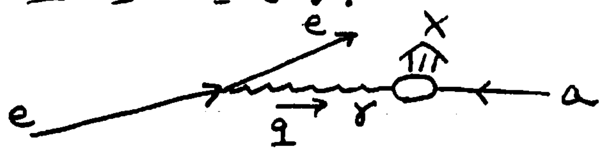
# QCD for Collider Physics Ⅹ

前回、「e中のγの分布」をQEDのtree近似で求めましたが、
結果 (688)〜(690) は次の様に整理できます。




(691) $d\sigma(ea\to eX)$

$$= \left(\frac{dD_{\gamma/e}}{d|q^2|}\right) d|q^2|\ dx\ \ d\hat{\sigma}(\gamma a\to X\ ;\ \hat{s}=sx)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-x)^2}{x}\,\frac{1}{|q^2|} - \frac{2(1-x)}{x}\,\delta(|q^2|)\right\} d|q^2|\,dx\,d\hat{\sigma}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\left\{\frac{1+(1-x)^2}{x}\ln\frac{Q^2}{|q^2|_{min}} - \frac{2(1-x)}{x}\right\} dx\ d\hat{\sigma}(\hat{s}=sx)$$

$$= D_{\gamma/e}(x, Q^2)\ \ dx\ d\hat{\sigma}(\hat{s}=sx)$$

ここで

(692)

$Q^2 \;=\; d\hat{\sigma}(\gamma^* a\to X\ ;\ \hat{s}=sx)$ を $d\hat{\sigma}(\gamma a\to X\ ;\ \hat{s}=sx)$
と近似しても良いスケールの上限 ($|q^2|<Q^2$) で
$\gamma a\to X$ の $p_T^2$ のスケール $Q^2\sim p_T^2$

$|q^2|_{min} = \dfrac{x^2}{1-x}m_e^2$ ⋯ kinematical boundary

$\delta(|q^2|) = \dfrac{|q^2|_{min}}{|q^2|^2}$ ⋯ 積分が $m_e\to 0$ で有限の部分

ヘリシティー保存による項 ⋯ — $\dfrac{1+(1-x)^2}{x}$
ヘリシティーフリップによる ⋯⋯ $x$

でした。ここで

(693) $$\hat{P}_{\gamma/e}(x) = \frac{1+(1-x)^2}{x}$$

を $e\to\gamma$ の分岐関数 (splitting function) と呼びます。

ここで「e中のeの分布」を

(694) $D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x)$

とすると、(691)の $D_{\gamma/e}(x, Q^2)$ の定義により、

(695)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} D_{\gamma/e}(x, Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(x)$$
$$= \int_0^1 dx' \int_0^1 dz \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(z)\, D_{e/e}(x', Q^2)\,\delta(x - x'z)$$
$$= \int_x^1 \frac{dz}{z}\frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{\gamma/e}(z)\, D_{e/e}\left(\frac{x}{z}, Q^2\right)$$

ここで重要なことは、分布関数 $D_{\gamma/e}(x, Q^2)$ は電子のスケール、$m_e$、に依存するけれど、その $Q^2$ 依存性は $m_e$ に依存しないことです。

一般に、

(696)
$$\begin{cases} m^2 & \cdots \text{小さな mass スケール} = \text{長距離物理のスケール} \ (m_e, \Lambda_{QCD}) \\ Q^2 & \cdots \text{大きな energy スケール} = \text{短距離物理のスケール} \ (p_T \text{など}) \end{cases}$$

に共に依存する観測量（断面積など）が

(697) $d\sigma(Q^2, m^2) = d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) \otimes f(\mu_F^2, m^2)$

の様に、
$$\begin{cases} m^2 \text{に依存しない部分} = d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) = \text{短距離物理} \ と \\ m^2 \text{に依存する部分} = f(\mu_F^2, m^2) = \text{長距離物理} \ とに \end{cases}$$

分離することを因子化（factorization）と呼びます。

ここで、$\mu_F^2$ は短距離部分と長距離部分を分離する任意のスケールです。因子化が存在すると、(697) 式で、左辺は $\mu_F^2$ によりませんから、

(698) $$0 = \frac{d}{d\ln\mu_F^2} d\sigma(Q^2, m^2)$$
$$= \left[\frac{d}{d\ln\mu_F^2} d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2)\right] \otimes f(\mu_F^2, m^2) + d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2) \otimes \left[\frac{d}{d\ln\mu_F^2} f(\mu_F^2, m^2)\right]$$

が成立します。これは図式的に

(699) $$\frac{d}{d\ln\mu_F^2} \ln f(\mu_F^2, m^2) = -\frac{d}{d\ln\mu_F^2} \ln d\hat{\sigma}(Q^2, \mu_F^2)$$
$$= P(\mu_F^2)$$

我々の最初の例では、$f(\mu_F^2, m^2)$ が「e中の$\gamma$の分布関数」でした。$\mu_F^2 = Q^2$ ととると「仮想光子の近似」が良くなるのでそうとりましたが、exact な断面積は $\mu_F^2$ に依りません。$P$ が splitting 関数ですが、因子化のため、$P$ は $m^2$ にも $Q^2$ にもよりません。$\mu_F^2$ によることはできます。QEDの例では $\mu_F$ 依存性が見えませんが、QCDの例では、$\alpha_s(\mu_F)$ の $\mu_F$ 依存性として顕在化します。ここで「因子化が存在する場合、断面積は形式的に因子化のスケール $\mu_F$ に依存しないが、低次の近似が良いのは $\mu_F^2 \sim Q^2$ の場合だ」と

覚えておいてください。

因子化(697)と、因子化スケール$\mu_F$への非依存性の式(699)は、場の理論の「くり込み」と、物理量のくり込みスケールへの非依存性を表わすくり込み群方程式(Renormalization Group Eq.)の関係と良く似ています。くり込み理論では、

$$(700)\quad \underbrace{d\sigma(Q, g_B^2)_B}_{\text{Bareな理論}} = \underbrace{d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R}_{\text{くり込まれた理論で計算された断面積}}$$

Bareな理論
=
短距離の「真の」理論
例 { GUT ($g_{1B}^2 = g_{2B}^2 = g_{3B}^2$)
　 { 弦理論の有効理論
=
「正則化」された理論
例 { Lattice QCD
　 { $D = 4 - 2\epsilon$ の連続QCD

⇐ 全て同じ対称性(ゲージ対称性)をもつ

⇓ 普遍性(universality)

「くり込まれた理論の予言は、Bareな理論の詳細によらない」

ここでスケール$\mu$でくり込まれた理論は$\mu \sim Q$のスケールの物理を記述するときに、摂動論による近似が良い。例えばGUTの場合、

$$(701)\quad g_{1B}^2 = g_{2B}^2 = g_{3B}^2 \Rightarrow g_{1R}^2(\mu) \ll g_{2R}^2(\mu) \ll g_{3R}^2(\mu) \ @ \ \mu \ll M_{GUT}$$

となり、例えば$Q \approx 100\,\mathrm{GeV}$の物理を計算する場合、$\mu \approx Q$でくり込まれた理論でなければ良い近似は得られない。

にもかかわらず形式的に、観測量（S行列要素、断面積等）はくり込みスケール$\mu$に依存しない。

(701) $$0=\mu\frac{d}{d\mu}\Big|_B d\sigma(Q, g_B^2)_B$$

$$=\mu\frac{d}{d\mu}\Big|_B d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R$$

$$=\Big[\mu\frac{\partial}{\partial\mu}+\underbrace{\mu\frac{d}{d\mu}\Big|_B g_R^2(\mu)}_{\beta(g_R^2(\mu))}\frac{\partial}{\partial g_R^2(\mu)}\Big]d\sigma(Q, g_R^2(\mu), \mu)_R$$

