QCD for Collider Physics XII

2005. 10. 14

LHC実験から新しい物理を探り出すために必要な、QCDの基礎知識を実験の方々と共に学びたいと思って始めた今回の講義シリーズですが、一応、今日で区切りをつけ、少しお休みをいただきたいと思います。当初は、現在世界中のいくつものグループが精力的に取り組んでいる、LHCのためのイベントジェネレータの中身についてある程度解説がしたいと思っていたのですが、90年代からの過去15年位の期間にわたって多くの研究者が積みあげて来た蓄積が思いの他大きくて、やっと、2〜3年前までにどのような仕事がなされ、今、どのような発展が期待されるか、そして、これから、どのように解析の準備を進め、専門の研究者の方々(小平さん、栗原さん、川村さん、そしてWebberさん、Frixioneさん、Kraussさん等々)から何を学べば良いのかが、おぼろげに分かってきたところです。おぼろげですけれど、それを今日、話させていただきたいと思います。

2005.10.14

LHCの物理のシミュレータに要求されること:

① $(V, VV, VVV, t\bar{t}, t\bar{b}, H, HV, t\bar{t}H, b\bar{b}H, Hj, Hjj, jj) + nj$

$n = 0, 1, 2, 3, 4$

等のイベントを生成できること。

ここで $V = W, Z, \gamma$, j は high p_T jet (b, q, g)

SM過程さえできれば、new physics は通常簡単です。

② j の「太さ」と $p_{T_{min}}$ を決めたときに、$n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$

のイベントの生成比が概ね正しいこと。

③ $n = 0, 1, 2, 3, 4, \cdots$ を全て足し上げたときの $(\ldots) + X$ の

断面積の大きさが概ね正しいこと。

④ ③で $(\ldots)$ の系の p_T 分布が概ね正しいこと。

さらに、$n = 0$ と 1 の場合の $(\ldots)$ 系の p_T 分布も概ね正しいこと。

⑤ シグナルが $(\ldots) + mj$ (m は最小の j 数) の場合、SMバックグランド

$(\ldots) + nj$ の分布が $n = 0, 1, 2, \cdots, m+1$ まで概ね正しいこと。

⑥ 個々の j のプロファイル(ハドロンの運動量分布、数の分布等)

が現実のハドロンジェットと大きく異ることがなく、「良い」クラスター法

を用いれば、実際のジェットとの一致が期待できること。

上の条件を全てみたすシミュレータを準備できれば、あとは、その使用法に精通し、実際の観測と比較しながら tune していけば良いと思います。

一方、①〜⑥のどれが欠けても、解析（実際のLHCイベントを利用したシミュレータの改良）は大変困難になると思います。欠ける可能性が大きな部分については、あらかじめ、LHCのデータを使って補う戦術を組み立てておく必要があります。順番に検討していきましょう。

①については全く問題がありません。断面積計算プログラムがいくつもあって、相互チェックが何重にもできるでしょう。使いやすくて早いプログラムをいくつかマスターしておけばOKです。⑤に関連する、$(\nu\nu)+nj$ イベントのイベントシェイプ等が、パートン分布、因子化スケール、ジェットの定義（「太さ」、$P_{T\,min}$ 等）、くり込みスケール（α_s^n だったら、n個のくり込みスケールがとれます。$\alpha_s^n \to \alpha_s(Q_1^2)\alpha_s(Q_2^2)\cdots\alpha_s(Q_n^2)$）、等でどう変化するか、等の事前解析は絶対に必要で、そのためには早くて使いやすいプログラムが有利です。

②は決定的に重要ですが、大変難しい問題です。①で使ったパートン断面積計算プログラムを使うと、$n=0$ のときの断面積を σ^0 として、n jet は $\sigma^0 \times \alpha_s^n$ の様になりそうですが、そうはなりません。

実際に計算すると，$\sigma((\cdot\cdot)+nj)$ は jet の定義に強く依存し，例えば $n=1$ のときは $\frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{s}{p_{T\,min}^2}$ の様な振るまい．$n=2$ 以上では $\left(\ln\frac{s}{p_{T\,min}^2}\right)^n$ に加えて jet の「太さ」を R とすると $\ln\frac{1}{R}$ の様な因子がかかり，$n=0,1,2,$ と足していくと，どんどん大きな断面積になるという，おかしなことが起こります．これは，tree level の断面積計算プログラムが，ループ補正（虚輻射）を計算しないからです．例として，$e^+e^-\to\gamma^*\to(q\bar{q})+nj$ を考えると良いでしょう．実グルオン輻射だけを $n=1,2,3$ と計算すると，断面積はどんどん増えてしまうけれど（正則化しておかないと全て ∞），虚輻射補正（virtual correction）を加えると，有限となり，$\sigma_{tot}=\sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\cdots=\sigma_{tot}^{(0)}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}+\cdots\right)$ となるのでした。このとき，単純な摂動論では

$$
(815)\quad
\begin{aligned}
\sigma_0 &= \sigma_{tot}^{(0)}\left(1+\frac{\alpha_s}{\pi}A_1+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2A_2+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3A_3+\cdots\right)\\
d\sigma_1 &= \sigma_{tot}^{(0)}\left(\frac{\alpha_s}{\pi}B_1(x_1)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2B_2(x_1)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3B_3(x_1)+\cdots\right)\\
d\sigma_2 &= \sigma_{tot}^{0}\left(\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2C_2(x_1,x_2)+\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3C_3(x_1,x_2)+\cdots\right)\\
d\sigma_3 &= \sigma_{tot}^{0}\left(\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3D_3(x_1,x_2,x_3)+\cdots\right)
\end{aligned}
$$

の様に表され，A_1, A_2, A_3 は $-\infty$ の virtual 補正，$\int B_1(x_1)dx_1$，$\int C_2(x_1,x_2)dx_1dx_2$ 等は $+\infty$，「正しく」正則化しておくと，虚（ループ）と実（ツリー）の大きな補正は相殺し

(816) $\underset{1\text{-ループ}}{A_1} + \underset{\text{ツリー}}{\int B_1(x_1)dx_1} = a_1$

$\underset{2\text{-ループ}}{A_2} + \underset{1\text{ループ}}{\int B_2(x_1)dx_1} + \underset{\text{ツリー}}{\int C_2(x_1, x_2)dx_1 dx_2} = a_2$

