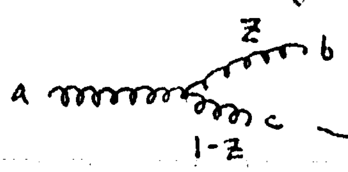
QCD for Collider Physics XI

2005. 9. 30

前回の講義でGL-AP方程式 (756), (759) を導き、規格化された分岐関数 $P_{q/q}(z)$ (765), $P_{g/q}(z)=\hat{P}_{g/q}(z)=\hat{P}_{g/q}(z)$ (754)
[(注) (754)式の左辺は $\hat{P}_{q/q}(z,\varepsilon_g^{\phi})$ の誤りで、$z=\frac{E_b}{E_a}$ は q中のq のエネルギー比です。従って gluon偏極が大きいのは $z\sim1$ ですから soft ($1-z\sim0$) の場合です。p.260 の (754)式とその下の文を訂正しておいてください。この修正をすれば、$e^+e^-\to q\bar{q}(g\to q\bar{q})$ で 'soft' な $q\bar{q}$ が散乱面と直角に生成されやすいという Abelian-gluon-model の予言 (p.258 の下の図の χ_{Bz} 分布の点線) が定性的に理解できます。],
$P_{q/g}(z)=\hat{P}_{q/g}(z)$ (745), $P_{g/g}(z)$ (766)–(770) を求めました。

が、(766)式は規格化が2倍間違っていました。分岐関数 $\hat{P}_{g/g}(z)$ (738) が正しいのに、規格化された分岐関数 $P_{g/g}(z)$ (766) が2倍間違ってしまった理由は、GL-AP方程式 (756) による $P_{g/g}(z)$ の定義にあります。$g\to gg$ 分岐による寄与だけを書くと、

(771) ≈ (756)″
$$\underbrace{\Delta g(x,Q^2)}_{(\text{from } g\to gg)}=(\Delta\ln Q^2)\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\,P_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)$$
$$=(\Delta\ln Q^2)\frac{\alpha_s}{2\pi}\int_0^1\frac{dz}{z}\,\hat{P}_{g/g}(z)\left\{g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+g\left(\frac{x}{1-z},Q^2\right)\right.\underbrace{\left.\vphantom{\frac{x}{z}}\right\}}_{\substack{+\cdots\\ \parallel\\ (z=1\text{の規格化項})}}$$



2005. 9. 30

となります。つまり、$g \to gg$ 分岐ではエネルギー比 z のグルオンの効果と、$1-z$ のグルオンの効果の和が GL-AP方程式の一個の分岐関数 $P_{g/g}(z)$ で表現されているわけです。一方

$$(772) \quad \hat{P}_{g/g}(1-z) = \hat{P}_{g/g}(z) = C_A \left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z) \right]$$

ですから、(771)の第二行は

$$\begin{aligned}
(773) \quad & \int_0^1 \frac{dz}{z} \hat{P}_{g/g}(z) \left[g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + g\left(\frac{x}{1-z}, Q^2\right) \right] + \cdots \\
&= \int_0^1 \frac{dz}{z} \left[\hat{P}_{g/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + \hat{P}_{g/g}(1-z)\, g\left(\frac{x}{1-z}, Q^2\right) \right] + \cdots \\
&= \int_0^1 \frac{dz}{z}\, 2 \hat{P}_{g/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + \cdots \\
&= \int_x^1 \frac{dz}{z}\, 2 \hat{P}_{g/g}(z)\, g\left(\frac{x}{z}, Q^2\right) + \cdots
\end{aligned}$$

ここで2倍の因子が表れました。$+\cdots$ は $z=1$ の規格化項ですが、この計算 [redacted] は (766)〜(770) で正しいことが分かります。これは、上の(773)式で第一項だけが（つまり半分だけが）$z \to 1$ の発散を持つからです。(770)が正しかったために、規格化の誤りを見つけるのに手間取ってしまいました。

ここで GL-AP方程式の規格化された分岐関数を整理しておきましょう。

2005. 9. 30

まず 'bare' な分岐関数は

(774)
$$
\begin{cases}
\hat{P}_{q/q}(z) = C_F \dfrac{1+z^2}{1-z} \\
\hat{P}_{g/q}(z) = C_F \dfrac{1+(1-z)^2}{z} = \hat{P}_{q/q}(1-z) \\
\hat{P}_{q/g}(z) = T_F\left(z^2+(1-z)^2\right) = \hat{P}_{\bar{q}/g}(z) = \hat{P}_{q/g}(1-z) \\
\hat{P}_{g/g}(z) = C_A\left[\dfrac{z}{1-z} + \dfrac{1-z}{z} + z(1-z)\right] = \hat{P}_{g/g}(1-z)
\end{cases}
$$