ここで因子化との関係を次の様にとらえることもできます。

(702) $f(\mu_F^2, m^2)$ …… 分布関数，ジェット関数等 ~~の~~ の値は長距離の物理に依存して決まるけれど、その$\underbrace{\mu_F\text{依存性}}_{\text{GL-AP-Eq.}}$は$\mu_F$のスケールの摂動論で記述される。

$g_R^2(\mu)$ …… くり込まれた結合定数の値は短距離の物理(例えばGUT, string等)に依存して決まるけれど、その$\underbrace{\mu\text{依存性}}_{\text{R.G.E.}}$は$\mu$のスケールの摂動論で記述される。

せっかくですからここでQCDの$\beta$関数とrunning coupling constantを「計算抜き」で紹介しておきましょう。

β関数と $g_R^2(\mu)$ は「くり込み処法」に依存するので、$\overline{MS}$ を使います。

$$(703)\quad \begin{cases} a(\mu) \equiv \dfrac{\alpha_s(\mu)}{\pi}\overline{MS} \\ \beta_{\overline{MS}} \equiv \mu^2 \dfrac{d}{d\mu^2}\Big|_B \dfrac{\alpha_s(\mu)_{\overline{MS}}}{\pi} = -\left(b_0 a^2 + b_1 a^3 + b_2 a^4 + \cdots\right) \\ b_0 = \dfrac{11}{12}C_A - \dfrac{1}{3}T_F n_f = \dfrac{33-2n_f}{12} \\ b_1 = \dfrac{17}{24}C_A^2 - \dfrac{5}{12}C_A T_F n_f - \dfrac{1}{4}C_F T_F n_f = \dfrac{153-19n_f}{24} \end{cases}$$

Running coupling constant は

$$(704)\quad \frac{d}{d\ln\mu^2}a(\mu) = -\left(b_0 a^2 + b_1 a^3 + \cdots\right)$$

$$(704)'\quad \int_{a(\mu)}^{a(Q)} \frac{da}{a^2\left(1+\frac{b_1}{b_0}a+\cdots\right)} = -b_0\int_\mu^Q d\ln\mu^2 = -b_0\ln\frac{Q^2}{\mu^2}$$

$$= \int_{a(\mu)}^{a(Q)} da\left\{\frac{1}{a^2} - \frac{b_1}{b_0}\frac{1}{a} + \left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2 \frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0}a}\right\}$$

$$= \left[-\frac{1}{a} - \frac{b_1}{b_0}\ln a + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(1+\frac{b_1}{b_0}a\right)\right]_{a(\mu)}^{a(Q)}$$

$$= \left[-\frac{1}{a} + \frac{b_1}{b_0}\ln\left(\frac{1}{a}+\frac{b_1}{b_0}\right)\right]_{a(\mu)}^{a(Q)}$$

$$(704)''\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a(Q)} - \dfrac{b_1}{b_0}\ln\left(\dfrac{1}{a(Q)}+\dfrac{b_1}{b_0}\right) = b_0\ln\dfrac{Q^2}{\Lambda^2} & \cdots\ a(Q)\text{のQ依存性} \\ \dfrac{1}{a(\mu)} - \dfrac{b_1}{b_0}\ln\left(\dfrac{1}{a(\mu)}+\dfrac{b_1}{b_0}\right) = b_0\ln\dfrac{\mu^2}{\Lambda^2} & \cdots\ \Lambda\text{の定義} \end{cases}$$

2005. 9. 9

(704)″は逐次解くことができて．

$$(705)\quad a(Q)=\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\;\frac{1}{1+\frac{b_1}{b_0}a(Q)\ln\left(\frac{1}{a(Q)}+\frac{b_1}{b_0}\right)}$$

$$=\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\left[1-\frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\ln\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}+\frac{b_1}{b_0}\right)+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\left[1-\frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\ln\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)\left(1+\frac{b_1}{b_0}\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}\right)+\cdots\right]$$

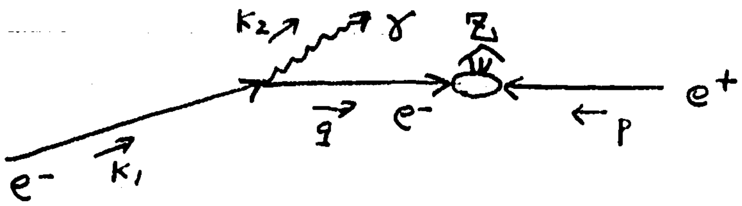
$$(705)'\quad =\frac{1}{b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}}-\frac{b_1}{b_0^2}\frac{\ln\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^2}+O\left(\frac{\ln^2\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}{\left(b_0\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)^3}\right)$$

(705)′式の第二項でtruncateした式をNLOとして使うことが多いが，NLOのくり込み群方程式［(704)式で $b_1a^3$ まで］の解としては誤差が大きい。$a^3\ln^2\left(\frac{1}{a}\right)$ を無視するためである．(705)の第一式を逐次的に解けば，高次の項を足しあげることができる．私はいつも（と言っても25年位前のことですけれど）$a(Q)$ の数値解をNLOの $\overline{\mathrm{MS}}$ 結合としていたが，(705)′のtruncationの誤差が大きいため，$\Lambda=\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}$ の数値に有意な差が現れました。他の方の結果と比較するためには，結局，(705)′の表式を使わざるを得ませんでした．NNLO（$\beta_{\overline{\mathrm{MS}}}=-b_0a^2-b_1a^3-b_2a^4$）にすると，数値的誤差は縮まります。$a^n\left(\ln^{n-1}\frac{1}{a}\right)$ の様な大きな項を無視するのは良くないという論文を書きましたが無視されました。［KH, PLB118, 141 (1982)］．

さて、QEDにもどります。私がQEDを因子化の例として使うのは、QEDでは $m_e$ のスケールの物理も摂動論で取り扱えるため、分布関数の値そのものが摂動論で計算できるからです。

今度は $D_{e/e}(x, Q^2)$ (694) 式の $O(\alpha)$ 項を求めます。例として

(706) $d\sigma(e^-e^+ \to \gamma Z) \approx D_{e/e}(x, Q^2=m_Z^2)\,dx\,d\hat{\sigma}(e^-e^+\to Z\,;\,m_Z^2 = sx)$




(707) $$M \sim \bar{v}(p,\bar{\lambda})\,\not{\epsilon}_Z^*\,(g_V^{Zee}-g_A^{Zee}\gamma_5)\,\frac{\not{q}+m_e}{q^2-m_e^2}\,\not{\epsilon}_\gamma^*(-e)\,u(k_1,\lambda)$$

$$\sim \bar{v}(p,\bar{\lambda})\,\not{\epsilon}_Z^*(g_V-g_A\gamma_5)\,\frac{\sum_{\lambda'} u(q,\lambda')\bar{u}(q,\lambda')}{q^2-m_e^2}\,\not{\epsilon}_\gamma^*(-e)\,u(k_1,\lambda)$$

$$\sim \underbrace{\bar{v}(p,\bar{\lambda}=-\lambda)\,\not{\epsilon}_Z^*(g_V-g_A\gamma_5)\,u(q,\lambda)}_{M(e^-e^+\to Z)}\,\frac{1}{q^2-m_e^2}\,\underbrace{\bar{u}(q,\lambda)\,\not{\epsilon}_\gamma^*(-e)\,u(k_1,\lambda)}_{M(e^-\to\gamma e^-)}$$