$\underset{3\text{-ループ}}{A_3} + \underset{2\text{ループ}}{\int B_3(x_1)dx_1} + \underset{1\text{ループ}}{\int C_3(x_1, x_2)dx_1 dx_2} + \underset{\text{ツリー}}{\int D_3(x_1, x_2, x_3)dx_1 dx_2 dx_3} = a_3$

で、a_1, a_2, a_3 は有限の数になるわけです。a_1 を NLO, a_2 を NNLO, a_3 を N^3LO の補正項と呼びます。和は有限ですが、$\int d\sigma_1$, $\int d\sigma_2$, 等は全て発散していて、n-jet 断面積は議論できません。jet の「太さ」を導入して、積分を cut off してそれぞれの断面積を有限にしても、$\int d\sigma_n$ は $\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \ln^n \frac{1}{\text{太さ}}$ の様に振舞い、全断面積の規格(ユニタリティー)

(817) $\sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \cdots = \sigma_{tot} = \sigma_{tot}^{(0)}\left[1 + a_1\frac{\alpha_s}{\pi} + a_2\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + a_3\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \cdots\right]$

は再現されません。

さて、ここで p.282 (814) を MC法 (Monte Carlo法) で解いて得られる PS (Parton Shower) は、$n = 0, 1, 2, \cdots, k_{max}$ パートン生成断面積を全て有限に与え、

(818) $\sigma_{(0)} + \sigma_{(1)} + \sigma_{(2)} + \cdots + \sigma_{(k_{max})} \approx \sigma_{tot}^{(0)}$

を得ます。ここで、通常 $k_{max} \sim \frac{Q}{Q_0}$ は大きな数 ($Q_0 = 1\,\text{GeV}$ で $Q = 100\,\text{GeV}$ だったら原理的には $k_{max} \sim 100$ も可能。phase space が急激に減るので

$k > k_{max}/2$ だったら $\sigma_{(k)}/\sigma^{(0)}_{tot} \approx 0$ と思います。実際のPSジェネレータで、Q_0 と Q を動かして $\sigma_{(k)}/\sigma^{(0)}_{tot} = P_{(k)}$ の分布を調べてみてください。

(819) $$\sum_k P_{(k)} = P_{(0)} + P_{(1)} + P_{(2)} + \cdots + P_{(k_{max})} \approx 1$$

が常に成立し(ユニタリティー = 確率の保存)ますが、PS が現実のハドロンジェットの良い近似になっているかどうかは、Q/Q_0 の変化(より物理的には、Q_0 を固定して、Q を大きくしていったときに)、$P_{(k)}$ の分布がどうかわるか、それがQCDの予言(=現実)をどの位忠実に再現するか、が鍵になります。例えば

(820) $$\sum_k k P_{(k)} = \langle k \rangle$$

は生成されるパートンの平均の数ですが、これのQ依存性は、実際のハドロンの multiplicity $\langle n_h \rangle$ のQ依存性に比例しなければなりません。そのための努力については⑥で説明します。

PS は、(818)、(819) を実現するために、k-パートン生成断面積 (815) $d\sigma_k$ に重要な簡単化を行い(GL-AP方程式のLL近似)

(821) $$B_1(x_1) \approx \frac{1}{k_{1T}^2}\hat{P}(z_1)\cdot z_1$$

$$C_2(x_1,x_2) \approx \left(\frac{1}{k_{1T}^2} z_1 \hat{P}(z_1)\right)\Theta(k_{1T}^2 - k_{2T}^2)\left(\frac{1}{k_{2T}^2} z_2 \hat{P}(z_2)\right)$$

$$D_3(x_1,x_2,x_3) \approx \left(\frac{1}{k_{1T}^2} z_1 \hat{P}(z_1)\right)\Theta(k_{1T}^2 - k_{2T}^2)\left(\frac{1}{k_{2T}^2} z_2 \hat{P}(z_2)\right)\Theta(k_{2T}^2 - k_{3T}^2)\left(\frac{1}{k_{3T}^2} z_3 \hat{P}(z_3)\right)$$

これが猛烈な近似であることは、phase space dX_1, $dX_1 dX_2$, 等が

$$(822)\quad dX_1 \sim \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2E_1} \sim \frac{dk_{1\parallel}\, d^2k_{1T}}{16\pi^3 E_1} \sim \frac{dz_1 \frac{1}{2} dk_{1T}^2 d\phi_1}{16\pi^3 z_1} = \frac{1}{16\pi^2}\cdot dk_{1T}^2 \frac{dz_1}{z_1}\cdot\frac{d\phi_1}{2\pi}$$

（ここで $\frac{1}{16\pi^2}$ の因子は、matrix element の方の g_s^2 とまとめて、$\frac{\alpha_s}{4\pi}$ の因子として顕わに(815)に書かれています）の様に、$dX_1 \cdots dX_K$ は $\phi_1, \cdots, \phi_K$ の依存性を持つのに、それらが完全に無視されていること、$|M_K|^2$ が(821)の形に極端に簡略化されていることから分かります。唯一重要なことは、（後で述べる angular ordering と $\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ の変更をした上で）、(821)の分布が、全てのパートンがソフト（$z_K \ll 1$）で且つコリニアー（$k_{iT}^2 \ll Q^2$）の極限で、QCDの予言に従うと期待されることです。摂動QCDの断面積はこの極限で発散するわけですから、物理的なカットオフ（現実の世界では $\frac{1}{\Lambda}$ 程度の大きさを持つハドロンの拡がりがカットオフですが、P-QCDでは $\frac{\alpha_s}{\pi}(Q_0) \ll 1$ を保持しなければならないので $Q_0 = 1 \sim 2$ GeV のカットオフが必要です）付近の振舞いが再現され、従って、パートンの数や、数分布等の本質的なジェットの性質のQ依存性が再現されると期待できるのです。PSの方法では、カットオフ Q_0 を導入することで全ての k-パートン断面積を有限にしますが、(821)の仮定の結果、

(822)
$$\frac{\sigma_{(0)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)$$

$$\frac{\sigma_{(1)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} B_1(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}$$

$$\frac{\sigma_{(2)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} C_2(x_1,x_2)\,dx_1 dx_2 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$$
$$= \Delta(Q,Q_0)\,\frac{1}{2!}\left(\int_{Q_0} B_1(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$$

$$\frac{\sigma_{(3)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\int_{Q_0} D_3(x_1,x_2,x_3)\,dx_1 dx_2 dx_3\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3$$
$$= \Delta(Q,Q_0)\,\frac{1}{3!}\left(\int_{Q_0} B_1(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3$$

$$\cdots$$

ここで、$\Delta(Q,Q_0)$ は $k_T > Q_0$ のパートンを放出しない確率ですが、LOのGL-AP方程式の近似で、ユニタリティーから

(823)
$$1 = \frac{\sum_k \sigma_{(k)}}{\sigma^{(0)}_{tot}} = \Delta(Q,Q_0)\left\{1 + \int_{Q_0} B_1(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi} + \frac{1}{2!}\left(\int_{Q_0} B(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + \cdots\right\}$$
$$= \Delta(Q,Q_0)\,\exp\int_{Q_0} B(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}$$

