

前回の反省

p.1 で $m_t = \underbrace{178.5}_{\text{mean}} \pm \underbrace{13.7}_{\text{stat. error}} \pm \underbrace{7.7}_{\text{sys. error}} \text{ GeV}$

のと3. stat. err. が統計誤差, sys. error が系統誤差です。

stat. error は基本的に $1/\sqrt{N_{\text{event}}}$ に比例するので、沢山の

実験をすれば、 $1/\sqrt{N_{\text{total}}} = 1/\sqrt{\sum_i N_i}$ の様に減ります。

$$x = \bar{x}_i \pm \Delta_i \text{ (stat)}$$

で、 $i=1, \dots, n$ の実験があれば全部合わせると

$$x = \bar{x} \pm \Delta \text{ (stat. error)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Delta_i^2}} \\ \bar{x} = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i^2}{\Delta_i^2} \bar{x}_i \end{array} \right.$$

となるわけです。ガウス分布の重ね合せ

$$\begin{aligned} P(x) &= \prod_{i=1}^n P_i(x) \sim \prod_{i=1}^n e^{-\frac{(x-\bar{x}_i)^2}{2\Delta_i^2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x-\bar{x}_i}{\Delta_i}\right)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{x-\bar{x}}{\Delta}\right)^2 + \chi_{\text{min}}^2 \right]} \end{aligned}$$

$$\chi_{\text{min}}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{\Delta_i}\right)^2$$

に従うわけです。 $\chi_{\text{min}}^2 \sim n$ であれば、 n 実験は統計的に無矛盾です。

sys. error はこぼはしません。例えば、もし全ての実験が同じ「もの指し」

を使っている。この「もの指し」の目盛りのエラーは全ての実験テンクに共通です。

上の例で、 n 個のデータが $x = \bar{x}_i \pm \Delta_i^{stat} \pm \Delta_i^{sys}$

となっていて、 $\Delta_i^{sys} = \Delta^{sys}$

が共通のもの指しのエラーだとしよう。この場合、全ての実験の合計は、

$$x = \bar{x} \pm \Delta^{stat} \pm \Delta^{sys}$$

となり、 \bar{x} と Δ^{stat} は統計エラーだけの場合と同じですが、当然、 Δ^{sys} は減り

ません。 $x = \bar{x} \pm \Delta_{tot}$, $\Delta_{tot} = \sqrt{(\Delta^{stat})^2 + (\Delta^{sys})^2}$

と書くと、 Δ^{stat} は $N_{tot} = \sum_{i=1}^n N_i$ の増大と共に $1/\sqrt{N_{tot}}$ で減るが

Δ^{sys} は n が増えても減ることはなりません。この「もの指し」のエラーに対応するのは、

測定のために使ったシミュレーションプログラムのエラーで、最後のエラーが、

この様なエラーにできるかぎり依存しないようにすることが、個々の実験に望まれる

ゆえです。一方、 n 個の実験が全く異なるもの指しを使い、 Δ_i^{sys} が

完全に独立 (independent) になるという極限も考えられます。この場合は、

各実験の答え $x = \bar{x}_i \pm \Delta_i^{tot}$, $\Delta_i^{tot} = \sqrt{(\Delta_i^{stat})^2 + (\Delta_i^{sys})^2}$

とし、 n 実験の総合を、 $x = \bar{x} \pm \Delta^{tot}$ } $\frac{1}{\Delta^{tot}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{(\Delta_i^{tot})^2}}$
 $\bar{x} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\Delta_i^{tot}}{\Delta^{tot}}\right)^2 \bar{x}_i$

と表せます。良「もの指し」(小さな Δ_i^{sys}) の実験結果が、より大きな

ウェイト $(\Delta^{tot}/\Delta_i^{tot})^2$ を持ちます。

p.12 で $pp(\bar{p}\bar{p}) \rightarrow Z\chi$ に関与するパートン (i と \bar{i}) の momentum

fraction を x_1 と x_2 としたときは

$$x_1, x_2 \geq \frac{m_Z^2}{s} \left\{ \begin{array}{l} \sim \left(\frac{90 \text{ GeV}}{2 \text{ TeV}}\right)^2 \sim 0.002 \\ \sim \left(\frac{90 \text{ GeV}}{14 \text{ TeV}}\right)^2 \sim 0.00004 \end{array} \right.$$

です。右向き z - μ を $P_1^\mu = (E, 0, 0, E)$
左 " " $P_2^\mu = (E, 0, 0, -E)$ } P, \bar{P} の質量を無視した。