ここで伝播する $e^-$ は virtual ($|q^2|>m_e^2$) ですが、on-shell ($q^2=m_e^2$) の近似（仮想実電子の近似）が $|q^2|<Q^2\sim m_Z^2$ まで良い近似となります。

kinematics から

(708) $$q^2 - m_e^2 = (k_1 - k_2)^2 - m_e^2$$

$$= -2k_1 k_2 \qquad \begin{cases} k_1^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1, 0, 0, \beta) \\ k_2^\mu = \frac{\sqrt{s}}{2}(1-x)(1, \sin\theta, 0, \cos\theta) \end{cases}$$

$$= -\frac{s}{2}(1-x)(1-\beta\cos\theta)$$

(708)' $$|q^2 - m_e^2|_{min} = \frac{s}{2}(1-x)(1-\beta) \simeq \frac{s}{2}(1-x)\frac{1-\beta^2}{1+\beta} \approx (1-x)m_e^2$$

(709) $$\frac{dD_{e/e}}{d|q^2|} = \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+x^2}{1-x}\frac{1}{|q^2 - m_e^2|}$$

(709)' $$D_{e/e}(x, Q^2) = \int_{|q^2 - m_e^2|_{min}}^{Q^2} d|q^2| \frac{dD_{e/e}(x)}{d|q^2|}$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi}\frac{1+x^2}{1-x} \ln\frac{Q^2}{(1-x)m_e^2}$$

これを(694)式に足すと

(710) $$D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi}\hat{P}_{e/e}(x)\ln\frac{Q^2}{m_e^2}$$

ここまでの近似では「$e^-$中の$e^-$の数」は変化しないので

(711) $$\int_0^1 dx\, D_{e/e}(x, Q^2) = 1$$

を満たすように、規格化されたsplitting関数を

(712) $$\int_0^1 dx\, P_{e/e}(x) = 0 \quad ; \quad P_{e/e}(x) = \hat{P}_{e/e}(x) = \frac{1+x^2}{1-x} \quad \text{at } x \neq 1$$

の様に定義する。$\hat{P}(x)$ の $x=1$ での $\overbrace{\text{singularity}}^{IR}$ を正規化し、virtual correctionの効果を加えることに対応する。

(7/3)
$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 dx \, \frac{f(x)}{(1-x)_+} \equiv \int_0^1 dx \, \frac{f(x)-f(1)}{1-x} \\[2ex] \displaystyle\frac{1}{(1-x)_+} = \frac{1}{1-x} \quad \text{at } x \neq 1 \end{cases}$$

で distribution $\frac{1}{(1-x)_+}$ を定義すると、

(7/4)
$$P_{e/e}(x) = \frac{1+x^2}{(1-x)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-x)$$

(7/4)'
$$\int_0^1 dx \, P_{e/e}(x) = \int_0^1 dx \, \frac{(1+x^2)-2}{1-x} + \frac{3}{2} = -\int_0^1 dx \, (1+x) + \frac{3}{2} = 0$$

となる。分布関数

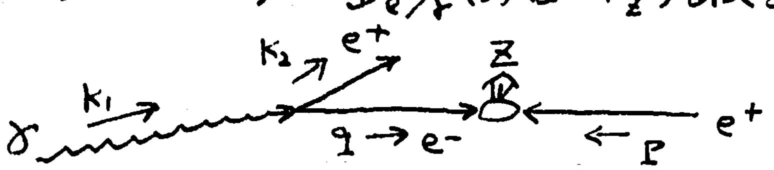
(7/5)
$$D_{e/e}(x, Q^2) = \delta(1-x) + \frac{\alpha}{2\pi} P_{e/e}(x) \ln\frac{Q^2}{m_e^2}$$

は規格化されている。
$x=1$ を含めて

次に $\gamma \to e$ の splitting 関数 $\hat{P}_{e/\gamma}(x)$ と「$\gamma$ 中の $e^-$ の分布関数」

$D_{e/\gamma}(x, Q^2)$ を求めます。簡単な例は

(7/6)
$$d\sigma(\gamma e^+ \to e^+ Z) \approx D_{e^-/\gamma}(x, Q^2 = m_Z^2)\, dx \, d\hat{\sigma}(e^- e^+ \to Z \,;\, m_Z^2 = sx)$$




(7/6)'
$$M \sim \bar{v}(p,\bar\lambda)\, \not\epsilon_Z^* (g_V^{Zee} - g_A^{Zee}\gamma_5) \frac{\not q + m_e}{q^2 - m_e^2} \not\epsilon_\gamma (-e)\, v(k_1, \lambda)$$

$$\approx \underbrace{\bar{v}(p, \bar\lambda = -\lambda)\, \not\epsilon_Z^* (g_V^{Zee} - g_A^{Zee}\gamma_5)\, u(q,\lambda)}_{M(e^- e^+ \to Z)} \frac{1}{q^2 - m_e^2} \underbrace{\bar{u}(q,\lambda)(-e\not\epsilon_\gamma)\, v(k_2,\lambda)}_{M(\gamma \to e^+ e^-)}$$

$\gamma \to e^+e^-$ の振幅 $-e\bar{u}(q,\lambda)\gamma^\mu v(k,\lambda)\epsilon_\mu(k_1,\lambda_1)$ は簡単に計算できて.

(7/7) $$\frac{dD_{e/\gamma}}{d|q^2|} = \frac{\alpha}{2\pi}[x^2+(1-x)^2]\frac{1}{|q^2-m_e^2|}$$

(7/7)' $$D_{e/\gamma}(x,Q^2) = \int_{|q^2-m_e^2|_{min}}^{Q^2} d|q^2| \frac{dD_{e/\gamma}(x)}{d|q^2|}$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi}[x^2+(1-x)^2] \ln\frac{Q^2}{(1-x)m_e^2}$$

(7/7)'' $$\hat{P}_{e^-/\gamma}(x) = x^2+(1-x)^2 = \hat{P}_{e^+/\gamma}(x) = P_{e/\gamma}(x)$$

最後に

(7/8) $$\int_0^1 dx\,[\,P_{e/\gamma}(x)+P_{\gamma/\gamma}(x)\,] = 0$$

となるように $P_{\gamma/\gamma}(x) = A\,\delta(1-x)$ を規格化すると.