(824)
$$\Delta(Q,Q_0) = \exp\left\{-\int_{Q_0} B(x_1)\,dx_1\,\frac{\alpha_s}{\pi}\right\}$$
$$= \exp\left\{-\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dk_{1T}^2}{k_{1T}^2}\int_{Q_0^2/Q^2} dz_1\,\hat{P}(z_1)\,\frac{\alpha_s(k_T^2)}{\pi}\right\}$$

(824)は p.281(811)で導入したSudakov因子です。k_T^2 序列の結果、$\frac{1}{n!}$ の因子が出ることは分かりますね。[(811)式で $\frac{dz}{z}$ は dz の誤りです。(808),(809),(810)で $\int dx'\,\delta(x'-xz)$ を誤って $\frac{1}{z}$ と書いてしまったエラーです。]
$$\underbrace{\int dx'\,\delta(x'-xz)}_{=1}$$

ここで $\Delta(Q,Q_0)$ が $P_{(k)}$ の分布、パートンの数や数分布、平均のエネルギーや k_T、拡がり等、ジェットのプロファイルを規定するので、PSの心臓で

あることが分かります。一方、もともとの LO の GL-AP 方程式から、単純に

$\Delta(Q, Q_0)$ を求めると、$\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}$ を $\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}$ で置きかえて

(825) $$\Delta(Q, Q_0)^{LO} = \exp\left\{-\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} \ln^2 \frac{Q^2}{Q_0^2}\right\}$$

の形となり、$\frac{\alpha_s}{\pi} = a$，$\ln\frac{Q^2}{Q_0^2} = L$ とおいたときに $(aL^2)^k$ の項の

足し上げとなっています。このままだと、この近似が良いのは

(826) $$a \cdot (aL^2)^k \ll 1 \quad , \quad k = 1, \cdots, k_{max}$$

のときとなり、

(827) $$aL^2 \lesssim 1$$

です。L が大きくなるので、これでは全く信頼性がありません。

もっと系統的な足し上げをしなければなりませんが、ソフト・コリニアー

領域の正則化（パートン、ジェットの定義）として適当なものを用いると、

系統的な足し上げ（exponentiation）が可能です。

(828) $$\Delta(Q, Q_0) = \exp\left\{-L f_1(aL) - f_2(aL) - a f_3(aL) - \cdots\right\} + O(a)$$

ここで $f_i(aL)$ は aL の（通常は）性質の良い関数です。$f_2(aL)$ まで

求まれば（NLL と呼びます）、誤差は

(829) $$a \ll 1$$

のときに小さくなるので、信頼性が格段に増します。いくつかの

ジェットの定義について、解析的な計算が行われていて、

(830) 例えば S. Catani, L. Trentadue, G. Turnock, B.R. Webber, NPB407, 3 (1993)
B. Bonciani, S. Catani, M.L. Mangano, P. Nason, PLB575, 268 (2003)

これらの結果を再現する様に、GL-AP 分岐の計算も改良されました。

その結果、ソフト・コリニアー領域で、次の改良をすれば良いことが分かりました。

(831a) 独立輻射の仮定を $k_{T1}^2 > k_{T2}^2 > k_{T3}^2 > \cdots > k_{Tn}^2$

ではなく、$\theta_1 > \theta_2 > \theta_3 > \cdots > \theta_n$ とする。

(831b) $\alpha_s(Q^2) \to \alpha_s(k_T^2)$ とする。更に $\alpha_s(k_T^2) = \alpha_s(\mu = \frac{k_T}{1.57})_{\overline{MS}}$

上の二つの改良をした分岐関数を用いると、LO の GL-AP 方程式から導かれる PS が、soft-collinear limit で正しいジェットの振る舞い（基本的に $\Delta(Q, Q_0)$ の振る舞い）を再現するのです。

(832) S. Catani, B.R. Webber, G. Marchesini, NPB349, 635 (1991) 他.

この改良を加えた PS は $\Delta(Q, Q_0)$ の式 (824) で、dk_T^2/k_T^2 を $d\theta/\theta$ に置き換え、且つ、α_s を $\alpha_s(\mu = \frac{k_T}{1.57})_{\overline{MS}}$ と置いております。

$\alpha_s(\mu)$ のスケールが定ったことにより、ジェットのソフト・コリニアー領域のプロファイルが、基本パラメータ $\alpha_s(m_Z)_{\overline{MS}}$ の大きさによって定まることになります。このことを利用して、TRISTAN, LEP のジェットの形の解析（T~1

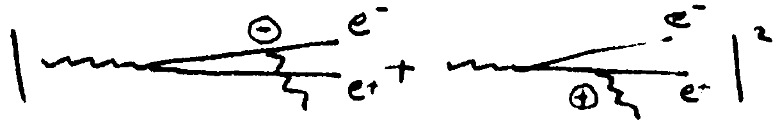
附近での $d\sigma/dT$ など）から $\alpha_s(m_Z)_{\overline{MS}}$ を求める試みがなされましたが、$T\sim1$ 附近では LEP エネルギーでさえ、非摂動効果が無視できないようで、「大体良さそうだ」という感触です。Tevatron や LHC でのより高エネルギーのジェットの形は、より明瞭に P-QCD の予言と一致するだろうと思います。

角度オーダリングは、QED の $\gamma \to e^+e^- \to e^+e^-\gamma$ 輻射の例が一番顕著です。下図で

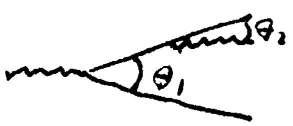
(832) 