とすると $s = (P_1 + P_2)^2 = (E+E)^2 - (E-E)^2 = 4E^2$

パートンの 4 運動量を $p_1^\mu = x_1 P_1^\mu$, $p_2^\mu = x_2 P_2^\mu$ とすると、
パートン-パートン系の不変質量 \hat{s} は

$$\hat{s} = (p_1 + p_2)^2 = (x_1 P_1 + x_2 P_2)^2 = 2x_1 x_2 P_1 \cdot P_2 = x_1 x_2 (P_1 + P_2)^2 = x_1 x_2 s$$

です。 $\hat{s} \geq m_Z^2$ のときに Z が生成されます。 Z の生成断面積は

$$\frac{E d\sigma}{d^3p} = \frac{E}{dp_z} \frac{d\sigma}{d^2p_T} = \frac{d\sigma}{dy p_T dp_T d\phi} = \frac{d\sigma}{\pi dy dp_T^2} \equiv \frac{1}{\pi} f(y, p_T^2)$$

の様には 2 変数, $y = \frac{1}{2} \ln \frac{E + p_z}{E - p_z}$, $p_T^2 = (p_x)^2 + (p_y)^2$
に依存します。この y, p_T^2 分布, $f(y, p_T^2)$ を予言することは、

P-QCD の最大の目標の一つです。これがどんなに困難なことであるかを
この講義で明らかにしたいと思います。例え Tevatron の $p\bar{p} \rightarrow t\bar{t} + \text{hadrons}$ であっても、
LHC の実験に携う方は、P-QCD の予言が大きく与えられる可解性を賞賛し、
P-QCD の不確実性により、予想されるすれと、新しい物理によるすれとを
判別できるようにしたい。 (* $dy = \frac{dp_z}{E}$ を証明せよ)

更に, $pp(p\bar{p}) \rightarrow Z + X$

過程の Z の phase space は (y, p_T) で指定されることが、 (y, p_T) の

適当な領域, $Y_0 - \Delta Y \leq Y \leq Y_0 + \Delta Y$ のイベントを集め、
 $p_T^0 - \Delta p_T \leq p_T \leq p_T^0 + \Delta p_T$

全てのハドロンに対して Jet-clustering algorithm を適用すると。

$pp(p\bar{p}) \rightarrow Z + X$

事象は. $pp(p\bar{p}) \rightarrow Z + 0 \text{ jets}$
 $+ 1 \text{ jets}$
 $+ 2 \text{ jets}$
 $+ 3 \text{ jets}$
 $+ \dots$

の和となるはずですが。P-QCD に基づくシミュレーションプログラムの目標は、

これらの全てのジェット事象の微分断面積、

$$d\sigma(pp, p\bar{p} \rightarrow Z + n \text{ jets}) \quad ; n=0, 1, 2, \dots$$

の大きさと分布ができる限り P-QCD の書面に忠実なものとする事です。

これは更に困難なことであり、現在進行中の努力を、この講義の最後に説明したいと思っています。今は、この断面積が

Jet-clustering algorithm の詳細

Jet の定義 ($\Delta R, E_T^{\min}$)

に強く依存し、且つ、上の詳細が 一定のループに従ったものである場合 へのみ、

P-QCD に基づいた計算 (つまり、我々の最高のシミュレーションプログラムの

予言) が、その大体の傾向が、信頼できる (た) と... コレを
理解して欲し... と思... います。
よって
 (可能性がある)

この一定のルール の基本が

「ソフト、コリネアーな分解を区別しない」 ... ①

という KLN 定理に帰着するわけですが。この上に、P-QCD を
使うことの代償として、

「振動展開の収束性を損ねない」 ... ②

ための多くの「定量化 (にくい) ルール」がつけ加わります。
あらかじめリストアップしておくに...

心構えとしては、これらの「ルール」を全て満たす分布で、且つ「新しい物理による
汚染」の少ない事象について、その断面積と分布とが合うように P-QCD
シミュレーションプログラムをチューニングし、それを用いて、新しい物理を探索する
という手順を思い描くのが良いと思... います。

例えば、P-QCD の収束性の条件として、 ΔR が余り小さくないこと、

$E_T^{\min} / p_T^{Z\text{-boson}}$ が余り小さくないこと、等があります。この条件を満たしている

とまだけ、 $Z+n\text{-jet}$ のプログラムをデータを使って修正 (tune) できます。

一方、新しい物理は $Z+S\text{-jet}$ を予言するが、 $S\text{-jet}$ は ΔR が充分小さく

ないとは別でできたのかも知りません。その場合は、シミュレーションプログラム

を本来信用できる領域で使い分けなければならぬのかも知りません。

ΔR を大きくして、 $Z+4jet$, $Z+3jet$ にしたときの P-QCD との比較は役に立つかも知れませんが、 ΔR が小さい時の P-QCD の発言の中には信用できる部分（「かきく定義されたジェットツェイフ」等）があること、