(7/8)' $$P_{\gamma/\gamma}(x) = -\frac{2}{3}\delta(1-x).$$

これで（$e^\pm$ と $\gamma$ だけの）QED の分布関数の発展方程式が決定：

(7/9) $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{\gamma/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{\gamma/e}(z)\Big[D_{e^-/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)+D_{e^+/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)\Big] + P_{\gamma/\gamma}(z)D_{\gamma/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)\Big\}$$

(7/9)' $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{e^-/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{e/e}(z)D_{e^-/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)+P_{e/\gamma}(z)D_{\gamma/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)\Big\}$$

(7/9)'' $$\frac{d}{d\ln Q^2}D_{e^+/a}(x,Q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_x^1\frac{dz}{z}\Big\{P_{e/e}(z)D_{e^+/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)+P_{e/\gamma}(z)D_{\gamma/a}(\tfrac{x}{z},Q^2)\Big\}$$

ここで、$a$ は $a=e^-, e^+, \gamma$ でも $a=$ hadron でも良い。

QEDの splitting 関数は

$$(720)\begin{cases} P_{e/e}(z) = \dfrac{1+z^2}{(1-z)_+} + \dfrac{3}{2}\delta(1-z) \\ P_{\gamma/e}(z) = \dfrac{1+(1-z)^2}{z} \\ P_{e/\gamma}(z) = z^2+(1-z)^2 \\ P_{\gamma/\gamma}(z) = -\dfrac{2}{3}\delta(1-z) \end{cases}$$

$$\Big\} \ \hat{P}_{e/e}(z) = \hat{P}_{\gamma/e}(1-z) = \frac{1+z^2}{(1-z)^2}$$

$$\hat{P}_{e/\gamma}(z) = z^2+(1-z)^2$$

$$\hat{P}_{\gamma/\gamma}(z) = 0$$

Leading Log $\left( (\frac{\alpha}{\pi})^n \ln^n(Q^2/m_e^2) \right)$ の近似で、例えば、$D_{b/e}(x, Q^2)$ 分布関数は、初期条件

$$(721)\begin{cases} D_{e/e}(x, Q^2=m_e^2) = \delta(1-x) \\ D_{\gamma/e}(x, m_e^2) = D_{e^+/e}(x, m_e^2) = 0 \end{cases}$$

から (719) によって求まる。やってみてください。又、より正確な分布関数、(691) や (710) を初期条件として、$Q^2$ 発展を追うこともできる。

例として、(721) を出発点にして、(719) を $\frac{\alpha}{\pi}$ の逐次展開で解いてみます。

(719) を積分形にすると、

$$(722)\begin{cases} D_{\gamma/e}(x,Q^2) - D_{\gamma/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{\gamma/e}(z)\Big[D_{e/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) + D_{e^+/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2)\Big] \\ \qquad\qquad + P_{\gamma/\gamma}(z) D_{\gamma/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \\ D_{e/e}(x,Q^2) - D_{e/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{e/e}(z) D_{e/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) + P_{e/\gamma}(z) D_{\gamma/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \\ D_{e^+/e}(x,Q^2) - D_{e^+/e}(x,m_e^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi}\displaystyle\int_{m_e^2}^{Q^2} d\ln Q'^2 \int_x^1 \frac{dz}{z} \Big\{ P_{e/e}(z) D_{e^+/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) + P_{e/\gamma}(z) D_{\gamma/e}(\tfrac{x}{z},Q'^2) \Big\} \end{cases}$$

(721)の初期条件（第0次解）を(722)式の右辺に代入すると、

$$
(723)\begin{cases}
D^{(1)}_{\gamma/e}(x,Q^2) = \dfrac{\alpha}{2\pi} P_{\gamma/e}(x) \ln\dfrac{Q^2}{m_e^2} \\
D^{(1)}_{e/e}(x,Q^2) = \delta(1-x) + \dfrac{\alpha}{2\pi} P_{e/e}(x) \ln\dfrac{Q^2}{m_e^2} \\
D^{(1)}_{e^+/e}(x,Q^2) = 0
\end{cases}
$$

が得られる。(723)の第1次解を(722)式の右辺に代入すると第2次解

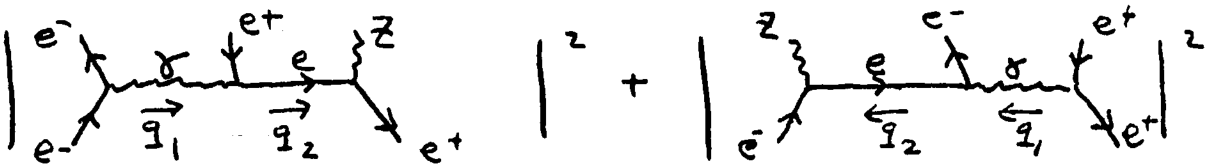
$$
(724)\begin{cases}
D^{(2)}_{\gamma/e}(x,Q^2) = \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right) P_{\gamma/e}(x) \\
\qquad + \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{\gamma/e}(z)P_{e/e}\left(\dfrac{x}{z}\right) + P_{\gamma/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right] \\
D^{(2)}_{e/e}(x,Q^2) = \delta(1-x) + \left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right) P_{e/e}(x) \\
\qquad + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{e/e}(z)P_{e/e}\left(\dfrac{x}{z}\right) + P_{e/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right] \\
D^{(2)}_{e^+/e^-}(x,Q^2) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^2 \displaystyle\int_x^1 \dfrac{dz}{z}\left[P_{e/\gamma}(z)P_{\gamma/e}\left(\dfrac{x}{z}\right)\right]
\end{cases}
$$

$\delta(1-x)$ や $\dfrac{1}{(1-z)_+}$ 等が入っているので、もう一歩計算が必要です。やってみてください。以後、逐次的に $\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}\ln\dfrac{Q^2}{m_e^2}\right)^n$ の全ての項を足すことができます。(719)式の数値解は全ての項の足しあげになっているので、LL (leading Log) または LO (leading Order) と呼びます。

ところで (724) の第三式，$D^{(2)}_{e^+/e^-}(x,Q^2)$ は，$e^+e^-\to e^+e^-Z$ 過程の断面積を

(725) $d\sigma(e^-e^+\to e^-e^+Z) = \left[D^{(2)}_{e^+/e^-}(x,m_Z^2)+D^{(2)}_{e^-/e^+}(x,m_Z^2)\right]dx\, d\hat{\sigma}(e^+e^-\to m_Z^2)$

と近似したときに現れます．Feynman図は

(726) 


左図の場合，$e^+e^-$ は $e^-$ ビームの向き，右図のときは $e^+$ ビームの向きに放出されるので，干渉は無視できます。左図の寄与は，

(727) $$[d\sigma]_{左図} = \int_{m_e^2}^{|q_2^2|}\frac{dD_{\gamma/e}(x_1)}{d|q_1^2|}d|q_1^2|dx_1\int_{m_e^2}^{m_Z^2}\frac{dD(x_2)}{d|q_2^2|}d|q_2^2|dx_2\ \underbrace{\hat{\sigma}(e^+e^-\to Z)}_{\propto\,\delta(m_Z^2-sx_1x_2)}$$

と評価されます．ここで，mass-ordering

(728) $|q_1^2| < |q_2^2|$

が決定的に重要な役割りをはたします。(727)式は

(729) $$[d\sigma]_{左図} = \int_{m_Z}^{m_Z^2} d|q_2|^2 D_{\gamma/e}(x_1,|q_2^2|)\frac{dD(x_2)_{e/\gamma}}{d|q_2^2|}\,dx_1dx_2d\hat{\sigma}_{e^+e^-\to Z}$$

$$=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\int_{m_e^2}^{m_Z^2}\frac{d|q_2^2|}{|q_2^2|}\ln\frac{|q_2|^2}{m_e^2}P_{\gamma/e}(x_1)P_{e/\gamma}(x_2)dx_1dx_2d\hat{\sigma}_{e^+e^-\to Z}$$