$\theta_1 < \theta_2$

とすると、二つの振幅

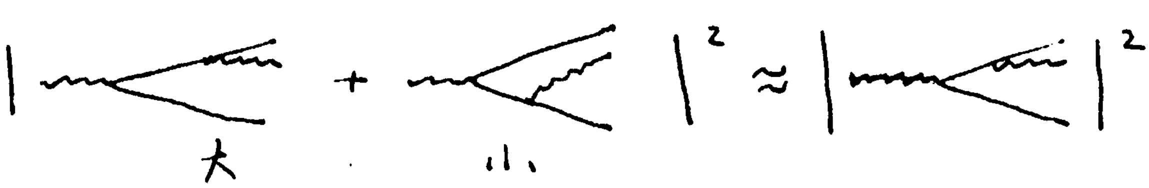
(833) 

が相殺し、振幅は消えてしまいます。一方

(834) 

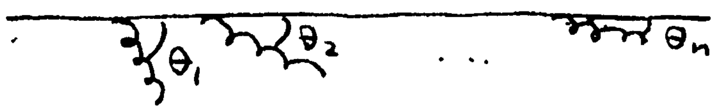
$\theta_1 > \theta_2$

の場合は

(835) 

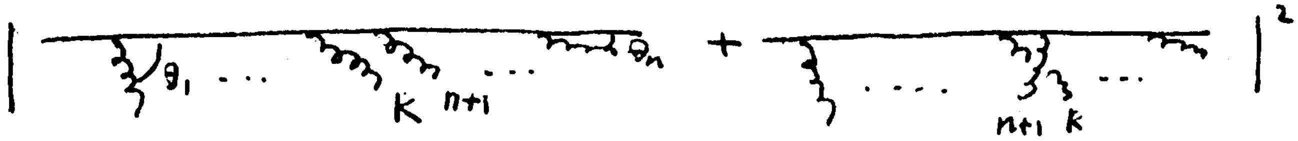
となって強い（$\frac{d\theta}{\theta}$ に比例する）輻射を出すわけです。

$\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ は次の様に理解できます。n グルオン放出が

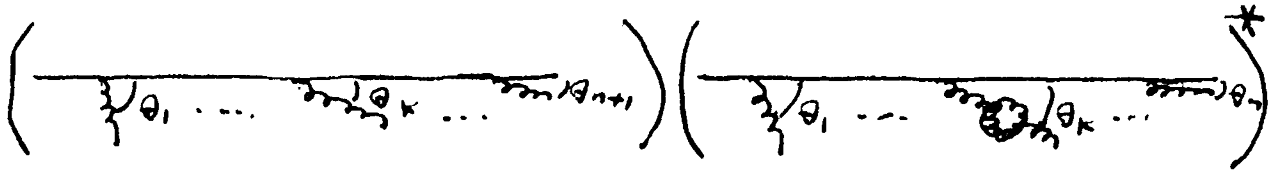
(836) 

$$\ln\theta_1 \gg \ln\theta_2 \gg \cdots \gg \ln\theta_n$$

のときには、他のダイアグラムは干渉しません。n グルオン放出断面積は上の図の $|\cdots|^2$ で与えられます。今、$n+1$ 個めのグルオンが $\theta \sim \theta_K$ に放出されたとします。

(837) 

今度はクロスした diagram が干渉します。一方 $\theta \sim \theta_K$ なので、この 2グルオン系は、(836) の k 番目のグルオンと重って一つのジェットと見られるかも知れません。α_s のオーダーとしては、

(838) 

(837) と (838) を足し上げると、n グルオン放出振幅 (836) の二乗の式で、k 番目の放出の結合を、$\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi} + \left(\frac{\alpha_s(\mu^2)}{\pi}\right)^2 b_0 \ln\frac{k_T^2}{\mu^2} = \frac{\alpha_s(k_T^2)}{\pi}$ で置き換えたものになります。同様に、全ての (836) のグルオンと近い角度に表われる剰余グルオンの効果は、$\alpha_s \to \alpha_s(k_T^2)$ で吸収され、オーダリングが保たれて exponentiate するわけです。今の議論で

azymuthal angle, $\phi_1, \cdots, \phi_n$ はそろっているかの様に話しましたが(紙が平面ですから…)、全ての独立な$\{\phi_1, \cdots, \phi_n\}$の組みについて同様な議論をすることができるようです。

さて、この様にして作られたPS (Herwig, Pythia etc)は、ソフト・コリニアー領域で、NLO+NLLの近似を持ち、従ってジェットの最も重要な特性(ジェットがジェットらしく見えるときの特性)を再現します。このことがPSで最も要求されることであったので、この部分の改良が90年代初めになされました。これらの改良は、TRISTAN, LEP, LEP2のデータでtuneされているので、Q/Q効果の名残りを除いて、LHCでも通用すると思います。

欠点があるとすると、LOの形はそのままにして、soft-collinearの極限でNLL-NLOの結果を再現するようにしたので、hard-collinearな場合には必ずしもNLL-NLOとの一致が良いかどうか分からないことです。(GL-AP方程式がもとなので、hard-non-collinearはいずれにしろだめです。) hard-collinearな部分もNLLの効果を取り入れるのが、加藤・宗久のNLLジェットだと理解しています。歴史的に、

NLLジェットPSの開発と、上に述べたsoft-collinear領域の改良とが、同じ時期であったために、私は当時、この違いが全く理解できませんでした。既に述べたように、soft-collinear領域の改良は、PSが現実のジェットをシミュレートするために絶対に必要であったので、その部分の改良をした上で、hard-collinear領域のジェットプロファイルを改良することができたら、それを示すことができたら、NLLジェットは市民権を得られたのだろうと、(今は)思います。実のところ、どの程度の改良が期待できるのか、私には分かっていません。(実際の解析をなさっている栗原さんに教えていただきましょう。)分かっていないので、間違いかも知れませんが、私は今のところ、それ程重要な効果は期待できないのではないかと思っています。NLLで、hard-collinearな分岐が改良されますから、ジェット中のハードなハドロン、ミニジェットの分布が改良されるはずです。一方、collinearな極限では、hadronizationの効果を含めて、LEP等のデータを使ってtuneされています。hardで且つnon-collinearな振るまいは、GL-APでは決して記述できないので、exactなmatrix elementを使って改良しなければなりません。その改良は結局は、PSで使われた分岐と、exactなmatrix elementによる分布との