GL-AP 方程式に表われる規格化された分岐関数は

(775)
$$
\begin{cases}
P_{q/q}(z) = C_F\left[\dfrac{1+z^2}{(1-z)_+} + \dfrac{3}{2}\delta(1-z)\right] \\
P_{g/q}(z) = C_F \dfrac{1+(1-z)^2}{z} = \hat{P}_{g/q}(z) = \hat{P}_{q/q}(1-z) \\
P_{q/g}(z) = T_F\left[z^2+(1-z)^2\right] = \hat{P}_{q/g}(z) = \hat{P}_{q/g}(1-z) \\
P_{g/g}(z) = 2C_A\left[\dfrac{z}{(1-z)_+} + \dfrac{1-z}{z} + z(1-z)\right] + 2b_0\,\delta(1-z)
\end{cases}
$$

$$b_0 = \frac{11C_A - 4n_f T_F}{12}$$

規格化された分岐関数が次の和則(保存則)を満たすことを確認して下さい。

(776) $$\int_0^1 dz\, P_{q/q}(z) = 0$$ … $q\to qg$ で q 数保存

(776)′ $$\int_0^1 dz \cdot z\left[P_{q/q}(z) + P_{g/q}(z)\right] = 0$$ … $q\to qg$ でエネルギー保存

(776)″ $$\int_0^1 dz \cdot z\left[P_{g/g}(z) + 2n_f P_{q/g}(z)\right] = 0$$ … $g\to gg$ と $g\to q\bar{q}$ でエネルギー保存

(776) は QED の電子数保存 (711), (712), (714) と同じです。(776)′と(776)″ は

2005. 9.30

collinearエネルギー保存を表します。やってみましょう。

(777) $$\int_0^1 dz \cdot z\, P_{q/q}(z) = C_F \int_0^1 dz \left[\frac{z+z^3}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} z\, \delta(1-z) \right]$$

$$= C_F \left\{ \int_0^1 dz \frac{(z-1)+(z^3-1)}{1-z} + \frac{3}{2} \right\}$$

$$= C_F \left\{ - \int_0^1 dz\, (1+1+z+z^2) + \frac{3}{2} \right\}$$

$$= C_F \left\{ - \left(2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2} \right\} = -\frac{4}{3} C_F$$

(777)' $$\int_0^1 dz \cdot z\, P_{g/q}(z) = C_F \int_0^1 dz \left[1 + (1-z)^2 \right]$$

$$= C_F \int_0^1 dz\, (1+z^2) = C_F \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} C_F$$

(777)'' $$\int_0^1 dz \cdot z\, P_{g/g}(z) = 2 C_A \int_0^1 dz \left[\frac{z^2-1}{1-z} + 1 - z + z^2(1-z) \right] + 2 b_0$$

$$= 2 C_A \int_0^1 dz \left[\cancel{-1} - z \cancel{+1} - z + z^2 - z^3 \right] + 2 b_0$$

$$= 2 C_A \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \frac{11}{6} C_A - \frac{2}{3} n_f T_F$$

$$= 2 C_A \left(-\frac{11}{12} \right) + \frac{11}{6} C_A - \frac{2}{3} n_f T_F$$

$$= -\frac{2}{3} n_f T_F$$

(777)''' $$\int_0^1 dz \cdot z\, P_{q/g}(z) = T_F \int_0^1 dz \left[z^3 + z(1-z)^2 \right]$$

$$= T_F \int_0^1 dz \left[z - 2z^2 + 2z^3 \right]$$

$$= T_F \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{3} T_F$$

エネルギー和則 (776)' と (776)'' が導れました。

ここで GL-AP 方程式が、分布関数のモーメントに対しては単純な因子化（行列）になることを示しておきましょう。(761) と (762) をもう一度：

$$(778)=(761)\quad \frac{d}{d\ln Q^2}\, q_V(x,Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, P_{q/q}(z)\, q_V\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right)$$

← (762)も訂正してください。

$$(779)=(762)\quad \frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} q_S(x,Q^2) \\ g(x,Q^2)\end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\begin{bmatrix} P_{q/q}(z) & \overbrace{P_{q/g}(z)}^{2n_f} \\ P_{g/q}(z) & P_{g/g}(z)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_S(\frac{x}{z},Q^2) \\ g(\frac{x}{z},Q^2)\end{bmatrix}$$