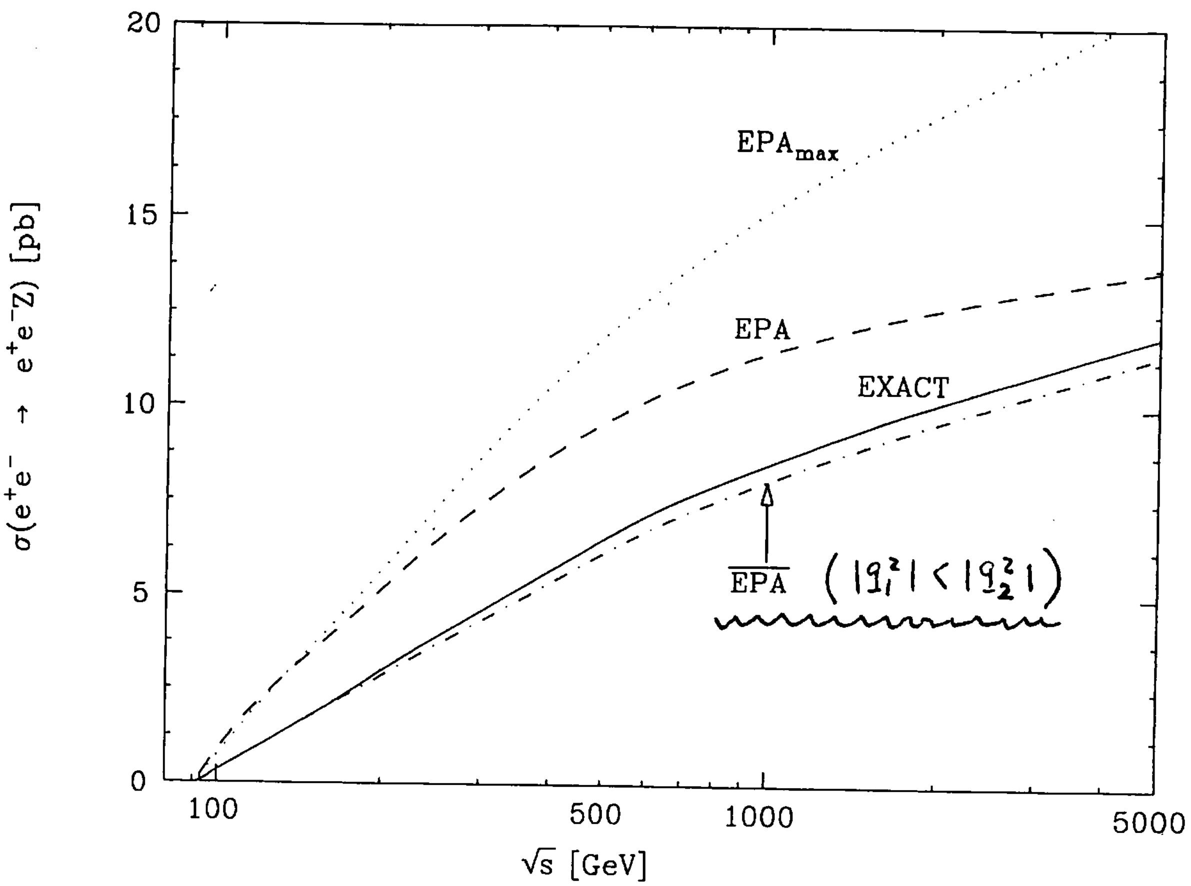
$$=\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\frac{1}{2}\left(\ln\frac{m_Z^2}{m_e^2}\right)^2\int dx_1dx_2P_{\gamma/e}(x_1)P_{\gamma/e}(x_2)d\hat{\sigma}_{e^+e^-\to Z}$$

ここで，$\frac{1}{2}$ の項が mass-ordering (728) の帰結であることを確認してください。(724)式の $\frac{1}{2}$ の origin は mass-ordering にあるわけです．

Mass-ordering に留意せず、不用意に「仮想実粒子の分布関数」を使って、

$$(730)\quad [d\sigma]_{左図} = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2\, D_{\gamma/e}(x_1, m_Z^2)\, D_{e/\gamma}(x_2, m_Z^2)\, d\hat{\sigma}_{e^+e^-\to Z}$$

とすると大幅な過大評価をしてしまいます。QEDのexactな断面積が、mass-ordering (728)を考慮するだけで、良く近似されることを示したのが次の図です。[KH et al, NPB365, 544(1991); Fig.8]




この論文では、(727)式の様に、$|q_1^2|$, $|q_2^2|$ の分布を使って、Zの $p_T$ 分布, E分布等が数%の精度で計算できることを示しました。//

# GL-AP 方程式

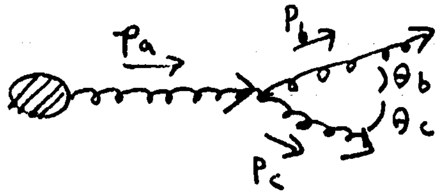
QEDの発展方程式をQCDにするために必要なのは $g \to g$ 分岐関数だけです。Helicity振幅から簡単に求まりますが、ここでは、

(731) R.K. Ellis, W.J. Stirling, B.R. Webber, QCD & Collider Physics, Cambridge U. Press (1996)

に従って、グルーオンのリニア偏極を考慮した導出をします。

グルオンのリニア(面)偏極は collider 物理で重要な役割りを果たすからです。time-like (jet) の分岐を考えます。

(732)




$$E_b = zE_a$$
$$E_c = (1-z)E_a$$
$$z\sin\theta_b = (1-z)\sin\theta_c \quad (\Sigma p_T = 0)$$

$$p_a^2 = 2E_bE_c(1-\cos\theta_{bc}) = E_a^2 z(1-z)\theta^2$$

$$\theta = \theta_b + \theta_c = \frac{1}{E_a}\sqrt{\frac{p_a^2}{z(1-z)}} = \frac{\theta_b}{1-z} = \frac{\theta_c}{z}$$

(733)
$$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2} \varepsilon_a^{\alpha} \varepsilon_b^{\beta *} \varepsilon_c^{\gamma *} g f^{abc} \left[ (p_a+p_b)_\gamma g_{\alpha\beta} + (-p_b+p_c)_\alpha g_{\beta\gamma} + (-p_c-p_a)_\beta g_{\gamma\alpha} \right]$$

$$= M_n \frac{2gf^{abc}}{p_a^2} \left[ (p_b\cdot\varepsilon_c^*)(\varepsilon_a\cdot\varepsilon_b^*) + (p_c\cdot\varepsilon_a)(\varepsilon_b^*\cdot\varepsilon_c^*) - (p_c\cdot\varepsilon_b^*)(\varepsilon_a\cdot\varepsilon_c^*) \right]$$

ここで、散乱(分岐)面内と面に垂直な偏極をベースにとると、

(734)
$$(\varepsilon_a^\mu)_{in} = (0, 1, 0, 0) \qquad (\varepsilon_a^\mu)_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\varepsilon_b^\mu)^*_{in} = (0, 1, 0, -\theta_b) \qquad (\varepsilon_b^\mu)^*_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

$$(\varepsilon_c^\mu)^*_{in} = (0, 1, 0, \theta_c) \qquad (\varepsilon_c^\mu)^*_{out} = (0, 0, 1, 0)$$

2005.9.9

(735) $p_b^\mu = E_a z(1, \theta_b, 0, 1)$ , $p_c^\mu = E_a(1-z)(1, -\theta_c, 0, 1)$