2005.10.14

「差」を評価することになります。(MC@NLO等).どうせ差をとるのなら、通常のPSの簡単なLOの分岐関数との差を計算する方が、より複雑なNLLの分岐関数との差を計算するよりも楽なような気がします。次の2点が知りたいです。NLL分岐を使うと、MC@NLOを実施したときに、補正が小さい、negative weight eventが少ない、等の利点があるか? もう一つは、HKKW法でexclusiveなジェットを生成する場合、どうしても、一つ一つのジェットは充分collinearとは言えなくなる。ある程度non-collinearなジェットをPSで生成しなければならない。その領域で、NLLジェットは通常のPSより再現性が高いか? もし、これらの質問に対する答が肯定的であったなら、復権のチャンスはあると思うし、LHCの解析を有利に進めることができるかも知れません。過去の失敗は、soft-collinearな部分は非摂動的ハドロン化の部分だとして、その方向の改良に取り組まなかったことにあるのだと思います。あくまでも、まずsoft-collinear, それがOKで始めて、hard-collinearの改良が光を浴びるのだと思います。

②にもどります。jの「太さ」は k_T-clustering algorithm で決めることになりますが(⑥で詳しく説明します)、(832)の様にユニタリティー(819)を満たす、$n=0,\cdots,k_{max}$ パートンイベントが生成されたら、その全てを出発点として、clustering-algorithm を用いて、①で必要とされる「太い」ジェットの生成断面積を評価します。この過程で

(839)

パートン数 ジェットの数

$$
\begin{aligned}
\sigma_{(0)} &\rightarrow \sigma_0 \\
\sigma_{(1)} &\rightarrow \sigma_0,\ \sigma_1 \\
\sigma_{(2)} &\rightarrow \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2 \\
\sigma_{(3)} &\rightarrow \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3 \\
&\ \ \vdots \qquad \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \quad\ \vdots \\
\sigma_{(k_{max})} &\rightarrow \sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \cdots,\ \sigma_n \\
&\quad\ \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \qquad \Downarrow \\
&\quad\ \sigma_0+\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3+\cdots+\sigma_n = \sigma_{tot}^{(0)}
\end{aligned}
$$

の様に cluster 化されます。(839)の過程は、ハドロンを出発点にした cluster 化とあるレベルから一致することが要求されます。この要求を満たすのは、ジェット cluster algorithm が QCD の分岐過程の特性、特に soft-collinear な振る舞いを逆にたどる場合だけです。この点については⑥で再論します。

全断面積は $\sigma_{tot}^{(0)}$ からずれません(ユニタリーティー(819)の結果)。ジェットの数分布の正しさは 30% 程度ではなかろうか。

③が MC@NLO の出番です。

(840) S. Frixione, B.R. Webber, JHEP 06, 029 (2002)
S. Frixione, P. Nason, B.R. Webber, JHEP 08, 007 (2003)
S. Frixione, B.R. Webber, hep-ph/0506182 [MC@NLO 3.1]

まず、PQCDの予言の大きさ（断面積等の大きさ）はLOでは不定で、NLOではじめて定量的な予言が可能になることを復習しましょう。

①の過程 $pp \to (\cdots) + nj$ のどれかの微分断面積を

(841) $$d\sigma = \sum_{a,b} dx_1 D_{a/p}(x_1,\mu_F)\, dx_2 D_{b/p}(x_2,\mu_F)\, d\hat{\sigma}_{ab\to(\cdots)+\cdots}(sx_1x_2,\mu_F,\mu_R)$$

と因子化した形に書いてみましょう。μ_F は long-distance physics (PDF) の因子化スケール、μ_R は ultra-violet physics の因子化スケール（くり込み点）です。左辺は観測量ですから、μ_F、μ_R に依存しません。一方、long-distance physics を因子化した量（PDF）は μ_F に依存（GL-AP方程式）、ultra-violet physics を因子化した量（α_s）は μ_R に依存（くり込み群方程式）します。Hard-scattering part $d\hat{\sigma}$ は PQCDの摂動展開ができて

(842) $$d\hat{\sigma} = d\hat{\sigma}_{LO}\left\{1 + A_1 a + A_2 a^2 + \cdots\right\}; \quad a = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}_{\overline{MS}}$$

まず、μ_F に関する非依存性が、PQCDでどのように実現されるかを考えます。(841)式で ~~$\mu_F \to \mu_F + \Delta\mu_F$ と変更~~ $\mu_F \to k\mu_F$ と変更すると、当然、PDFの値が変わります。GL-AP方程式を摂動的

に解くと [$\ln(k\mu_F)^2 = \ln\mu_F^2 + \ln k^2$ なので]

(843) $$\begin{cases} D_{a/p}(x_1, k\mu_F) = D_{a/p}(x_1,\mu_F) + \ln k^2\cdot\frac{\alpha_s}{2\pi}\hat{P}\otimes D(x_1,\mu_F) \\ D_{b/p}(x_2, k\mu_F) = D_{b/p}(x_2,\mu_F) + \ln k^2\cdot\frac{\alpha_s}{2\pi}\hat{P}\otimes D(x_2,\mu_F) \end{cases}$$

の様に変化します。 $\ln k^2\cdot\frac{\alpha_s}{2\pi} = \ln k\cdot a$ と書きます。ここの α_s は

$\alpha_s(\mu_F)_{\overline{MS}}$ ですが、 $\frac{\alpha_s(\mu_F)}{\pi}_{\overline{MS}} = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}_{\overline{MS}} + b_0\ln\frac{\mu_F^2}{\mu_R^2}\left(\frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}\right)^2+\cdots$

なので違いは更に higher-order です。(843)は

(844) $$D_{a/p}(x_1,k\mu_F)\cdot D_{b/p}(x_2,k\mu_F) = D_{a/p}(x_1,\mu_F)\cdot D_{b/p}(x_2,\mu_F) \times\left[1+\ln k\cdot a\left\{\frac{1}{D_{a/p}(x_1,\mu_F)}\hat{P}\otimes D(x_1,\mu_F)+\frac{1}{D_{b/p}(x_2,\mu_F)}\hat{P}\otimes D(x_2,\mu_F)\right\}\right].$$

となります。観測量 $d\sigma$ の μ_F 非依存性は、PQCDの摂動展開で (844)式の $\ln k\cdot a\{\cdots\}$ の項が、$d\hat{\sigma}$ の展開式 (842) の $A_1 a$ の項によって正確に相殺されることを意味します。つまり、NLOの計算をすると、補正項は必ず、

(845) $A_1 = -\ln k\{\ \cdots\ \} + C$

の形をしているはずです。~~一方、もし、A_1 の計算がなされなかったら、~~

$d\hat{\sigma}$ の摂動展開は、(845)式の A_1 の値が小さい時にのみ収束が期待できます。C が小さければ $k=1$ が良いし、C が大きければ k を1からずらさなければなりません。一方、もし、A_1 の計算 (NLO) が