でした。ここで n次のモーメント

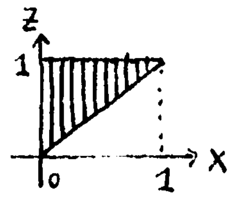
$$(780)\quad \begin{cases} q_V^n(Q^2) = \int_0^1 dx\, x^{n-1} q_V(x,Q^2) \\ q_S^n(Q^2) = \int_0^1 dx\, x^{n-1} q_S(x,Q^2) \\ g^n(Q^2) = \int_0^1 dx\, x^{n-1} g(x,Q^2) \end{cases}$$

$$(780)'\quad P^n_{b/a} = \int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{b/a}(z)$$

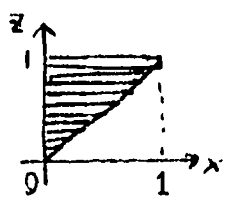
を定義して、たたみ込み積分の性質

$$(781)\quad \int_0^1 dx\, x^{n-1}\int_x^1 \frac{dz}{z}\, P(z)\, D\!\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$= \int_0^1 dx \int_x^1 dz\, \frac{1}{z}\left\{ P(z)\cdot x^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$



$$= \int_0^1 dz \int_0^z dx \cdot \frac{1}{z}\left\{ z^{n-1} P(z)\cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$



$$= \int_0^1 dz \int_0^1 d\!\left(\frac{x}{z}\right)\left\{ z^{n-1} P(z)\cdot \left(\frac{x}{z}\right)^{n-1} D\!\left(\frac{x}{z}\right)\right\}$$

$$= \left\{\int_0^1 dz\, z^{n-1} P(z)\right\}\cdot\left\{\int_0^1 dx'\, x'^{\,n-1} D(x')\right\} \equiv P^n\cdot D^n$$

を用いると、(778), (779) はそれぞれ、

(782) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\, q_v^n(Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\, P^n_{q/q}\cdot q_v^n(Q^2)$$

(783) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} q_S^n(Q^2) \\ g^n(Q^2)\end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} P^n_{q/q} & \overbrace{P^n_{q/g}}^{2n_f} \\ P^n_{g/q} & P^n_{g/g}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_S^n(Q^2) \\ g^n(Q^2)\end{pmatrix}$$

これらは解析的に解くことができて、例えば (782) は

(784) $$\frac{d\, q_v^n(Q^2)}{q_v^n(Q^2)} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi}\, P^n_{q/q}\ d\ln Q^2$$

(784)' $$\int_{Q_0^2}^{Q^2} d\ln q_v^n(Q'^2) = \int_{Q_0^2}^{Q^2} d\ln Q'^2\ \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi}\, P^n_{q/q}$$

ここで、$\alpha_s(Q^2)/\pi$ に $\overline{MS}$ を使うと、β関数が Q^2 に顕わによらないので、

(785) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\,\frac{\alpha_s(Q^2)_{\overline{MS}}}{\pi} = \beta_{\overline{MS}} = -\left\{ b_0\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 + b_1\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 + \cdots \right\}$$ p.244 (703)

(785)' $$d\ln Q^2 = \frac{d\,\frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}_{\overline{MS}}}{\beta_{\overline{MS}}} = -\frac{da}{b_0 a^2 + b_1 a^3 + \cdots} \quad ;\ a = \frac{\alpha_s(Q^2)}{\pi}_{\overline{MS}}$$

これを (784)' に代入すると

(786) $$\ln\frac{q_v^n(Q^2)}{q_v^n(Q_0^2)} = \int_{a(Q_0^2)}^{a(Q^2)} \frac{da}{-b_0 a^2 - b_1 a^3 + \cdots}\,\frac{a}{2}\left[P^{n(0)}_{q/q} + \frac{a}{2}P^{n(1)}_{q/q} + \cdots\right]$$
$$= -\frac{1}{2b_0}\int_{a(Q_0^2)}^{a(Q^2)} \frac{da}{a}\left[P^{n(0)}_{q/q} + a\left(\frac{1}{2}P^{n(1)}_{q/q} - \frac{b_1}{b_0}P^{n(0)}_{q/q}\right) + \cdots\right]$$
$$= -\frac{1}{2b_0}\left\{\ln\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\, P^{n(0)}_{q/q} + \left(\ \text{〃}\ \right)\left[a(Q^2) - a(Q_0^2)\right] + \cdots\right\}$$

$$(787)\quad q_V^n(Q^2) = q_V^n(Q_0^2)\exp\left\{-\frac{1}{2b_0}P_{q/q}^{n(0)}\ln\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)} + \cdots\right\}$$

$$= q_V^n(Q_0^2)\left(\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}P_{q/q}^{n(0)}} + \cdots$$