それにより、「新しい物理による汚染」の無いデータは、一定のルールに従って処理をすれば P-QCD の計算不能な高次効果を含んでいるはずであることを利用して、データをうまく使った解析もできるに違いありません。このときの「一定のルール」を理解することか、P-QCD を理解することだ、と思えます。

p.10 ~ p.11 で、 E_T^{jet} の calibration には $pp \rightarrow j_1 j_2 X$ 等の
 $\rightarrow Z j X$

high P_T の QCD-jet を用いるより他は無いかも知れないと書きましたが、

$$\begin{array}{c}
 pp \rightarrow t \bar{t} X \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 b W^+ \quad \bar{b} W^- \\
 \swarrow \quad \searrow \\
 t \bar{t} \quad j_1 j_2
 \end{array}$$

事象を純粋に集めることができれば、 $W^+ \rightarrow j_1 j_2$ が、良く理解されて

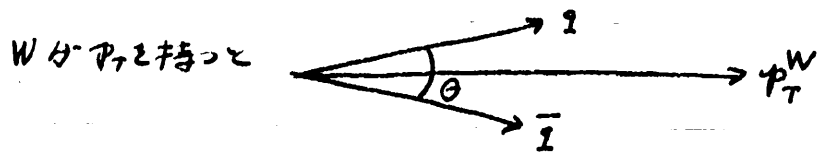
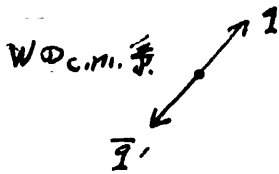
いる W崩壊のジェットと一致することを要請して calibration が可能です。

サニゾルの純度 (purity) の評価、spectator jet の寄与等の難し...

評価が含まれるので、時間をかけて改良していくことになるでしょう。

ここでちょっと練習。 $W \rightarrow j_1 j_2$ は 2jet に見えるのですが、

$\Delta R = 0.3$ で全ての $W \rightarrow \text{hadrons}$ が 1jet になり、ほぼ P_T があります。



$$\frac{\theta}{2} \approx \frac{m_W/2}{P_T^W/2}$$

$$\theta \approx \frac{2m_W}{P_T^W} < 0.3$$

$$\Rightarrow P_T^W \gtrsim \frac{2m_W}{0.3} \approx 500 \text{ GeV}$$

つまり、 $P_T > 500 \text{ GeV}$ の $W \rightarrow \text{hadrons}$ はほぼ全て 1jet となり、typical な

QCD-jet に較べて「ハード (平均のハドロンエネルギーが高い)、細い、 $\langle n_{ch} \rangle$ が小さい」

等の特徴を持つものになります。違いはわかるでしょう。これより充分低い

P_T をもつ W がゆがんで 2-jet となり、 m_W の評価等ができるようになります。

上で、high P_T の W -jet と通常の P -QCD jet の違いは少なかった

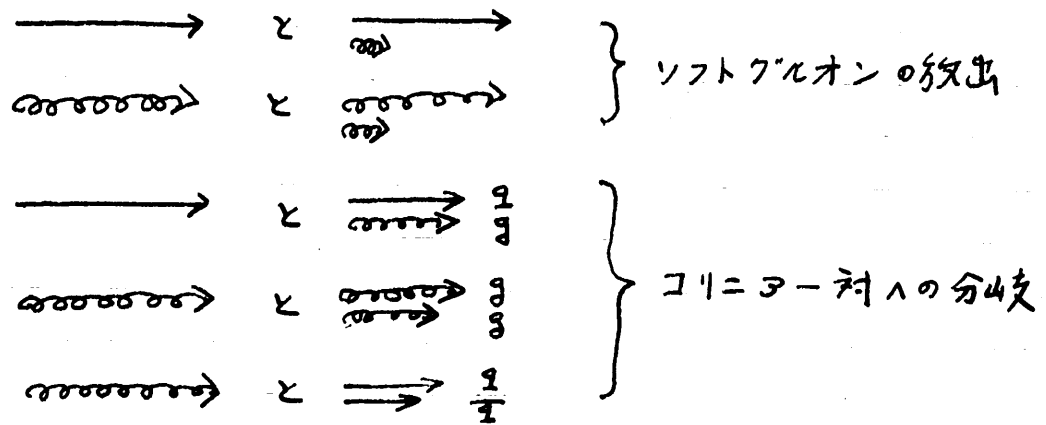
た33と書きましたが、 $P_T > 2-3 \text{ TeV}$ になっただけで分違いかも

知りません。現在の P -QCD シミュレータは余り信用できないことを念頭に

おいた上で、比較をしてみたい。 //

P-QCD ジェットの復習 (p.19 ~ p.24)