(734),(735)より、$\theta^2$ 項を無視して

(736)
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_i^{in}\cdot\varepsilon_j^{in} &= \varepsilon_i^{out}\cdot\varepsilon_j^{out} = -1 \\ \varepsilon_i^{in}\cdot\varepsilon_j^{out} &= \varepsilon_i^{out}\cdot p_j = 0 \end{aligned}\right\} \text{for all } (i,j) = (a,b),(a,c),(b,c)$$

$$\varepsilon_a^{in}\cdot p_b = -E_a z(\theta_b+\theta_c) = -E_a z\theta$$

$$\varepsilon_a^{in}\cdot p_c = E_a(1-z)\theta_b = E_a z(1-z)\theta$$

$$\varepsilon_b^{in}\cdot p_c = E_a(1-z)(\theta_c+\theta_b) = E_a(1-z)\theta$$

振幅が全て$\theta$に比例するので、propagator $1/p_a^2 = 1/E_a^2 z(1-z)\theta^2$ と合わせ、$1/\theta$ と振舞うのは、QEDと同じ。$1/E_a\theta$ を因子化すると、

(737)

| $\varepsilon_a$ | $\varepsilon_b$ | $\varepsilon_c$ | amp | $(\text{amp})^2/z(1-z)$ |
|---|---|---|---|---|
| in | in | in | $1-z(1-z)$ | $(1-z)/z + z/(1-z) + z(1-z)$ |
| in | out | out | $z(1-z)$ | $z(1-z)$ |
| out | in | out | $-(1-z)$ | $(1-z)/z$ |
| out | out | in | $z$ | $z/(1-z)$ |

$\varepsilon_a$ で average, $\varepsilon_b, \varepsilon_c$ のスピンを足すと、

(738) $$\hat{P}_{g/g}(z) = C_A\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)\right]$$

が得られる。Helicity振幅を使うより、少し楽に計算できたように思います。文献(731)の紹介をした理由は、$\varepsilon_a(p_a, s_a)$ が linear に偏極した場合の splitting をとり扱っているからです。散乱によって生成されたグルーオンは散乱面内に(linearに)偏極します。

今、散乱面が、上の(735)式の分岐面とφだけずれているとしましょう。

(739) $\varepsilon_a^{\mu}(p_a, s_a) = (0, \cos\phi, \sin\phi, 0)$

このinitial stateの分岐は

(740) $$\hat{P}_{g/g}(z,\phi) = \sum_{s_b, s_c} \left| \cos\phi\, M(\varepsilon_a^{in}, \varepsilon_b, \varepsilon_c) + \sin\phi (\varepsilon_a^{out}, \varepsilon_b, \varepsilon_c) \right|^2$$

$$= C_A \left\{ \cos^2\phi \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + 2z(1-z) \right] + \sin^2\phi \left[ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} \right] \right\}$$

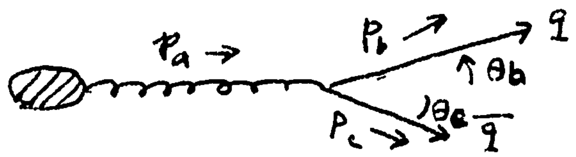
$$= C_A \left\{ \frac{1-z}{z} + \frac{z}{1-z} + z(1-z)[1+\cos 2\phi] \right\}$$

φについて平均すれば(738)にもどりますが、僅かに($z=\frac{1}{2}$のとき $\frac{1}{9} \approx 10\%$位)散乱面の中に分岐しやすいことがわかります。

僅かなのですが、この相関は $g \to q\bar{q}$ 分岐の場合と逆なので重要です。

この相関に気をつけながら $g \to q\bar{q}$ 分岐を計算します。

(741)




(742) $$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2} \varepsilon_a^{\mu}\, g T^a\, \bar{u}(p_b, \lambda) \gamma_\mu v(p_c, -\lambda)$$

$$= M_n \frac{1}{p_a^2} g T^a\, \varepsilon_a \cdot J_\lambda$$

(743) $J_+^\mu = u(p_b,+)_+^\dagger\, \sigma_+^\mu\, v(p_c,-)_+$

$$= \sqrt{2E_b}\,\chi_+(\vec{p}_b)^\dagger \sigma_+^\mu \left(-\sqrt{2E_c}\right)\chi_+(\vec{p}_c)$$

$$= -2\sqrt{E_bE_c}\,\left(\cos\frac{\theta_b}{2}, \sin\frac{\theta_b}{2}\right)^\dagger \sigma_+^\mu \begin{pmatrix}\cos\left(\frac{-\theta_c}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{-\theta_c}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$= -2\sqrt{E_bE_c}\,\left(1, \frac{\theta_b}{2}\right)^\dagger \left[1, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\-\frac{\theta_c}{2}\end{pmatrix}$$

$$= -2E_a\sqrt{z(1-z)}\left[1, -\frac{\theta_c}{2}+\frac{\theta_b}{2}, i\frac{\theta_c}{2}+i\frac{\theta_b}{2}, 1\right]$$

$$= -2E_a\sqrt{z(1-z)}\left[1, \frac{1-2z}{2}\theta, i\frac{\theta}{2}, 1\right]$$

Linear偏極の $\varepsilon_a^\mu$ (739)式との contraction は

(744)
$$\begin{cases} \varepsilon_a^\phi\cdot J_+ = 2E_a\sqrt{z(1-z)}\left\{\frac{\theta}{2}\left[(1-2z)\cos\phi + i\sin\phi\right]\right\} \\ |\varepsilon_a^\phi\cdot J_+|^2 = E_a^2\, z(1-z)\,\theta^2\left[(1-2z)^2\cos^2\phi + \sin^2\phi\right]\end{cases}$$

$|\varepsilon_a^\phi\cdot J_-|^2$も全く同じ（Parity）なので、カラー因子を考慮して

(745) $\hat{P}_{q/g}(z, \varepsilon_g^\phi) = T_R\left[(1-2z)^2\cos^2\phi + \sin^2\phi\right]$

$$= T_R\left[z^2 + (1-z)^2 - 2z(1-z)\cos 2\phi\right]$$

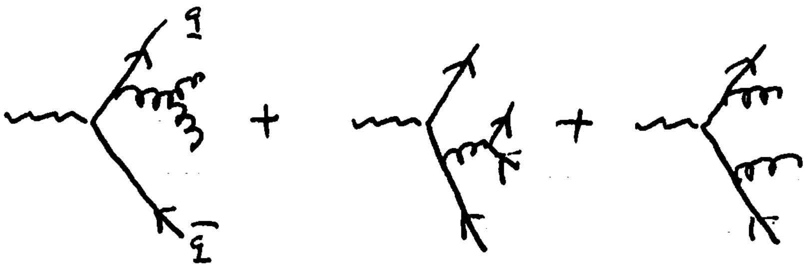
つまり、$g\to q\bar{q}$分岐は、散乱面（gのlinear偏極の面）と直角に起きやすい［$z=\frac{1}{2}$では100%！］わけです。

1988年、Bengtson-Zerwas［PLB208, 306 (1988)］はこの相関を利用した$ggg$結合のテストを提案しました。

(746) $\begin{cases} e^+e^- \to 4j & E_1 > E_2 > E_3 > E_4 \\ \cos\chi_{BZ} = \dfrac{(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2)\cdot(\vec{p}_3 \times \vec{p}_4)}{|\vec{p}_1 \; \vec{p}_2|\,|\vec{p}_3 \; \vec{p}_4|} & \end{cases}$

$E_1 > E_2 > E_3 > E_4$ より、$P_1$ と $P_2$ が $q$ と $\bar{q}$，$P_3$ と $P_4$ が $gg$ や，$g \to q\bar{q}$

(747)