となります。$+\cdots$ は高次項で、b_1/b_0, $P_{q/q}^{n(1)}$ 等で簡単に表現されます。

ここで、$P_{q/q}^{n(0)} \neq 0$ で Q^2 依存性が表われる（スケール則が破れる）ので、

$P_{q/q}^{n}$ 等のことを異常次元（次元スケール則を破る量子効果）と呼びます。

計算してみましょう。

$$(788)\quad P_{q/q}^{n(0)} = \int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q/q}^{(0)}(z)$$

$$= \int_0^1 dz\, z^{n-1}\, C_F\left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z)\right]$$

$$= C_F\left\{\int_0^1 dz\,\frac{z^{n-1}+z^{n+1}}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\int_0^1 dz\left[\frac{1-z^{n-1}}{1-z} + \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right] + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\left[\sum_{k=0}^{n-2}\int_0^1 dz\, z^k + \int_0^1 dz \sum_{k=0}^{n} z^k\right] + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{3}{2}\right\}$$

$$= C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{n(n+1)} - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right\}$$

$$(789)\quad \begin{cases} P_{q/q}^{1(0)} = C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\cdot 1\right] = 0 \\ P_{q/q}^{2(0)} = C_F\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} - 2\left(1+\frac{1}{2}\right)\right] = -\frac{4}{3}C_F \end{cases}$$

ここで $P^{1(0)}_{q/q}=0$ はクォーク数の保存(776)ですが実際、(787)で

(790) $q_V^1(Q^2)=q_V^1(Q_0^2)$: $\int_0^1 dx\, q_V(x,Q^2)=\int_0^1 dx\, q_V(x,Q_0^2)$

(クォーク)-(反クォーク)の全エネルギーは保存しません。(787)で $n=2$ とおくと

(791) $$q_V^2(Q^2)=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}P^{2(0)}_{q/q}}+\cdots$$

$$=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{1}{b_0\ln(Q^2/\Lambda^2)}\Big/\frac{1}{b_0\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\right)^{-\frac{1}{2b_0}(-\frac{4}{3}C_F)}+\cdots$$

$$=q_V^2(Q_0^2)\left(\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{\frac{2}{3b_0}C_F}+\cdots$$

ここで running coupling の leading の表式((705)の第一項)を使いました。
$b_0=\frac{33-2n_f}{12}=\frac{23}{12}$ $(n_f=5)$ と $C_F=\frac{4}{3}$ を代入すると

(792) $$\int_0^1 dx\, x\, q_V(x,Q^2)=\int_0^1 dx\, x\, q_V(x,Q_0^2)\cdot\left(\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}\right)^{\frac{32}{69}}$$

となり、例えば $u_V(x,Q^2)=u(x,Q^2)-\bar{u}(x,Q^2)$ の全エネルギーは Q^2 と共に減少し、$Q^2\to\infty$ ではゼロになることが分かります。又、

(793) $$\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}=\frac{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)+\ln(Q^2/Q_0^2)}$$

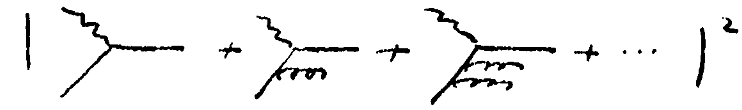
$$=\left(1+\frac{\ln(Q^2/Q_0^2)}{\ln(Q_0^2/\Lambda^2)}\right)^{-1}$$

$$=\left(1+b_0\frac{\alpha_s}{\pi}(Q_0^2)\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^{-1}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(-b_0\frac{\alpha_s(Q_0^2)}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\right)^k$$

から、GL-AP方程式の解が $\left(\frac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}\right)^k$ の項全ての足し上げになっていることが再確認できます。又、ここで、$P^{n(0)}_{q/q}$ がツイスト2, スピン n の $\bar{q}\cdots q$ オペレータの異常次元になっていることを直感的に見てみましょう。

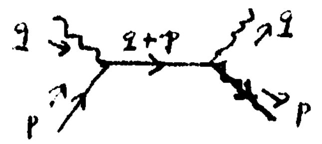
GL-AP方程式は $q\to qg$ 分岐の効果を足し上げたもの

(794) 

ですが、これを $\gamma^* q \to \gamma^* q$ の前方散乱振幅の虚数部(ユニタリティー)ととらえて、前方散乱に寄与するオペレータ

(795) $$J^\mu_{EM}(x)\, J^\nu_{EM}(0) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)\,\bar\psi(0)\gamma_\mu\psi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} C^k (x\cdot\partial)^k\, O^{(k)}(0)$$