なされなかったる。kをいくつにすれば摂動の第0項(LO)の予言が良いのかが全く分かりません。$d\hat{\sigma}$がちょっとでも複雑な過程であれば、$d\hat{\sigma}$の収束が良くなるkを予想することも困難になります。$\frac{1}{2}<k<2$，$\frac{1}{4}<k<4$、と動かしてみると、LO項だけの予言は大きく動き、$d\hat{\sigma}$の大きさが確定しません。

次にμ_R依存性を見ます。この場合は$d\hat{\sigma}_{LO}$の$\frac{\alpha_s}{\pi}$依存性が重要になります。

(846) $d\hat{\sigma}_{LO} = A_0\, a^m \qquad a = \frac{\alpha_s(\mu_R)}{\pi}\overline{MS}$

としましょう。RGEは

(847) $\mu^2\frac{d}{d\mu^2}a(\mu) = -b_0 a(\mu)^2 - b_1 a(\mu)^3 - \cdots$

ですから、$\mu_R \to \mu_R' = k'\mu_R$とすると、

(848) $a(k'\mu_R) = a(\mu_R) - b_0 \ln k'^2\, a(\mu_R)^2 - \cdots$

と変化し、(846)から

(849) $d\hat{\sigma}_{LO}(k\mu_R) = d\hat{\sigma}_{LO}(\mu_R)\left\{1 - m b_0 \ln k'^2\, a(\mu_R) - \cdots\right\}$

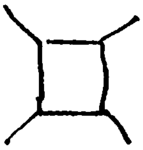
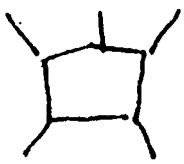
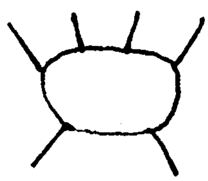
と変化します。$d\sigma$はμ_Rに依存しないので、(842)のA_1は必ず、

(850) $A_1 = m b_0 \ln k'^2 + C'$

の形をしているはずです。A_1の数値的値が小さくなるk'が「良い」スケール

となるわけです。C′が計算(NLO)されていなければ、K′を選ぶことができないので、$d\hat{\sigma}_{LO}$ の値は大きな不定性($m=0$の場合は除きます。)を持つわけです。multi-jet 生成断面積の m は大きいですから、この不定性は深刻です。

というわけで、①にあげた重要過程の全てについてNLO補正が欲しいです。終状態が3体までの計算はほぼ完成していると思いますが、それ以上になると、現在の計算法ではとても困難です。困難はループ計算にあり、

(851) $2\to2$  $2\to3$  $2\to4$ 

と加速度的に難しくなります。①にあげた(…)+mj で $m>1$ は事実上不可能と思います。(全く新しい計算法が開発されない限り、ですが。) NLO計算の最も標準的な技術は

(852) S. Catani, M.H. Seymour, NPB485, 291 (1997); E B510, 503 (1997)

です。最近の発展については、栗原さん、Vermaseren さん等に伺うのが良いかと思います。私は(852)は大変良く書けていると思います。

さて NLO 計算の idea を説明します。kinematical 変数を1変数（グルーオンの energy fraction か、$1-\cos\theta$ かと思ってください。）.

LO ではグルオンが放出されないので、微分断面積は

(853) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0\,\delta(x)$$

です。real emission は

(854) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\,\frac{R(x)}{x} \qquad ;\ a = \frac{\alpha_s(\mu)_{\overline{MS}}}{\pi}\ ,\ R(0) = \text{finite}$$

kinematical 領域 (phase space) は $0 < x < 1$ とします。virtual correction はグルーオンを放出しないので分布は (853) と同じで、

(855) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon} + V\right)\delta(x)$$

ここで、IR 発散を $D = 4-2\epsilon$ で正則化したと考え、発散項を $1/\epsilon$ で表示しました。$4 \to D$ への解析接続で

(856) $$\begin{cases} d^4k \longrightarrow d^Dk = k^{D-1}dk\, d\Omega^{D-1} & \cdots \text{virtual (loop) momenta} \\ \dfrac{d^3k}{2E} \longrightarrow \dfrac{d^{D-1}k}{2E} = \dfrac{k^{D-2}}{2E}dk\, d\Omega^{D-2} & \cdots \text{real emission} \end{cases}$$

ですが、x が momentum fraction のときも $\frac{1-\cos\theta}{2}$ のときも、一方は k^{D-2} から、一方は $d\Omega^{D-2}$ から、phase space は

(857) $dx \to x^{-2\epsilon} dx$

の様に変化します。(855)では結果だけを書いたのですが、real emission の(854)は $D=4-2\epsilon$ では

(858) $$\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\,\frac{R(x)}{x}\cdot x^{-2\epsilon} = a\,\frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}}$$

となります。UV発散は $D<4$ $(\epsilon>0)$ で正則化されますが、IR, collinear 発散は共に、$D>4$ $(\epsilon<0)$ で正則化されることがわかります。[UV は k が分子にあるときの発散で、IR と collinear は共に、$\frac{1}{E}$、$\frac{1}{1-\cos\theta}$ の様に~~分母~~の発散ですから、これはあたり前です。] (853), (855)、(858) を用いて、NLO の計算をします。

まずは全断面積：

(859) $$\sigma_{LO} = \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0$$

(859)′ $$\sigma_V = \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon} + V\right)$$

(859)″ $$\begin{aligned}\sigma_R &= \int_0^1 dx \left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R = a\int_0^1 dx\, \frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}} \\ &= a\int_0^1 dx \left[\frac{R(0)}{x^{1+2\epsilon}} + \frac{R(x)-R(0)}{x^{1+2\epsilon}}\right] \\ &= a\left\{R(0)\left[\frac{x^{-2\epsilon}}{-2\epsilon}\right]_0^1 + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x} + O(\epsilon)\right\} \\ &= a\left\{-\frac{R(0)}{2\epsilon} + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x} + O(\epsilon)\right\}\end{aligned}$$

全て足しあげると

(860) $$\sigma_{NLO} = \sigma_{LO} + \sigma_V + \sigma_R$$
$$= A_0 + a\left(\frac{c}{\epsilon}+V\right) + a\left\{-\frac{R(0)}{2\epsilon} + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x}\right\}$$
$$= A_0 + a\left\{\frac{1}{\epsilon}\left(c-\frac{R(0)}{2}\right) + V + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x}\right\}$$
$$= A_0 + a\left\{V + \int_0^1 dx\,\frac{R(x)-R(0)}{x}\right\}$$