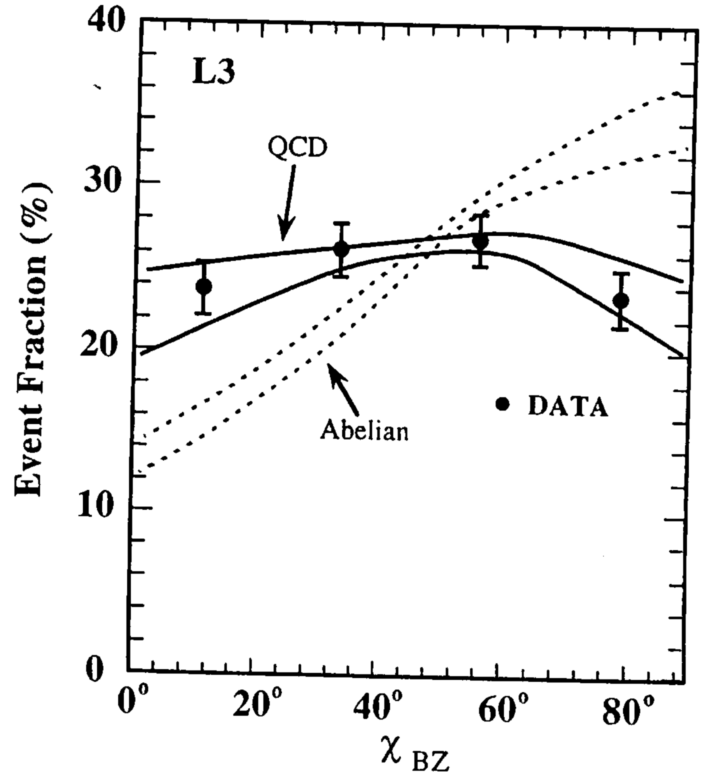



の分岐である確率が高いわけです。$\vec{p}_1 \times \vec{p}_2$ は $q\bar{q}g^*$ の散乱面，従って $g^*$ の偏極面を定め、$\vec{p}_3 \times \vec{p}_4$ が分岐面を定めます。もし、$ggg$ 結合が無ければ（Abelian グルーオン模型）(745) により、$\chi_{BZ} \sim \phi \sim 90°$ に強い相関があるはずで、QCD では $C_A \gg T_F$ なので、この相関がうすまるはずです。

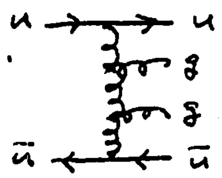
右図は L3 による検証です。

[L3, PLB248, 227 (1990)]

TRISTAN では 4-jet rate が増えるところまでしかできませんでした。

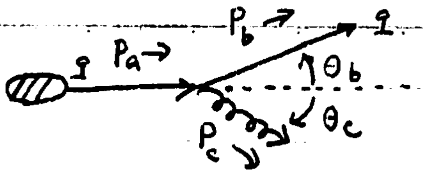


余談：(740)で $g\to gg$ 分岐は $g$ の linear pol. の面（一般に $g$ 生成事象の散乱面）内に 10% 程度出やすいことが分かったが、これは事実上、軸対称として良いと思う。第一回の 6-jet background の平面性は、従って、$g\to gg$ 分岐では説明できない。t-channel 過程、例えば 4 jet なる $u\bar{u}\to u\bar{u}gg$ 等の相関を調べる必要があります。$u\to ug$ 分岐のとき、$g$ は散乱（分岐）面内に強く偏極する（次に導きます）ので、以前の $gg\to gg$ 散乱振幅が入射 $g$ の linear 偏極によってどう変化するのかを調べるのが良いように思います。ヘリシティー振幅だけでなく、linear pol. 振幅~~が~~も役に立つことを学びました。（グルオンと光子だけですけれど。）いずれにしても、$t\bar{t}$ background の 6jet の平面性が、現在の shower MC（特に Herwig）で再現されるのかどうか、どなたか至急 check して report してください。このあたりが key point になるような気がします。




$g\to gg$ 分岐は $e\to e\gamma$ 分岐と同じだし、すぐ前にやった $g\to q\bar{q}$ 分岐の crossing なのだけれど、initial state の $g$ の linear pol. を final state の $g$ の linear pol. にどう cross (analytic continuation) すれば良いか分からないので（ヘリシティー振幅の crossing でさえ non-trivial なのに、今度は相対位相まで考慮しなければなりません）、あらためて計算します。（場の理論って本当に便利です。考えても分からないことでも、計算すれば良いのだから。）

2005. 9. 10

(748) 


(749) $$M_{n+1} = M_n \frac{1}{p_a^2}\, \bar{u}(p_b, \lambda)\gamma^\mu u(p_a, \lambda)\, g T^a \varepsilon_\mu^*(p_c, s_c)$$

$$= M_n \frac{1}{p_a^2}\, g T^a J_\lambda \cdot \varepsilon^*$$

(750) $$J_+^\mu = u(p_b,+)_+^\dagger\, \sigma_+^\mu\, u(p_a,+)_+$$

$$= \sqrt{2E_b}\, \chi_+(\vec{p}_b)^\dagger \sigma_+^\mu \sqrt{2E_a}\, \chi_+(\vec{p}_a)$$

$$= 2\sqrt{E_a E_b}\, \left(\cos\frac{\theta_b}{2}, \sin\frac{\theta_b}{2}\right)^\dagger \left[1, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$= 2E_a\sqrt{z}\, \left(1, \frac{\theta_b}{2}\right)^\dagger \left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]$$

$$= 2E_a\sqrt{z}\, \left[1, \frac{\theta_b}{2}, \frac{\theta_b}{2} i, 1\right]$$

(751) $$\varepsilon^{*\mu}(p_c, \phi) = \cos\phi\, \varepsilon^\mu(p_c)_{in} + \sin\phi\, \varepsilon^\mu(p_c)_{out}$$

$$= \cos\phi\,(0,1,0,\theta_c) + \sin\phi\,(0,0,1,0) \qquad \because (734)$$

$$= (0, \cos\phi, \sin\phi, \theta_c\cos\phi)$$

(752) $$J_+ \cdot \varepsilon_\phi^* = 2E_a\sqrt{z}\left[0 - \frac{\theta_b}{2}\cos\phi - \frac{\theta_b}{2} i \sin\phi - \theta_c\cos\phi\right]$$

$$= -E_a\sqrt{z}\left[(\theta_b + 2\theta_c)\cos\phi + i\theta_b\sin\phi\right]$$

$$= -E_a\sqrt{z}\,\theta\left[(1+z)\cos\phi + i(1-z)\sin\phi\right]$$

(753) $$|J_+ \cdot \varepsilon_\phi^*|^2 = E_a^2 z\theta^2\left[(1+z)^2\cos^2\phi + (1-z)^2\sin^2\phi\right] = E_a^2 z\theta^2\left[1+z^2+2z\cos 2\phi\right]$$

(754) $$\hat{P}_{g/q}(z, \varepsilon_g^\phi) = C_F\, \frac{1+z^2+2z\cos 2\phi}{1-z}$$

生成された hard ($z > \frac{1}{2}$) グルーオンは強く(~100%)分岐面内に偏極する。//

ここまでで、全ての bare な (tree-level の IR singularities が正則化されておらず、且つ、loop からの効果による IR の相殺がされていない) 分岐関数 $\hat{P}_{b/a}(z)$ [$a\to b$ の分岐を表わす] がそろったので、まず、GL-AP 方程式を書き下し、次に、IR の相殺を体現する full の分岐関数 $P_{b/a}(z)$ と $\hat{P}_{b/a}(z)$ との関係を定めます。まず GL-AP 方程式ですが、分布関数として次のものを用います。

$$(755)\quad \begin{cases} q(x,Q^2) = D_{q/p}(x,Q^2)\ , \quad \bar{q}(x,Q^2) = D_{\bar{q}/p}(x,Q^2) \\ u(x,Q^2) = D_{u/p}(x,Q^2) = D_{\bar{u}/\bar{p}}(x,Q^2) = D_{d/n}(x,Q^2) \\ g(x,Q^2) = D_{g/p}(x,Q^2) = D_{g/\bar{p}}(x,Q^2) = D_{g/n}(x,Q^2) \end{cases}$$