の $x\to 0$(短距離)極限を考えます。運動量空間の摂動の第0次は、

(796) 

$$\sim \bar u(p)\gamma^\nu \frac{\not q+\not p}{(q+p)^2}\gamma^\mu u(p)$$

$$\sim \bar u(p)\gamma^\nu \frac{\not q}{Q^2-2q\cdot p}\gamma^\mu u(p)$$

$$\sim \bar u(p)\gamma^\mu \frac{\not q}{Q^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2q\cdot p}{Q^2}\right)^k\gamma^\mu u(p)$$

ですが、全ての $k\ (=0,\cdots,\infty)$ の項がパートン模型の極限で寄与します。

$k=n-1$ の項に寄与するオペレータは、p^μ が $n-1$ 個あるので微分を $n-1$ 個持つ。

且つ γ^μ が最低一つ必要(そうでないとカイラリティー保存が破れて m_q が現れる)

なので $\bar\psi(0)\gamma^{\mu}\partial^{\mu_2}\cdots\partial^{\mu_n}\psi(0)$ の様なスピン n, 次元 $(n-1)+3=n+2$

のオペレータです。パートン模型の極限に寄与するオペレータは全てツイスト

(797)　$t = (\text{次元}) - (\text{スピン}) = 2$

を持つので、ツイスト2オペレータと呼びます。ツイスト3だと (m/Q)、一般に $(m/Q)^{t-2}$ で高ツイストオペレータの寄与は小さくなります。

ツイスト2、スピンnのオペレータ $O^{(n)}(0)$ の異常次元［オペレータのくり込み定数の対数のスケール依存性：$\gamma^n = \frac{d}{d\ln\mu}\ln Z^{(n)}$；$O_B^{(n)}(0) = Z^{(n)} O_R(0)$］を計算すると、

(798)　$\gamma^n = P_{q/q}^{n(0)} = \int_0^1 dz\, z^{n-1} P_{q/q}^{(0)}(z)$

が得られます。γ^nの計算はオペレータの規格化定数Zのuv発散から得られますから、

(799)　

$\otimes = O^{(n)}(0) = \bar{\psi}(0)\gamma^{\mu_1}\partial^{\mu_2}\cdots\partial^{\mu_n}\psi(0) - \text{trace}$

の計算になります。QCDに於けるハドロンの構造関数のスケール依存性は、この様にして、パートンモデルに依らずに導かれました。

DISでは、オペレータ展開((795)の右辺)による短距離部分(係数関数C^k)と長距離部分($\langle p|O^{(k)}(0)|p\rangle$)の分離が、摂動QCDの因子化(697)に対応していました。オペレータのくり込み点依存性を表わすくり込み群方程式が、パートン分布の因子化スケール依存性を表わすGL-AP

方程式に対応していたわけです。オペレータ展開はDIS構造関数にしか役にたたない歴史的遺産ですが［場の理論の基礎としては、理論の短距離極限の振る舞いを調べるツールとして重要です］、摂動QCDの振幅・断面積の因子化(697)は、はるかに広い適用範囲を持ち、GL-AP方程式［一般形は(699)］はその全ての適用において最重要な役割りを果たします。従って、GL-AP方程式の導出過程(p.246〜p.267)とその基本的性質(p.267〜)を理解することが、摂動QCDの高エネルギーコライダー実験への適用法をマスターすることの鍵であることを認識してください。

念のため、全ての異常次元をリストしておきましょう。簡単な計算ですのでcheckしてください。

$$\left\{\begin{aligned}
&P_{q/q}(n) = C_F\left[-\frac{1}{2}+\frac{1}{n(n+1)}-2\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right] &\quad (800a)\\
&P_{g/q}(n) = C_F\left[\frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n-1)}\right] &\quad (800b)\\
&P_{q/g}(n) = T_F\left[\frac{2+n+n^2}{n(n+1)(n+2)}\right] &\quad (800c)\\
&P_{g/g}(n) = 2C_A\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{n(n-1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right]-\frac{2}{3}n_f T_F &\quad (800d)
\end{aligned}\right.$$