P-QCD による クォーク・グルオン生成断面積は、



を区別しない量 (ジェット断面積) に対しては、LD (長距離) の物理への依存性が $\frac{1}{\text{全エネルギー}}$ で抑えられる。SD (短距離) の物理で決定される。これらの量は、QCD の有効結合 $\alpha_s(Q)$ が SD で (large Q で) 小さくなることにより、 $\alpha_s(Q)$ の展開 (QCD摂動論 = P-QCD) による近似が可算となる。

ここで一番重要なのは、P-QCD のジェット断面積は、

クォーク・グルオンが最終的にハドロンになるかどうかには全く依存せずに決定されることです。 $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{hadrons}$ の全断面積と全く同じです。

クォーク・グルオンがハドロンになる物理は LD の物理なので、充分高い全エネルギーで、正しく定義されたジェット断面積は、クォーク・グルオンの理論 (P-QCD) でもハドロンの理論 (QCD = 実験) でも同じになるはずです。

ですから、P-QCD ジェットの断面積、分布と、実際のデータとの比較は、本来、シミュレーションプログラムの介在無しに行うべきものです。

歴史的な理由で (P-QCD ができるはるか前にジェット現象が見つかり、その現象論的理解の枠組としてクォーク、グルオンジェット模型が使われ、それが一定の役割を果たしたために)、この点か不明瞭となり、多くの誤解が生まれたようです。最近のシミュレーションプログラムでは、できるだけ小さなエネルギースケール (Q_0) まで P-QCD 的、なクォーク、グルオンのソフトを発生させ、 Q_0 のスケール (LD) でクォーク、グルオン系をハドロン系に置き換えることで、ハドロン事象をシミュレートしようとしています。最終的なハドロン分布は、 Q_0 の選ぶ方やハドロン系の選ぶ方の詳細 (LD の物理) に依存するので、沢山のパラメータを使って再現性を高くします。一方、P-QCD のジェット断面積は、 Q_0 にもハドロン系の選ぶ方にも一切依存しないはずなのですが、この点は低エネルギーの実験では良く分かりませんでした。現在準備されている P-QCD シミュレータでは、多ジェット生成過程 (3, 4, 5, 6 ジェット) のジェット間相関等の観測量が P-QCD の (量子力学的な) 予言に合うようなものにしようと努力しているようです。

場の量子論 (Quantum Field Theory) の基礎

P-QCD は QFT の一つなので、QFT の基礎をある程度理解しておくことが必要です。素粒子の全ての相互作用 (多分、重力によるものを除いて) が QFT に従うので、素粒子の物理学を研究するためには、QFT が必要です。図式的には

量子力学
特殊相対性理論 } \Rightarrow 場の量子論 (QFT)

となります。相対論的エネルギー ($E > mc^2$) の粒子の量子力学を作ろうとすると、粒子・反粒子の対生成が起るので、時空の任意の点で粒子の生成・消滅が可能で理論が必要で、これが、マクスウェルの電磁場を含む古典的 (且つ相対論的) 場の理論を量子化して得られたわけです。得られた理論が、量子力学と相対論を再現するためには、

- ✓ 相互作用が ^{時空の}一点で起きる。
- ✓ 全ての粒子に反粒子があり、その質量、スピンの等しい。
- ✓ スピン整数の粒子はボース統計、半整数の粒子はフェルミ統計
- ✓ 例え低エネルギーであっても、 $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar$ で許される短時間、高エネルギー粒子の生成・消滅が起き、その効果は超高エネルギーの物理のヒントを与える。

等の要請を満たさなければなりません。最後の文は、いわゆる「発散の困難」を「くり込み群」の言葉で言い換えたものです。摂動的な場の量子論は、まず、相互作用を1つの自由な場の運動方程式を解き、相互作用の効果を摂動として逐次評価するわけですが、この過程で上の全ての条件を調べる事ができます。

QFTはとても奥が深く、且つ、教居の高い理論なので、この講義の中で解説することはとてもできません。ここでは最小限の(それ以下かも知れません)覚えておく便利な項目だけを復習しようと思います。

まず、場としては

スピン0粒子の場(スカラー場) $\phi(x)$ $\left\{ \begin{array}{l} \phi^*(x) = \phi(x) \dots \text{実場} \\ \phi^*(x) \neq \phi(x) \dots \text{複素場 (2\(\gamma\))} \end{array} \right.$

スピン $\frac{1}{2}$ 粒子の場(Dirac場) $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$ $\left. \begin{array}{l} \text{質量がゼロだと、右巻きと} \\ \text{左巻きが分離し、それぞれ2成分} \end{array} \right\}$ $\left. \begin{array}{l} \text{4個の複素場が} \\ \text{1セットで Lorentz} \\ \text{変換をする。} \end{array} \right.$

