sin\phi\,\sigma^2 + \cos\theta\,\sigma^3 = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\phi} \\ \sin\theta\, e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$

固有ベクトルは簡単に求まる。HELASでは

(142) $$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

(143) $$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ (\sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\frac{\theta}{2}) \\ \sin(\theta-\frac{\theta}{2}) e^{i\phi} \end{pmatrix} = \chi_+$$

χ_- は χ_+ で $\theta \to \pi-\theta$, $\phi \to \pi+\phi$ とすれば良いが、HELASでは

(144) $$\chi_+ \Big|_{\theta\to\pi-\theta,\ \phi\to\pi+\phi} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} = -e^{i\phi} \underline{\begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}} = -e^{i\phi}\chi_-$$

(145) $$\chi_- = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(142)と(145)の phase convention は charge-conjugation の関係式

(146) $$\chi_+ = i\sigma^2 (\chi_-)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

を満たす。(右巻き fermion は左巻き fermion の反粒子として作られる。)

u スピノールは (138), (142), (145) で完全に定まった。

v スピノールは charge-conjugation によって求める。(この位相 convention は、Majorana fermion があったり、u-スピノールと v-スピノールが干渉する時には重要です。)

(147) $$v = C\bar{u}^T = i\gamma^2\gamma^0 (u^\dagger\gamma^0)^T = i\gamma^2\gamma^0\gamma^{0T} u^* = i\gamma^2 u^* = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ -i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} u^*$$

(148) $$\begin{pmatrix} v(p,\lambda)_- \\ v(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sigma^2 u_+^*(p,\lambda) \\ -i\sigma^2 u_-^*(p,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E+\lambda|p|}\ i\sigma^2 \chi_\lambda^* \\ \sqrt{E-\lambda|p|}\ (-i\sigma^2) \chi_\lambda^* \end{pmatrix}$$

(146) と同様

(149) $i\sigma^2(\chi_+)^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -\chi_-$

(146) と (149) を合わせて.

(150) $i\sigma^2(\chi_\lambda)^* = -\lambda\,\chi_{-\lambda}$

(150) を (145) に代入すると

(151) $v(p,\lambda)_\pm = \pm\lambda\sqrt{E\mp\lambda|p|}\,\chi_{-\lambda}$ 又は $v(p,\lambda)_\alpha = \alpha\lambda\sqrt{E-\alpha\lambda|p|}\,\chi_{-\lambda}$

(138) と (151) で完成です。(139) に対応する H.E. limit は

(152) $v(p,\lambda)_\alpha \xrightarrow{E\gg m} \delta_{\alpha,-\lambda}(-\sqrt{2E}\,)\chi_{-\lambda}$ (反粒子のヘリシティー = ーカイラリティー)

Normalization:

(153) $\overline{u}(p,\lambda)u(p,\lambda) = (u(p,\lambda)_-^\dagger, u(p,\lambda)_+^\dagger)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix}$

$$= u(p,\lambda)_-^\dagger u(p,\lambda)_+ + u(p,\lambda)_+^\dagger u(p,\lambda)_-$$
$$= \sqrt{E-\lambda|p|}\sqrt{E+\lambda|p|}\,\underbrace{\chi_\lambda^\dagger\chi_\lambda}_{=1} + \sqrt{E+\lambda|p|}\sqrt{E-\lambda|p|}\,\underbrace{\chi_\lambda^\dagger\chi_\lambda}_{=1}$$
$$= 2m$$

(154) $\overline{v}(p,\lambda)v(p,\lambda) = v(p,\lambda)_-^\dagger v(p,\lambda)_+ + v(p,\lambda)_+^\dagger v(p,\lambda)_-$

$$= \left[(-\lambda)\sqrt{E+\lambda|p|}\,(\lambda)\sqrt{E-\lambda|p|} + \lambda\sqrt{E\pm\lambda|p|}\,(-\lambda)\sqrt{E+\lambda|p|}\right]\chi_{-\lambda}^\dagger\chi_{-\lambda}$$
$$= -2m$$

Projectors:

(155) $\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- \\ u(p,\lambda)_+ \end{pmatrix} (u(p,\lambda)_+^\dagger, u(p,\lambda)_-^\dagger)$

$$= \sum_\lambda \begin{pmatrix} u(p,\lambda)_- u(p,\lambda)_+^\dagger & u(p,\lambda)_- u(p,\lambda)_-^\dagger \\ u(p,\lambda)_+ u(p,\lambda)_+^\dagger & u(p,\lambda)_+ u(p,\lambda)_-^\dagger \end{pmatrix}$$

$$= \sum_\lambda \begin{pmatrix} \sqrt{E-\lambda|p|}\sqrt{E+\lambda|p|}\,\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger & (E-\lambda|p|)\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger \\ (E+\lambda|p|)\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger & \sqrt{E+\lambda|p|}\sqrt{E-\lambda|p|}\,\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger \end{pmatrix}$$

(156) $\sum_\lambda \chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} (\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi}) + \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\phi} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} (-\sin\frac{\theta}{2}e^{i\phi}, \cos\frac{\theta}{2})$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(157) $\sum_\lambda \lambda\chi_\lambda\chi_\lambda^\dagger = \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & \frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ \frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{1}{2}\sin\theta e^{-i\phi} \\ -\frac{1}{2}\sin\theta e^{i\phi} & \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|}$$

(156) と (157) を (155) に代入すると.