(788)と(800a)の見かけが異なるのは、kの和をk=2からに変更したためです。

又、モーメントの次数(オペレータのスピン) n を( )の中に入れて巾乗と区別しました。

$n=1, 2, \infty$ のモーメントは覚えておくと良いです。

(801)
$$P_{q/q}(1) = 0 \qquad P_{q/q}(2) = C_F \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) \qquad P_{q/q}(n) \xrightarrow{n\to\infty} C_F(-2\ln n)$$
$$P_{g/q}(1) = C_F \cdot \frac{2}{n-1} \qquad P_{g/q}(2) = C_F \cdot \left(\frac{4}{3}\right) \qquad P_{g/q}(n) \to 0$$
$$P_{q/g}(1) = T_F \cdot \frac{2}{3} \qquad P_{q/g}(2) = T_F \cdot \frac{1}{3} \qquad P_{q/g}(n) \to 0$$
$$P_{g/g}(1) = C_A \cdot \frac{2}{n-1} \qquad P_{g/g}(2) = T_F \cdot \left(-\frac{2}{3} n_f\right) \qquad P_{g/g}(n) \to C_A(-2\ln n)$$

$n=1$ の pole は g の multiplicity が発散することを表わしています。高次効果を入れた $P_{g/q}(n)$ の $n \to 1$ の振るまいが、q-jet や g-jet の 'multiplicity'（適当に定義された 'jet' の数、ハドロンの数）のエネルギー依存性を定めます。この multiplicity のスケール依存性がどの程度「正しく」再現されるかどうかが、シャワーMCプログラムを例えば Z や Tevatron のスケールで tune したときに、その LHC への extrapolation がうまく行くかどうかの鍵になります。ジェットの数 $\langle n_J \rangle$ や数分布（$n_J - \langle n_J \rangle$ の分散など）のスケール依存性は，ジェットの定義が適当なものであれば，QCD の予言に従うはずです。LHC への外挿を考えるとき，これらの振舞いが決定的に重要だ，ということを肝に銘じておいてください。

$n=2$ の結果は，エネルギー和則

(802)
$$\frac{d}{d\ln Q^2}\int_0^1 dx\, x\left[q_S(x,Q^2) + g(x,Q^2)\right] = \frac{\alpha_s}{2\pi}\left\{\left[P_{q/q}(2)+P_{g/q}(2)\right] q_S^{(2)} + \left[\overbrace{P_{q/g}(2)}^{2n_f}+P_{g/g}(2)\right] g^{(2)}\right\}$$
$$= 0$$

を導きます。又、$q_s^{(2)}$ と $g^{(2)}$ についての GL-AP 方程式

$$(803)\quad \frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} P_{q/q}(2) & \overset{2n_f}{P_{q/g}(2)} \\ P_{g/q}(2) & P_{g/g}(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\alpha_s}{2\pi}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3}C_F & \frac{2}{3}n_f T_R \\ \frac{4}{3}C_F & -\frac{2}{3}n_f T_R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_s^{(2)}(Q^2) \\ g^{(2)}(Q^2) \end{pmatrix}$$

となり、2×2の行列は固有値 0（固有関数 $q_s^{(2)}+g^{(2)}$；(802)）と、

$$(804)\quad \frac{d}{d\ln Q^2}\left[q_s^{(2)}(Q^2) - \frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q^2)\right] = \frac{\alpha_s}{2\pi}\left[-\frac{4}{3}C_F - \frac{2}{3}n_f T_R\right]\left[q_s^{(2)} - \frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}\right]$$

とに対角化されます。(804)は(787)同様に簡単に解けて

$$(805)\quad q_s^{(2)}(Q^2) - \frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q^2) = \left[q_s^{(2)}(Q_0^2) - \frac{n_f T_R}{2C_F}g^{(2)}(Q_0^2)\right]\left[\frac{a(Q^2)}{a(Q_0^2)}\right]^{\frac{1}{2b_0}\left(\frac{4}{3}C_F + \frac{2}{3}n_f T_R\right)}$$

$$\xrightarrow[Q^2\to\infty]{} 0$$

を得ます。(805)式は $Q^2\to\infty$ 極限では、クォークとグルオンのエネルギー比は初期状件によらずに定まり、和が1で不変であることを考慮すると

$$(806)\quad q_s^{(2)}(Q^2) : g^{(2)}(Q^2) \xrightarrow{Q^2\to\infty} \frac{n_f T_R}{2C_F + n_f T_R} : \frac{2C_F}{2C_F + n_f T_R}$$

$$= \frac{3n_f}{16+3n_f} : \frac{16}{16+3n_f}$$

$$= \begin{cases} \frac{3}{7} : \frac{4}{7} & (n_f = 4) \\ \frac{15}{31} : \frac{16}{31} & (n_f = 5) \end{cases}$$