スピン1粒子の場(ゲージ場) $A^\mu(x) = (A^0(x), A^1(x), A^2(x), A^3(x))$
 4個の実場か、1セットとして Lorentz 変換のもとでベクトルのように変換する。質量ゼロの場合、 ± 0 内2成分(ハジター+と-、右巻きと左巻き)だけが物理的なので、ゲージ変換の自由度を持つ。

$\phi(x)$

調和振動子

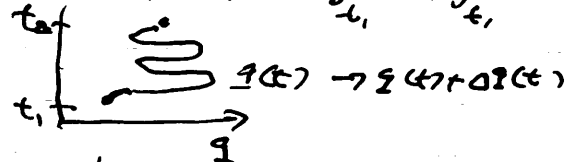
自由な実スカラー場のラグランジアン密度

$$(1) \quad \mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi(x))(\partial^\mu \phi(x)) - \frac{m^2}{2}(\phi(x))^2 \quad x^\mu = (t, x, y, z)$$

$$(2) \quad L(t) = \int \mathcal{L}(x) d^3x \quad \text{ラグランジアン} \quad L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x)$$

$$(3) \quad I(t_2, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = \int \mathcal{L}(x) d^4x \quad \text{作用積分} \quad \int_{t_1}^{t_2} dt L = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x) \right]$$

運動方程式



$$(4) \quad t_1 < t < t_2 \quad \phi(x) \rightarrow \phi(x) + \delta\phi(x) \quad \text{のとき} \quad I(t_2, t_1) \text{ が不変}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} \delta I &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\mu (\delta\phi) \right] \quad \dots x \text{ は変化しないので} \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \left(\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right) \delta\phi + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \cdot \delta\phi \right) \right] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \right] \delta\phi + \int_{t_1}^{t_2} d^4x \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \cdot \delta\phi \right) \end{aligned}$$

全ての $\delta\phi$ について $\delta I = 0$ であるためには表面積分 $\rightarrow (\delta\phi(\text{表面}) = 0) \rightarrow 0$

$$(6) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{dL}{dx} = 0$$

$$(7) \quad 0 = \partial_\mu \partial^\mu \phi(x) + m^2 \phi(x) = [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi(x)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = \frac{\partial V}{\partial x}}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + m^2 \right] \phi(x)$$

$$= \left[- \left(i \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + (-i\nabla)^2 + m^2 \right] \phi(x)$$

保存則

$$(8) \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

で $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ が不変なと。

$$(9) \quad \begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \delta(\partial_\mu\phi) \\ &= \partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \delta\phi}_{j^\mu(x)} \right) + \left[\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}}_0 - \partial_\mu \left(\underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi}}_0 \right) \right] \delta\phi \\ &= 0 \quad \quad \quad \hookrightarrow 0 \text{ 運動方程式} \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} \partial_\mu j^\mu(x) &= 0 \quad ; \quad j^\mu(x) = \underbrace{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \delta\phi}_{\text{カレント保存}} \\ \partial_0 j^0(x) &= \nabla \cdot \mathbf{j}(x) \end{aligned}$$

$$(11) \quad \partial_0 Q \equiv \partial_0 \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}(x)}_0 = 0 \quad \text{荷電の保存}$$

\hookrightarrow 表面項

複素スカラー場 $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$ $\phi_1(x), \phi_2(x)$ が実場の場合

$$(12) \quad \mathcal{L}(x) = (\partial_\mu \phi^*(x)) (\partial^\mu \phi(x)) - m^2 \phi^*(x) \phi(x)$$

$$(13) \quad \begin{cases} \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 & \Rightarrow [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi^*(x) = 0 \\ \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^*} = 0 & \Rightarrow [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi(x) = 0 \end{cases}$$

$$(14) \quad \phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta} \phi(x) = \phi(x) + i\theta\phi(x)$$

で \mathcal{L} が不変なので

$$(15) \quad \partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad ; \quad j^\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi} \delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\phi^*} \delta\phi^* = i \left(\phi (\partial^\mu \phi^*) - (\partial^\mu \phi) \phi^* \right) \theta$$

$$(16) \quad Q = \int (\phi \frac{\partial\phi^*}{\partial t} - \phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t}) d^3x \quad : \text{電荷} \quad \equiv i \underbrace{(\phi \overleftrightarrow{\partial} \phi^*)}_{\text{カレント}} \theta$$

時空の変換を供う不変性

(17) $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \underbrace{\Lambda^\mu_\nu}_{\text{Lorentz変換}} x^\nu + \underbrace{a^\mu}_{\text{座標原点の移動}} = x^\mu + \underbrace{\delta x^\mu}_{\text{微小変換}}$