(158) $\sum_\lambda u(p,\lambda)\bar{u}(p,\lambda) = \begin{pmatrix} m & E-|P|\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|} \\ E+|P|\frac{\mathbb{P}\cdot\sigma}{|P|} & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & E-\mathbb{P}\cdot\sigma \\ E+\mathbb{P}\cdot\sigma & m \end{pmatrix}$

$$= m + p_\mu \begin{pmatrix} 0 & \sigma_+^\mu \\ \sigma_-^\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$= m + \not{p}$$

(159) $\sum_\lambda v(p,\lambda)\bar{v}(p,\lambda) = \sum_\lambda \begin{pmatrix} -m\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger & (E+\lambda|P|)\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger \\ (E-\lambda|P|)\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger & -m\chi_{-\lambda}\chi_{-\lambda}^\dagger \end{pmatrix}$

$$= -m + \not{p}$$

ここまでで、振幅を計算するための準備はほぼできたと思うのですが、

自由Dirac場の方程式と、量子化とを簡単に復習します。

まず古典場のLagrangianは

(160) $$\mathcal{L} = \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = -(\partial^\mu\overline{\psi})i\gamma_\mu\psi - m\overline{\psi}\psi$$

運動方程式は

(161) $$\begin{cases} \partial^\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\psi} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} = \partial^\mu\overline{\psi}(i\gamma_\mu) + m\overline{\psi} = \overline{\psi}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m) = 0 \\ \partial^\mu \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\overline{\psi}} - \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\overline{\psi}} = \partial^\mu(-i\gamma_\mu\psi) + m\psi = (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\psi = 0 \end{cases}$$

Checkとして

(162) $$\begin{cases} (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\, u(p,\lambda)e^{-ip\cdot x}\Big|_{p^0=E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \\ \qquad = (-p\!\!\!/ + m)u(p,\lambda)e^{-ipx} \\ \qquad = 0 \\ (-i\overrightarrow{\partial\!\!\!/} + m)\, v(p,\lambda)e^{ipx}\Big|_{p^0=E=\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}} \end{cases}$$

$$= (p\!\!\!/ + m)v(p,\lambda)e^{ipx}$$
$$= 0$$

ここで突然量子化します。

(163) $$\begin{cases} \psi(x) = \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a_{\mathbf{k},\lambda}u(k,\lambda)e^{-ikx} + b^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}v(k,\lambda)e^{ikx} \right\} \\ \overline{\psi}(x) = \displaystyle\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_\lambda \left\{ a^\dagger_{\mathbf{k},\lambda}\overline{u}(k,\lambda)e^{ikx} + b_{\mathbf{k},\lambda}\overline{v}(k,\lambda)e^{-ikx} \right\} \end{cases}$$

量子化条件は

$$(164)\begin{cases}\{a_{k,\lambda}, a^\dagger_{k',\lambda'}\} = \{b_{k,\lambda}, b^\dagger_{k,\lambda}\} = 2E(2\pi)^3\delta^3(k-k')\delta_{\lambda\lambda'} \\ \{a_{k,\lambda}, a_{k',\lambda'}\} = \{a_{k,\lambda}, b_{k,\lambda}\} = \{a_{k,\lambda}, b^\dagger_{k,\lambda}\} = \cdots = 0\end{cases}$$

反交換関係(164)は共変な規格化（2E倍）されていることに注意して下さい。

「スピン半整数粒子はフェルミ統計に従う」ことの説明はスキップします。

「超対称性」で満足していただけるのなら、いつか講義をいたします。

ここでは、(164)で良いことを確認します。Hamiltonianは

$$(165)\quad \mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi}\partial^0\psi - g^{00}\mathcal{L}$$
$$= \bar{\psi}(i\gamma_0)\partial^0\psi - \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi$$
$$= \bar{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + m)\psi$$

$$(166)\quad H = \int d^3x\, \mathcal{H}$$
$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\lambda'} \left\{a^\dagger_{k',\lambda'}\bar{u}(k',\lambda')e^{ik'x} + b_{k',\lambda'}\bar{v}(k',\lambda')e^{-ik'x}\right\}$$
$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + m)\sum_\lambda \left\{a_{k,\lambda}u(k,\lambda)e^{-ikx} + b^\dagger_{k,\lambda}v(k,\lambda)e^{ikx}\right\}$$