となります。ここで、IR/collinear発散の相殺は

(861) $$c = \frac{R(0)}{2}$$

で保障されます。

さて、(859)→(860)の計算は、kinematical variables（今はxだけですが）に依存する全てのobservable $O(x)$ に対する予言に適用されます。

$O(x)$ に対する唯一の [redacted] 条件は

(862) $$O(x) = O(0) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$$

です。つまり、$O(x)$ は IR, collinear な極限 $(x=0)$ で唯一つの値を持つ（IR, collinear な splitting で値を変えない）ことです。

IR/collinear safe observables と呼びます。では $O(x)$ に対する PQCD の予言を計算しましょう。

(863) $$\langle O(x)\rangle_{LO} = \int_0^1 dx\, O(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_{LO} = A_0\, O(0)\, \delta(x)$$

$\langle O(x)\rangle$の定義としては $\frac{1}{\sigma}$ で規格化するのが普通ですが、今は「わざと」規格化していません。次元がずれてしまうことには目をつぶって下さいね。(863)が $\langle\ \rangle$ の定義です。さて、VとRの補正も足します。

(864) $$\langle O(x)\rangle_V = \int_0^1 dx\, O(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_V = a\left(\frac{c}{\epsilon}+V\right)O(0)$$

(864)' $$\begin{aligned}\langle O(x)\rangle_R &= \int_0^1 dx\, O(x)\left(\frac{d\sigma}{dx}\right)_R \\ &= \int_0^1 dx\, O(x)\frac{R(x)}{x^{1+2\epsilon}}\cdot a \\ &= a\int_0^1 dx\left[\frac{O(0)R(0)}{x^{1+2\epsilon}} + \frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x^{1+2\epsilon}}\right] \\ &= a\left\{\frac{O(0)R(0)}{-2\epsilon} + \int_0^1 dx\,\frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x} + O(\epsilon)\right\}\end{aligned}$$

全ての寄与を足し上げて、(861)を考慮すると、

(865) $$\langle O(x)\rangle_{NLO} = A_0 O(0) + a\left\{V\,O(0) + \int_0^1 dx\,\frac{O(x)R(x)-O(0)R(0)}{x}\right\}$$

となるわけです。(865)を積分形（$\int_0^1 dx=1$ を利用して）にして

(866) $$\langle O(x)\rangle_{NLO} = \int_0^1 dx\left\{O(x)\frac{aR(x)}{x} + O(0)\left[A_0 + aV - \frac{aR(0)}{x}\right]\right\}$$

にしたものがMC@NLOの出発点です。(865)式の表式では最後の積分はmanifestに有限で、通常のO(x)の場合計算可能です。(O(x)の解析的表式があれば常に可能です。) O(x)=1なら全断面積(860)ですし、

$O(x) = x$ なら $O(0)=0$ なので

$$(867) \quad \langle x \rangle_{NLO} = a \int_0^1 dx\, R(x)$$

です。1-T (T=thrust) や jet の太さのように soft or collinear limit で 0 になる量は $\langle\ \rangle_{LO}$ の値がゼロなので、$\langle\ \rangle_{NLO}$ の値が最初の有限項を与えます。通常のくりこみ群の議論では、摂動展開の最初のゼロでない項を LO と呼ぶことになっているので、(867) の $\langle\ \rangle_{NLO}$ のそえ字はその使い方とはずれてしまいます。このあたりのことは言葉の使い方、方言みたいなものですから慣れてしまってください。

さて、MC@NLO は $O(x)$ として、PS の event 全体を考えよう、というものです。とてつもなく複雑で、解析的表式もないですが、(865)、(866) で有限の NLO 補正が得られるに違いないことは理解できるでしょう？ [PS が QCD の要請に従って soft な emission で変わらない $O(x) \xrightarrow{x_{soft}\to 0} O(0)$ は OK ですが、collinear emission の場合、initial state では PDF が変化し、final state では fragmentation function (jet profile) が変化します。final state は 'jet-cluster → jet' として この問題を回避し、initial state は PDF の変化分を GL-AP 方程式によって相殺します。] 但し、(865) の積分が有限になると言っても、PS の分布一つ毎に (それも 'x' → 0 で全く

同じPSの分布）相殺されるわけですから、MC法では全く相殺されません。PSの生成自体は'x'を引数として生成したいからです。どうしても、$x \neq 0$ のときと、$x=0$ のときが別々になってしまいます。そこでまず(866)のように書き変えますが、第一項と第二項はそれぞれ発散していて $\int_0^1 dx$ 積分をMC法で相殺させることは不可能です。それに、第一項は $+\infty$ のPSイベント、第二項は $-\infty$ のPSイベントで、その和がNLOのPSイベントですから、何が何やら分かりません。(840)のMC@NLOの工夫は、(866)のそれぞれから、$x \to 0$ のsingularityを相殺する解析的関数（$R(x)$ のsingular部分の解析的表式はGL-AP方程式のsplitting関数を使って書けます）を引いて足します：

(868)
$$\frac{R(x)}{x} = \frac{Q(x) + R(x) - Q(x)}{x} = \frac{Q(x)}{x} + \frac{R(x)-Q(x)}{x} \quad ; \quad Q(0) = R(0)$$

(869)
$$\langle O(x) \rangle_{NLO} = \int_0^1 dx \left\{ O(x)\, \frac{a(R(x)-Q(x))}{x} + O(0)\left[A_0 + aV + a\,\frac{Q(x)-R(0)}{x} \right] \right\}$$

(840)で提案されたMC@NLOは、Vと R(x)が計算されている全ての過程について、inclusiveな分布(通常は①の過程で (…)+X の分布)は計算されたNLO分布に従い、且つ、+ kmax parton のPSを生成することができます。問題点をあげてみます(私の不勉強のせいかも知れません)

(870) I: (…)+nj が必要な場合、nj は PS から cluster 法で構成します。PSは soft-collinear な parton しか正しくないので、これらの jet の分布、correlation は正しくはでません。

II: (869)は subtraction を含むので、どうしても「負の weight」のイベントが生成されます。「(…)+ kmax partons が生成される」と言っても、それらは「正のイベント」から「負のイベント」の効果を差し引いた「分布」でしかあり得ません。イベント generator の役割は果たせないように思うのですが、違いますか?