となることがわかります。グルオンのエネルギー比は約50%程度まで大きくなるわけです。

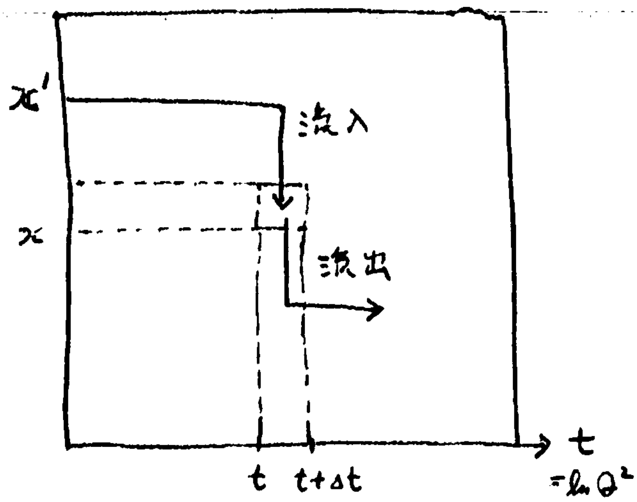
2005. 9. 30

(801)式の$n\to\infty$の振る舞い、$P_{q/q}(n)\to-2\ln n\, C_F$, $P_{g/g}(n)\to-2\ln n\, C_A$ は、$x\to1$ 極限（exclusive極限）の振る舞いに大きな係数 $\ln n$ が表われることを意味します。展開パラメータが $\frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\ln n\sim\frac{\alpha_s}{\pi}\ln\frac{Q^2}{Q_0^2}\ln\frac{1}{1-x}$ となることを意味しており、double-log項の足し上げをしないと、摂動展開がこわれてしまいます。double-log項はexponentialに足し上がることが知られており(QED)、足し上げたものをSudakov形状因子と呼びます。このSudakov因子を用いることにより、GL-AP方程式をMC法によって数値的に解くことが可能となり、高エネルギー過程の解析の必須のツール、シャワーMCが作られます。シャワーMCによる多ジェット(パートン)生成断面積は、GL-AP方程式の導出から明らかなように、多ジェット生成のQCD振幅の近似になっています。このことに着目し、QCD振幅の持つ(普遍的な)コヒーレンスの効果を取り入れて分岐関数を改良したものが、現在のシャワーMCの基礎となっています。この改良はジェットの数分布($n\to1$)とexclusive極限($n\to\infty$)を共に改良します。過程に依存した高次補正は、この改良されたMC断面積と、摂動QCDのNLO計算とのずれを「数値的に」補正することによって得られます。

原理はこの様に簡単なのですが、実際に役に立つツールにまでもって行くのには、多くの理論家の努力の積み重ねが必要であったようです。最近10年間の進展が、LHC準備の鍵となること、その進展がどうして必要なのか、最も役に立ちそうなツールは何か、今後数年（1〜2年）の発展の方向はどうか、といった問題について、やっと、全体像がつかめて来たところです。これらの課題について、私が理解できたところまでを、次回の講義で説明しようと思います。

今日は、GL-AP方程式のMC法による解と、分岐関数の改良（angular ordering）までを解説します。

まず、GL-AP方程式を、bareな分岐関数だけ（$\hat{P}_{a/b}(z)$）を使って表わすことから出発します。クォークとグルオンのそれぞれについて、分岐による分布の変化は、$x'>x$ のクォーク、グルオン分布からの流入分と、$x'<x$ への流出分との差であることに着目して、



(807) $\delta q(x,Q^2)^{in}$ ：流入分

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 dx' \int_0^1 dz\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z)\, q(x',Q^2) + \hat{P}_{q/g}(z)\, g(x',Q^2)\Big] \times \delta(x - z x')$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_0^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z)\, q\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big) + \hat{P}_{q/g}(z)\, g\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big)\Big]$$

流出分は、$q \to q$ と $q \to g$ の和で、

(808) $$\delta q(x,Q^2)^{out} = \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^x dx' \int_0^1 dz\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z) + \hat{P}_{g/q}(z)\Big]\delta(x' - z x)$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z) + \hat{P}_{g/q}(z)\Big]$$

$q(x,Q^2)$ の変化は

(809) $$\delta q(x,Q^2) = \delta q(x,Q^2)^{in} - \delta q(x,Q^2)^{out}$$

$$= \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z)\, q\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big) + \hat{P}_{q/g}(z)\, g\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big)\Big]$$

$$- \frac{dQ^2}{Q^2}\, q(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{q/q}(z) + \hat{P}_{g/q}(z)\Big]$$