(18) z軸のまわりの回転 $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & \sin\theta & \\ & -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \exp i\theta \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = 1 + i\theta \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} + \dots$
 $J_z = M_{12} = -M_{21}$

(19) z軸の向ききのboost $\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh\eta & \sinh\eta & & \\ & \sinh\eta & \cosh\eta & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = \exp i(-i\eta) \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} = 1 + \eta \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} + \dots$
 $= M_{03} = -M_{30}$

Lorentz変換の生成演算子 $\in M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$)

(20) と書くと $J^k = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} M^{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) は k軸の回り回転

(21) $K^k = M^{0k} = \frac{1}{2} (M^{0k} - M^{k0})$ ($k=1, 2, 3$) は k軸方向のboost

(22) $\left. \begin{aligned} [J^i, J^j] &= i \epsilon^{ijk} J^k \\ [K^i, K^j] &= -i \epsilon^{ijk} J^k \\ [J^i, K^j] &= i \epsilon^{ijk} K^k \end{aligned} \right\} \text{ Lorentz変換の代数}$

代数は、微小変換を2回くり返し、順序を換えたものを比較すれば得られます。変換をくり返したものが、また変換である(変換群)とき、代数は閉じます。

(17)の変換で \mathcal{L} が不変であれば、

(23) $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) \quad \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) = \mathcal{L} - \underbrace{(\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu}_{\text{微小変換}}$

スカラー場は Lorentz変換で不変なので、同様に

(24) $\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) \quad \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) = \phi(x) - \underbrace{(\partial_\mu \phi) \delta x^\mu}_{\text{微小変換}}$

座標原点の移動(translation) ; (17)式で $\delta x^\mu = a^\mu$ のときの保存カレントは

2005. 4. 27

$$L = \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 - V$$

 $\nu = 0, 1, 2, 3$ 方向の移動

$$(25) \quad j^\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \equiv T^{\mu\nu}(x)$$

となり、保存カレントは $\nu = 0, 1, 2, 3$ 方向の4つ: $H = \frac{dL}{dt} \dot{\phi} - L = m \dot{\phi} \dot{\phi} - (\frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 - V)$

$$(26) \quad H = \int d^3x T^{00}(x) = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right] \equiv \int d^3x \underbrace{\mathcal{H}(x)}_{\text{ハミルトン密度}} = \frac{1}{2} m \dot{\phi}^2 + V = \frac{p^2}{2m} + V$$

$$(27) \quad P^i = \int d^3x T^{0i}(x) = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \partial^i \phi \right]$$

保存量 Q (16), H (26), P^i (27) は量子化された場 $\phi(x)$ の一粒子波動関数の規格化に役立つ。

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = E \psi$$

$$\psi = e^{-iEt}$$

量子化: 場を、固有運動量 P を持つ粒子の生成・消滅演算子で展開する。

$$(28) \quad \phi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} (a_p e^{-ipx} + a_p^\dagger e^{ipx}) \quad p^0 = E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$(29) \quad [a_p, a_{p'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^3(p - p'), \quad [a_p, a_{p'}] = [a_p^\dagger, a_{p'}^\dagger] = 0$$

で (29) 式は調和振動子の生成・消滅演算子。

$$(30) \quad a_p |0\rangle = 0$$

で真空を定義すると、momentum P をもつ1粒子状態

$$(31) \quad |P\rangle = a_p^\dagger |0\rangle$$

は (29) 式

$$(32) \quad \langle P' | P \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(P - P')$$

と規格化される。 (32) を Lorentz 不変な規格化 ~~(32)式~~

$$(33) \quad \langle P | P \rangle = 2E_P (2\pi)^3 \delta^3(P-P')$$

とすために、~~交換~~ a_P を $\sqrt{2E_P}$ 倍し、交換関係⁽²⁹⁾を

$$(34) \quad [a_P, a_{P'}^\dagger] = 2E_P (2\pi)^3 \delta^3(P-P')$$

とすると、表式 (28) は

$$(35) \quad \phi(x) = \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3 2E_P} (a_P e^{-iPx} + a_P^\dagger e^{iPx})$$

と書ける。この規格化のもとで、 $Q(16)$, $H(26)$, $P^i(27)$ が一粒子状態の
粒子数、エネルギー、運動量となる。運動方程式⁽⁷⁾は

$$(36) \quad [\partial_\mu \partial^\mu + m^2] e^{\pm iPx} = [(\pm i p_\mu)(\pm i p^\mu) + m^2] e^{\pm iPx} \\ = [-p^2 + m^2] e^{\pm iPx} \\ = [-E_p^2 + p^2 + m^2] e^{\pm iPx} \\ = 0$$

$$(37) \quad \langle 0 | \phi(x) | P \rangle = \langle 0 | \int \frac{d^3K}{(2\pi)^3 2E_K} (a_K e^{-iKx} + a_K^\dagger e^{iKx}) a_P^\dagger | 0 \rangle \\ = e^{-iPx} = e^{-i(E_P t - P \cdot x)}$$