上の II の~~[illegible]~~疑問は本質的です。「(…)+k parton の分布」が計算できるのは、それはそれで良いことですが、得られた分布に従って event が生成できなければ余り役に立ちません。MCの全ての乱数の組みに対して「負」/「正」の比を覚えさせれば良いのですか? // これがOKであれば、残る問題は (870)-I であり、これが p.284の課題⑤です。

p.284の課題④の解は、MC@NLOが代(だい)します。(…)系のPT分布は(…)+Xのinclusive分布の1つですから、PSのintial radiationによって概ね正しく得られますし、その部分に対するNLO補正も入ります。n=0, n=1といったexclusiveのjetの数を固定した断面積は、(870)-Iの議論から、充分に正しいとは期待できませんが、それでも、(…)系のPT分布を、nに応じて調べることは可能です。parton → jetのclusteringが必要なので、面倒な作業にはなります。

さて、p.284の課題⑤に対する解答を、取り合えず③のNLOの精度を要求せずに(しかし、他の要請も全て)満たすのがHKKWです。

(871) S.Catani, F.Krauss, R.Kuhn, B.R.Webber, JHEP111, 063 (2001)
F. Krauss, JHEP208, 015 (2002)
F. Krauss, A.Schalicke, S.Schuman, G.Soff, hep-ph/0409106, 0504032 [W/Z+jets]

ここでは、

まず最初に、全てのeventを①のリストで

(872)
(…) + 0 jet events
(…) + 1 jet 〃
(…) + 2 jet 〃
⋮
(…) + n jet 〃

に分割します。jetの定義が重要ですが、soft-collinear領域でのQCDの分岐にconsistentなk_T-cluster algorithmを用います。

(873) S. Catani, Y.L. Dokschitzer, M. Olsson, G. Turnock, B.R. Webber, PLB269, 432 (1991)
S. Catani, Y.L. Dokschitzer, B.R. Webber, PLB285, 291 (1992)
★ S. Catani, Y.L. Dokschitzer, M.H. Seymour, B.R. Webber, NPB406, 187 (1993)

★は必読文献です。Clustering algorithmはk_Tのハドロンまたはパートン運動量の集合

(874) $\{\vec{p}_i\}$ $\quad i=1,\cdots,k$

から出発して、cluster (jet) をuniqueに定める方法です。まず全ての(i,j)の組（${}_kC_2$あります）に対して、$\vec{p}_i$と$\vec{p}_j$の距離（jet太さ）y_{ij} ~~(875) y_{ij}~~ を計算し、あらかじめ決めたjetの太さの最大値y_{cut}と比較：

(875) $\min\{y_{ij}\} < y_{cut}$ ならば $\vec{p}_i + \vec{p}_j = \vec{p}_{ij}$ $(E_i + E_j = E_{ij})$

とし、次のステップは、$\vec{p}_{ij}$と残りの$k-2$個の組みについて(875)を繰り返します。(875)を満たす組がなくなったときに、algorithmは終了し、jetとその運動量（clusterされた全ての$\vec{p}_i$のベクトル和）とエネルギー（全ての$|\vec{p}_i|$の和）が定まります。y_{ij}として最小限度の条件（得られたjetの性質がP-QCDで解析可能）は

(876) $y_{ij} \to 0$ when $|\vec{p}_i| = 0$ または $|\vec{p}_j| = 0$ または $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_j = 0$

つまり「soft・collinear な分岐を区別しない」ことです。P-QCD の soft-collinear な分岐が angular ordering に従うことを説明しましたが、k_T-algorithm はこの QCD の分岐の特性を生かして、得られた jet の性質が P-QCD の意味で「良い」振るまいをするようにとの考えから提案されました。

(877) $y_{ij} = \min\{E_i^2, E_j^2\}\, 2(1-\cos\theta_{ij}) \qquad [\propto \min\{k_{Ti}^2, k_{Tj}^2\}]$

k_T-clustering 又は Durham-algorithm と呼ばれます。P-QCD との相性が悪い（従って parton→hadron の機構の詳細に sensitive な）例は

(878) $y_{ij}^{JADE} = (p_i + p_j)^2 = \quad 2E_iE_j(1-\cos\theta_{ij})$

です。(878) は明らかに (876) の最低条件を満たすのですが、(875) で $\min\{y_{ij}\}$ として ソフトな粒子（ハドロン，パートン）の対を、例え θ_{ij} が大きくても combine する確率が高くなります。これは angular-ordering と相入れないので、JADE-algorithm を使うと、QCD の分岐とは全く無関係の「ジェット」が偶然できてしまう確率が無視できないのです。結果、JADE-algorithm を使った jet 分布・評価値は、ハドロン化の機構に sensitive で且つ、その fluctuation にも sensitive となり、P-QCD について学んだり（α_s を測定）P-QCD の知識を利用して、わからないことへの依存性を少なくして、jet の物理から新しい物理を探す（LHC や ILC）目的のためには使ってはいけません。

2005.10.14

さて algorithm (875) が、unique にハドロン/パートンのクラスター化

[(839)式参照] することが分かると思いますが、(873)★の論文で、

ハドロン・コライダー実験に適用するための重要な発展がなされました。

Observe された全てのハドロン/パートンの運動量の集合 $\{\vec{p}_i\}$ を考えることは

同じですが、その全てについて、次の二種類の「太さ」を計算します。

$$(879)\quad \begin{cases} y_{kin} = E_K^2 \sin^2\theta_K \left(= p_{TK}^2\right) & \cdots n個 \\ y_{k\ell} = E_K^2 \sin^2\theta_{K\ell} \approx E_K^2\left[(\theta_K-\theta_\ell)^2+(\phi_K-\phi_\ell)^2\sin^2\theta_K\right] & \\ \qquad \approx p_{TK}^2\left[(\eta_K-\eta_\ell)^2+(\phi_K-\phi_\ell)^2\right] & \cdots n(n-1)個 \end{cases}$$

全ての組みを計算し、

$$(880)\quad \min\{y_{K,in},\ y_{K\ell}\} < y_{cut}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{K,in}\ \text{の場合は}\ \vec{p}_K\ \text{は}\ p_{K\parallel}\ \text{の向きの}\ \text{ビームジェットに入れて} \\ y_{K\ell}\ \text{の場合は}\ \vec{p}_K+\vec{p}_\ell=\vec{p}_{K\ell} \end{cases}$$

で、あとは (880) を繰り返します。