全く同様に $\bar{q}(x,Q^2)$ についての式と、

(810) $$\delta g(x,Q^2) = \frac{dQ^2}{Q^2}\int_x^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{g/q}(z)\, \overbrace{q\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big)}^{+\bar{q}(\frac{x}{z},Q^2)} + \hat{P}_{g/g}(z)\, \overbrace{g\big(\tfrac{x}{z},Q^2\big)}^{\times 2}\Big]$$

$$- \frac{dQ^2}{Q^2}\, g(x,Q^2)\int_0^1 \frac{dz}{z}\ \frac{\alpha_s}{2\pi}\Big[\hat{P}_{g/g}(z) + \cancel{2}\, n_f\, \hat{P}_{q/g}(z)\Big]$$

が得られる。ここで、bare な分岐関数 $\hat{P}_{a/b}(z)$ の積分は $\epsilon < z < 1-\epsilon$

の様に正則化しておく。$\epsilon \to 0$ の極限で、(809)−(810) は、GL-AP 方程式に帰着すること、特に、規格化 (775) が得られることを確認してください。流入、流出による定式化は、クォーク数の保存、分岐によるエネルギーの保存を満たしているので、正則化によらず、$\epsilon \to 0$ 極限で GL-AP 方程式を再現するのです。

次に Sudakov 因子、

$$(811a)\quad \Delta_q(Q^2) = \exp\left\{ -\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \left[\hat{P}_{q/q}(z) + \hat{P}_{g/q}(z) \right] \right\}$$

$$(811b)\quad \Delta_g(Q^2) = \exp\left\{ -\int_{Q_0^2}^{Q^2} \frac{dQ'^2}{Q'^2} \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s(Q'^2)}{2\pi} \left[\hat{P}_{g/g}(z) + n_f \hat{P}_{q/g}(z) \right] \right\}$$

を定義すると、GL-AP 方程式 (809)−(810) が

$$(812a)\quad \frac{d}{d\ln Q^2} q(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \left[\hat{P}_{q/q}(z)\, q\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \hat{P}_{q/g}(z)\, g\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \right] \frac{\alpha_s}{2\pi} + q(x,Q^2) \frac{d}{d\ln Q^2} \ln \Delta_q(Q^2)$$

$$(812b)\quad \frac{d}{d\ln Q^2} g(x,Q^2) = \int_x^1 \frac{dz}{z} \frac{\alpha_s}{2\pi} \left[\hat{P}_{g/q}(z)\left(q\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + \bar{q}\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \right) + \hat{P}_{g/g}(z)\, g\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) \times 2 \right] + g(x,Q^2) \frac{d}{d\ln Q^2} \ln \Delta_g(Q^2)$$

となることを確認し、再に、

(813a) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\left(\frac{q(x,Q^2)}{\Delta_q(Q^2)}\right)=\frac{1}{\Delta_q(Q^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat{P}_{q/q}(z)\,q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+\hat{P}_{q/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

(813b) $$\frac{d}{d\ln Q^2}\left(\frac{g(x,Q^2)}{\Delta_g(Q^2)}\right)=\frac{1}{\Delta_g(Q^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat{P}_{g/q}(z)\left[q\left(\frac{x}{z},Q^2\right)+\bar{q}\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]+2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

が得られます。上の表式は、あるかじめ $z=0,1$ の特異性を正則化してスダコフ因子 $\Delta_q(Q^2)$, $\Delta_g(Q^2)$ を計算しておけば、同じ正則化を用いたbareな分岐関数 $\hat{P}_{a/b}(z)$ を用いて、$\ln Q^2$ 依存性を計算できることを意味します。更に、積分形にすると、

(814a) $$q(x,Q^2)=\Delta_q(Q^2)\,q(x,Q_0^2)+\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dQ'^2}{Q'^2}\frac{\Delta_q(Q^2)}{\Delta_q(Q'^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat{P}_{q/q}(z)\,q\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)+\hat{P}_{q/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\right]$$

(814b) $$g(x,Q^2)=\Delta_g(Q^2)\,g(x,Q_0^2)+\int_{Q_0^2}^{Q^2}\frac{dQ'^2}{Q'^2}\frac{\Delta_g(Q^2)}{\Delta_g(Q'^2)}\int_x^{1-\epsilon}\frac{dz}{z}\frac{\alpha_s}{2\pi}\left[\hat{P}_{g/q}(z)\left(q\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)+\bar{q}\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\right)+2\hat{P}_{g/g}(z)\,g\left(\frac{x}{z},Q'^2\right)\right]$$

MC法によって解くことができます。(840a), (840b) をじっとながめて、パートンシャワーができるのが分かりますか？ //