が一粒子波動関数。複素共役を

$$(38) \quad \langle P | = \langle 0 | a_P = (|P\rangle)^\dagger$$

とすると、

$$(39) \quad \langle P | \phi(x) | 0 \rangle = e^{iPx} = \langle 0 | \phi(x) | P \rangle^*$$

$$(40) \quad \phi(x)^* = \phi(x)$$

たゞで $\phi(x)$ は実スカラー場と呼ばれる。

摂動論による散乱(遷移)振幅の計算

$$(41) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$$

とし、 \mathcal{L}_0 は (1) 式、 \mathcal{L}_I は (2) 式

$$(42) \quad \mathcal{L}_I = -V_I = -\frac{\lambda}{3!} \phi(x)^3$$

とする。初状態を $|P_1, P_2\rangle = a_{P_1}^\dagger a_{P_2}^\dagger |0\rangle$ 、終状態を $|P_3, P_4\rangle = a_{P_3}^\dagger a_{P_4}^\dagger |0\rangle$

とすると、これは共に \mathcal{L}_0 の解で表わせる (35) 式。遷移振幅は、

$$(43) \quad S_{fi} = \langle P_3, P_4 | T e^{-i \int \mathcal{H}_I d^3x dt} | P_1, P_2 \rangle$$

を $\mathcal{H}_I = V_I = -\mathcal{L}_I$ の展開で解く。T は時間順序積で

$$(44) \quad \int \mathcal{H}_I d^3x = H_I$$

とすると

$$(45) \quad T e^{-i \int H_I t} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} T \prod_{k=1}^N \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} [-i H_I(t_k)] dt_k \right]$$

$\underbrace{t_{n1} > t_{n0} = t_{(n-1)} > t_{(n-2)} > \dots > t_{10} = t_1 > t_{10}}_{\substack{\rightarrow +\infty \\ \leftarrow -\infty}}$

$$= T e^{i \int \mathcal{L}_I d^4x}$$

↓
p. 80 (308)
で修正.

相互作用 (42) の例では 2 次 (λ^2) の項が S_{fi} に寄与する:

$$(46) \quad S_{fi}^{(2)} = \langle 0 | a_{P_3} a_{P_4} \frac{1}{2!} T \left[\int -\frac{i\lambda}{3!} \phi(x)^3 d^4x \right] \cdot \left[\int -\frac{i\lambda}{3!} \phi(y)^3 d^4y \right] a_{P_1}^\dagger a_{P_2}^\dagger | 0 \rangle$$

これは、上式の $\phi(x), \phi(y)$ に (35) 式の展開式を代入し、(32) の規格化された

交換関係を使、て計算できます。唯一

$$(47) \quad \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

が外線の $a_{P_1}^\dagger, a_{P_2}^\dagger, a_{P_3}, a_{P_4}$ とキャンセルせずに残ります。

$$(48) \quad \langle 0 | a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}'}^\dagger | 0 \rangle = 2E_{\mathbf{k}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

の寄与だけが残るので、(47)式は、点 y で粒子が生成され、点 x で消滅する寄与と、 ^{$(x^0 > y^0)$} その逆過程 (実粒子なので、反粒子 = 粒子) の和となります。

(48)式を使って計算すると

$$(49) \quad \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} + \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik(y-x)} \theta(y^0 - x^0)$$

$$= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[\theta(x^0 - y^0) \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} - \theta(y^0 - x^0) \frac{1}{2E_{\mathbf{k}}} e^{-ik(x-y)} \right]$$

p.47~48 に
詳しい解説を
加えました。

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)} \quad \begin{matrix} \text{Feynman Propagator} \\ \downarrow \\ \int d^3\mathbf{k} \rightarrow -\int d^3(-\mathbf{k}) \end{matrix}$$

$$\frac{i}{(k^0 - E_{\mathbf{k}} + i\epsilon)(k^0 + E_{\mathbf{k}} - i\epsilon)}$$

散乱振幅は次の様になり、

(50)

p.49 の (60), (61) 式

(51)



複素スカラー場の場合は $\phi^*(x)$ と $\phi(x)$ の展開は

$$(52) \quad \phi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a_p e^{-ipx} + b_p^\dagger e^{ipx} \right]_{p^0 = E_p = \sqrt{|p|^2 + m^2}}$$

$$\phi^*(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_p} \left[a_p^\dagger e^{ipx} + b_p e^{-ipx} \right]_{p^0 = E_p = \sqrt{|p|^2 + m^2}}$$