$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + m)u(k,\lambda)e^{-ikx} = (\gamma^i k^i + m)u(k,\lambda)e^{-ikx} = \gamma^0 E\, u(k,\lambda)e^{-ikx}$$

$$(-i\gamma^i\frac{\partial}{\partial x^i} + m)v(k,\lambda)e^{ikx} = (-\gamma^i k^i + m)v(k,\lambda)e^{ikx} = -\gamma^0 E\, v(k,\lambda)e^{ikx}$$

$$= \int d^3x \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'} \int \frac{d^3k\, E}{(2\pi)^3 2E} \sum_{\lambda,\lambda'} \left\{a^\dagger_{k',\lambda'}u^\dagger(k',\lambda')e^{ik'x} + b_{k',\lambda'}v^\dagger(k',\lambda')e^{-ik'x}\right\}$$
$$\times \left\{a_{k,\lambda}u(k,\lambda)e^{-ikx} - b^\dagger_{k,\lambda}v(k,\lambda)e^{ikx}\right\}$$

続けて

$$(167)\quad H=\int\frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2E'}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E}E\sum_{\lambda,\lambda'}\Big\{a^\dagger_{k',\lambda'}a_{k,\lambda}u^\dagger(k',\lambda')u(k,\lambda)e^{i(E'-E)x^0}(2\pi)^3\delta^3(k-k')$$

$$-b_{k',\lambda'}b^\dagger_{k,\lambda}v^\dagger(k',\lambda')v(k,\lambda)e^{-i(E'-E)x^0}(2\pi)^3\delta^3(k-k')$$

$$-a^\dagger_{k',\lambda'}b^\dagger_{k,\lambda}u^\dagger(k',\lambda')v(k,\lambda)e^{i(E+E')x^0}(2\pi)^3\delta^3(k+k')$$

$$+b_{k',\lambda'}a_{k,\lambda}v^\dagger(k',\lambda')u(k,\lambda)e^{-i(E+E')x^0}(2\pi)^3\delta^3(k+k')\Big\}$$

$$=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4E}\sum_{\lambda,\lambda'}\Big\{a^\dagger_{k,\lambda'}a_{k,\lambda}u^\dagger(k,\lambda')u(k,\lambda)-b_{k,\lambda'}b^\dagger_{k,\lambda}v^\dagger(k,\lambda')v(k,\lambda)$$

$$-a^\dagger_{-k,\lambda'}b^\dagger_{k,\lambda}u^\dagger(-k,\lambda')v(k,\lambda)e^{2iEx^0}$$

$$+b_{-k,\lambda'}a_{k,\lambda}v^\dagger(-k,\lambda')u(k,\lambda)e^{-2iEx^0}\Big\}$$

ここで次の式が必要の様ですね。

$$(168)\quad u^\dagger(k,\lambda')u(k,\lambda)=\sum_\alpha u^\dagger(k,\lambda')_\alpha u(k,\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\sqrt{E+\alpha\lambda'|k|}\sqrt{E+\alpha\lambda|k|}\underbrace{\chi^\dagger_{\lambda'}\chi_\lambda}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha(E+\alpha\lambda|k|)\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$=2E\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$v^\dagger(k,\lambda')v(k,\lambda)=\sum_\alpha v^\dagger(k,\lambda')_\alpha v(k,\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\sqrt{E-\alpha\lambda'|k|}\sqrt{E-\alpha\lambda|k|}\underbrace{\chi^\dagger_{-\lambda'}\chi_{-\lambda}}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha(E-\alpha\lambda|k|)\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$=2E\,\delta_{\lambda\lambda'}$$

$$u^\dagger(-k,\lambda')v(k,\lambda)=\sum_\alpha u(-k,\lambda')^\dagger_\alpha v(k,\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\overbrace{\sqrt{E+\alpha\lambda'|k|}\sqrt{E-\alpha\lambda|k|}}^{\alpha\lambda}\underbrace{\chi^\dagger_{-\lambda'}\chi_{-\lambda}}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha\alpha\lambda\, m\,\delta_{\lambda\lambda'}=0$$

$$v^\dagger(-k,\lambda')u(k,\lambda)=\sum_\alpha v(-k,\lambda')^\dagger_\alpha u(k,\lambda)_\alpha=\sum_\alpha\alpha\lambda\sqrt{E-\alpha\lambda'|k|}\sqrt{E+\alpha\lambda|k|}\underbrace{\chi^\dagger_{\lambda'}\chi_\lambda}_{\delta_{\lambda'\lambda}}=\sum_\alpha\alpha\lambda\, m\,\delta_{\lambda\lambda'}=0$$

これで何とかなりそうですけれど、今日は時間切れです。

来週はついにQEDとQCDに入れそうです。 //