GL-AP 方程式は

$$(756)\quad \frac{d}{d\ln Q^2} q(x,Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[P_{q/q}(z)\, q\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + P_{q/g}(z)\, g\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

$$(756)'\quad \frac{d}{d\ln Q^2} \bar{q}(x,Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[P_{q/q}(z)\, \bar{q}\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + P_{q/g}(z)\, g\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

$$(756)''\quad \frac{d}{d\ln Q^2} g(x,Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int_x^1 \frac{dz}{z}\left[P_{g/q}(z)\sum_q (q+\bar{q})\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right) + P_{g/g}(z)\, g\!\left(\frac{x}{z},Q^2\right)\right]$$

となります。ここで

$$(757)\quad q = u, d, s, c, b\ , \quad \bar{q} = \bar{u}, \bar{d}, \bar{s}, \bar{c}, \bar{b}$$

ですが、(755) であげた C 不変性、I 不変性以外は、$c\approx\bar{c}$, $b\approx\bar{b}$ が PQCD で

予想される程度で、他は実験で定めることになります。特に

(758) $s \neq \bar{s}$

は予想されることなので［$p \to K^+ \to \bar{s}$ が $p \to K^- \to s$ より large $x$ で大きいことはほとんど疑いようもないことに思われるのですが、多くのPDFは $s=\bar{s}$ を仮定してしまっているようです。νTeV anomaly もそのあたりの理論 anomaly だろうと思っています。$s \neq \bar{s}$ を前提にした charm production 等の解析が必要と思います。］

一般論としては、私は、$b$ と $\bar{b}$ を除き（つまり、$b \to g$ を出発点とする shower の効果を無視する）、残りを全て同等に取り扱うのが LHC では良い（Tevatron でも多分）近似だろうと思います。［$b\bar{b}$ 分岐は最後にくっつけるだけの方が近似が良いだろうという意味です。］そうすると、(756) は $4\times2+1=9$ で $9\times9$ の行列の形の evolution equation です。

(759)
$$\frac{d}{d\ln Q^2}\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ g \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi}\int\frac{dz}{z}\begin{pmatrix} P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & 0 & P_{qg} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_{qq} & P_{qg} \\ P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gq} & P_{gg} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \\ c \\ \bar{u} \\ \bar{d} \\ \bar{s} \\ \bar{c} \\ g \end{pmatrix}$$

Shower MC の基礎が GL-AP 方程式なので、この構造をしっかりと理解しておいてください。MC では、$m_c \neq 0$ による輻射の抑制を取り入れることも可能です。

歴史的には GL-AP (756)、(759) はまず DIS 分布関数 (PDF) の解析に使われたので、PDF について少し説明しておきます。[以後の講義では、~~以後の~~ GL-AP はもっぱら QCD shower-MC の基礎として使うので、気をつけてください。]

GL-AP を PDF に用いるときには次のことが役に立ちます。

(760)
$$\begin{cases} q_v(x, Q^2) \equiv q(x, Q^2) - \bar{q}(x, Q^2) & ;\ q = u, d, s, c \\ q_s(x, Q^2) \equiv \sum_{q=u,d,s,c} \left[ q(x, Q^2) + \bar{q}(x, Q^2) \right] \end{cases}$$

の二種類の ($q_v$ が 4ヶ, $q_s$ が 1ヶ) PDF を考えると、GL-AP が簡単化します。

(761)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} q_v(x, Q^2) = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{q/q}(z)\, q_v(x, Q^2) \quad ;\ q = u, d, s, c$$

これは 1行1列です。

(762)
$$\frac{d}{d\ln Q^2} \begin{pmatrix} q_s(x, Q^2) \\ g(x, Q^2) \end{pmatrix} = \frac{\alpha_s}{2\pi} \int_x^1 \frac{dz}{z} \begin{pmatrix} P_{q/q}(z) & P_{q/g}(z) \\ P_{g/q}(z) & P_{g/g}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_s(\frac{x}{z}, Q^2) \\ g(\frac{x}{z}, Q^2) \end{pmatrix}$$

こちらは 2行2列です。いくつか sum rule が証明できます (後でします)。

(763)
$$\int_0^1 dx\, q_v(x, Q^2) = n_{q_v} \quad (= 2 \text{ for } u_v,\ = 1 \text{ for } d_v,\ = 0 \text{ for } s_v, c_v)$$

(764)
$$\int_0^1 dx\, x \left[ q_s(x, Q^2) + g(x, Q^2) \right] = 1 \quad (\text{Energy Sum Rule})$$

上記二つの sum rule は PDF の normalization を規定する大変重要な sum rule です。(763) で $n_{s_v} = n_{c_v} = 0$ ですが、これは $s_v(x, Q^2) = 0$ とは全く異なることを忘れないでください。$c_v(x, Q^2) \approx \alpha_s(m_c)^3 \approx 0$ は OK と想像します。

Sum rule を導出する前にまず、virtual (loop) 補正の入った分岐関数を求めなければなりません。QEDのときと同様、分岐による粒子数の変化を再規格化することで、(loop 計算をせずに) 求めることができます。[より物理的に、tree 分岐の IR 発散を正則化した上で再規格化する方法を、次回に説明し、Shower MC を導きます。今日の $\frac{1}{(1-z)_+}$ や $\delta(1-z)$ は解析的計算には向いていますが、MCには向きません。]

(765) $P_{q/q}(z) = C_F \left[ \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \right]$

はQEDと全く同じなのでくり返しません。$P_{g/g}(z)$ を $\hat{P}_{g/g}(z)$ (738) から求めます。

(766) $P_{g/g}(z) = C_A \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \frac{1-z}{z} + z(1-z) \right] + A\,\delta(1-z)$

とおいて A を求めます。g 数の保存 (gの波動関数の再規格化) 条件は

(767) $\int_0^1 dz \left[ P_{g/g}(z) + n_f P_{q/g}(z) \right] = 0$

(768) $\int_0^1 dz\, P_{q/g}(z) = \int_0^1 dz\, \hat{P}_{q/g}(z) = \int_0^1 dz\, T_F\left[z^2 + (1-z)^2\right] = \frac{2}{3} T_F$

(769) $\int_0^1 dz\, P_{g/g}(z) = C_A \int_0^1 dz \left[ \frac{z}{(1-z)_+} + \underline{\frac{1-z}{z}} + z(1-z) \right] + A$

$= 2C_A \int_0^1 dz\, \frac{z}{(1-z)_+} + C_A \int_0^1 dz\, (z - z^2) + A$

$= 2C_A \int_0^1 dz\, \frac{z-1}{1-z} + C_A\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + A$

$= C_A\left(-2 + \frac{1}{6}\right) + A = -\frac{11}{6}C_A + A$

(768) と (769) を (767) に代入し

(770) $-\frac{11}{6}C_A + A + \frac{2}{3}T_F n_f = 0 \Rightarrow A = \frac{11C_A - 4n_f T_F}{6} = 2b_0$ ;(703)参