となります。

$$(53) \quad \left. \begin{aligned} [a_p, a_{p'}^\dagger] &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(p-p') \\ [b_p, b_{p'}^\dagger] &= 2E_p (2\pi)^3 \delta^3(p-p') \end{aligned} \right\} \text{その他は全て交換}$$

と、 $a_p |0\rangle = b_{p'} |0\rangle = 0$ で真空を決めると。

$$(54) \quad \left. \begin{aligned} |p\rangle &= a_p^\dagger |0\rangle && \text{粒子} && -\tau \\ |p'\rangle &= b_{p'}^\dagger |0\rangle && \text{反粒子} && -\tau \end{aligned} \right\} \text{の状態と考えると。}$$

(13) の運動方程式より、粒子と反粒子は同じ運動方程式に従う (同じ質量)。

Q(16) は (粒子数) - (反粒子数) となり、 $H(26)$, $P^i(28)$ は粒子と反粒子の和となる。

Feynman Propagator の形は ^{(47) と} 全く同じだ。

$$(55) \quad \langle 0 | T \phi(x) \phi^*(y) | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi^*(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi^*(y) \phi(x) | 0 \rangle$$

$$= \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ik(x-y)}$$

今度は、 ϕ -項が y で粒子が生成 x で消滅する寄与、 ϕ^* -項は x で反粒子が生成 y で消滅する寄与の和と表わされる。

質量ゼロ、実数のゲル場 (光子, グルオン) の場合

$$(56) \quad A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E_p} \sum_{\lambda=\pm 1} \left[a_{p,\lambda} \epsilon^\mu(p,\lambda) e^{-ipx} + a_{p,\lambda}^\dagger \epsilon^\mu(p,\lambda)^* e^{ipx} \right]_{p^0=E_p=|p|}$$

ここで $A^\mu(x)$ は 4成分の実場だが、物理的成分は $\lambda = \pm$ の 2つ

(ノリテ-が ± 1 , 横波成分) だけ。Feynman Propagator ϵ . この物理的成分の寄与の和と表わすと.

$$(57) \quad \langle 0 | T A^\mu(x) A^\nu(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda} \epsilon^\mu(k,\lambda) \epsilon^\nu(k,\lambda)^* e^{-ikx}$$

ここで、 k が 3軸方向を向いているとすると.

$$(58) \quad \epsilon^\mu(k,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\lambda \epsilon_x^\mu - i \epsilon_y^\mu) = (-\lambda) \frac{\epsilon_x^\mu + i \lambda \epsilon_y^\mu}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \lambda, -i, 0)$$

ここで

↳ 位相の $\lambda \rightarrow -\lambda$

$$(59) \quad \sum_{\lambda} \epsilon^\mu(k,\lambda) \epsilon^\nu(k,\lambda)^* = \epsilon_x^\mu \epsilon_x^\nu + \epsilon_y^\mu \epsilon_y^\nu = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(57) ~ (58) の式番号が重複してあるため、(59) とした。

とわかります。これを ~~metric~~ covariant に書くとすると、 k^μ の他に $n^\mu \neq 0$ のベクトルが必要で、 $n^2 = 1$ とする

$$(60) \quad \sum_{\lambda} \epsilon^\mu(k,\lambda) \epsilon^\nu(k,\lambda)^* = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{k \cdot n} - \frac{k^\mu k^\nu}{(k \cdot n)^2} \quad ; \text{axial gauge}$$

$n^\mu = (1, 0, 0, 0)$ frame で $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ とすれば、(59) はすぐには求まりません。

光子, グルオンの物理的状態だけが寄与する場合は (52) 式の様に n^μ と n^ν のベクトルが必要で、振幅 $T = M_{\mu\nu} \epsilon^\mu(k,\lambda)$ が $M_{\mu\nu} k^\mu = 0$ を満たす場合は、

(52) 式の $-g^{\mu\nu}$ 項だけが寄与すると覚えておくと下す。

Dirac 場 (スピン $\frac{1}{2}$ の粒子の場)

スピン $\frac{1}{2}$ の場合、 $J_z = \pm \frac{1}{2}$ の成分1かた1なので、2成分の場で表現できると。

実際、質量ゼロのディラック粒子は、ハジター (運動量方向のスピン $\frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}$ の固有値)

が変化しないので、2成分で表示される。ハジターが1個1かた1なので2成分になるのは、

粒子が $\lambda = +\frac{1}{2}$ なる反粒子の $\lambda = -\frac{1}{2}$ ばかりである。質量が有限だと、 $\lambda = +\frac{1}{2}$ の粒子

と $\lambda = -\frac{1}{2}$ の粒子の混合が起り、4成分場で表示される。