QCD for Collider Physics I

1

2005. 4. 14

LHC実験解析のためにQCDの基礎知識が不可欠であることを、まず感じていただきたいと思い、次のDØ論文を紹介します。

Measurement of the top quark mass in all-jet events

DØ Collaboration

Abstract

We describe a measurement of the mass of the top quark from the purely hadronic decay modes of $t\bar{t}$ pairs using all-jet data produced in $p\bar{p}$ collisions at $\sqrt{s} = 1.8$ TeV at the Fermilab Tevatron Collider. The data, which correspond to an integrated luminosity of 110.2 ± 5.8 pb^{-1}, were collected with the DØ detector from 1992 to 1996. We find a top quark mass of $178.5 \pm 13.7(\text{stat}) \pm 7.7(\text{syst})$ GeV/c^2.

PACS: 12.38.-t; 14.65.Ha

Phys. Lett. B606, 25 (2005)

Keywords: Top quark

Tevatron Run I ($\sqrt{s} = 1.8$ TeV, $L = 110\, pb^{-1}$) で

$$p\bar{p} \to t\,\bar{t}\,X$$

$$t \to b W^+, \quad \bar{t} \to \bar{b} W^-$$

$$W^+ \to jj, \quad W^- \to jj$$

のシグナルを ≧6 jet events 中で求め、m_tを測定した論文です。

$$m_t = \underbrace{178.5}_{\text{中心値}} \pm 13.7 \pm \underbrace{7.7}_{sys} \text{ GeV}$$

系統

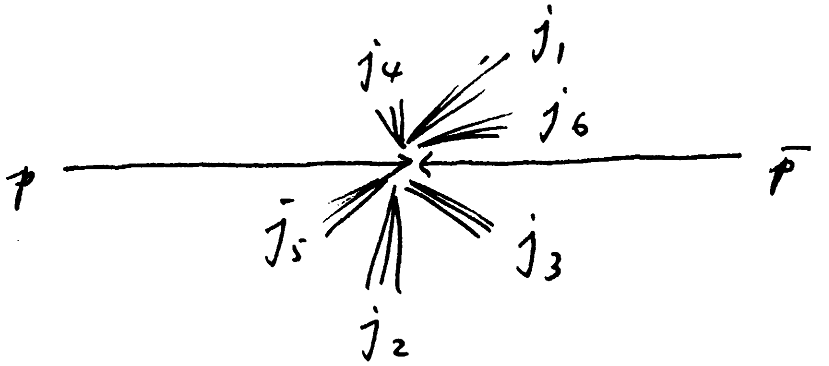
p.25〜27に系統エラーについての説明を加えました。

が答えですが、「中心値」と「~~統計~~エラー」が信頼できるか？が第一の問題です。

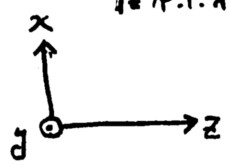
次に、Tevatronの経験をLHCに外挿するときに、QCDの基礎が必要であることを見たいと思います。

このDØの論文は、次回までに全員が読んで下さい。10回の講義が終わるころにもう一度読んで、自分で考えていただきたいと思います。

DØ論文はまずジェットの定義から始まります。



座標系



ハドロンの $\vec{p}$ 分布から出発して、同じ「向き」のmomentumを足してハドロンのクラスター(ジェット)を作るのですが、「向きの近さ」を

$$R=\sqrt{(\Delta\eta)^2+(\Delta\phi)^2}$$

で定義し、$R<0.3$ のペアは全て一クラスターにします。

ϕ はazimuthal角、η はpseudo-rapidityです。

2005. 4. 14

[Lorentz boost と rapidity]

$$p^\mu = (E, p_x, p_y, p_z), \qquad p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}, \qquad p^2 = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2$$

に対し、rapidity は $y = \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z}$

z 方向の boost $\begin{pmatrix} E' \\ p_z' \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ p_z \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} E + \beta p_z \\ \beta E + p_z \end{pmatrix}$

のもとで

$$y \to y' = \frac{1}{2}\ln\frac{E'+p_z'}{E'-p_z'} = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\beta)(E+p_z)}{(1-\beta)(E-p_z)}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{E+p_z}{E-p_z} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$= y + \Delta$$

boost は y の平行移動になります。

$$\Delta y = y_1 - y_2$$

は boost 不変量です。覚えておくと良い式

$$\begin{cases} E = \sqrt{m^2 + p_T^2}\,\cosh y \\ p_z = \sqrt{m^2 + p_T^2}\,\sinh y \end{cases}$$

$$\Rightarrow E^2 - p_z^2 = (m^2 + p_T^2)(\cosh^2 y - \sinh^2 y) = m^2 + p_T^2$$

$m = 0$ のとき、 $y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1}{2}\ln\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = -\ln\tan\frac{\theta}{2}$

$m \neq 0$ のとき、 $\eta = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = -\ln\tan\frac{\theta}{2}$ を pseudo-rapidity と呼びます。

2005. 4. 14

任意のハドロン又はクラスター$\vec{P}$の組み$\{\vec{P_i}$と$\vec{P_j}\}$について

$$R_{ij} = \sqrt{(\eta_i-\eta_j)^2+(\phi_i-\phi_j)^2} < R = 0.3$$

ならば $\vec{P_i}+\vec{P_j}=\vec{P_{ij}}$ として 全ての R_{ij} が $R_{ij} \geqq R$ となるまで続けると、クラスターとクラスターの向きが最低でも R (=0.3) だけ離したクラスターのセットができます。このときできたクラスターの momentum が

$$\begin{cases} E_T = \sqrt{m^2+P_T^2} > 10\,\mathrm{GeV} \\ |\eta| < 2.5 \end{cases}$$

を満たすものを、ジェットと呼びます。DØ は

$\geqq 6$ ジェット事象　　165,377コ　$\left(\frac{S}{N} \sim \frac{1}{1000}\right)$

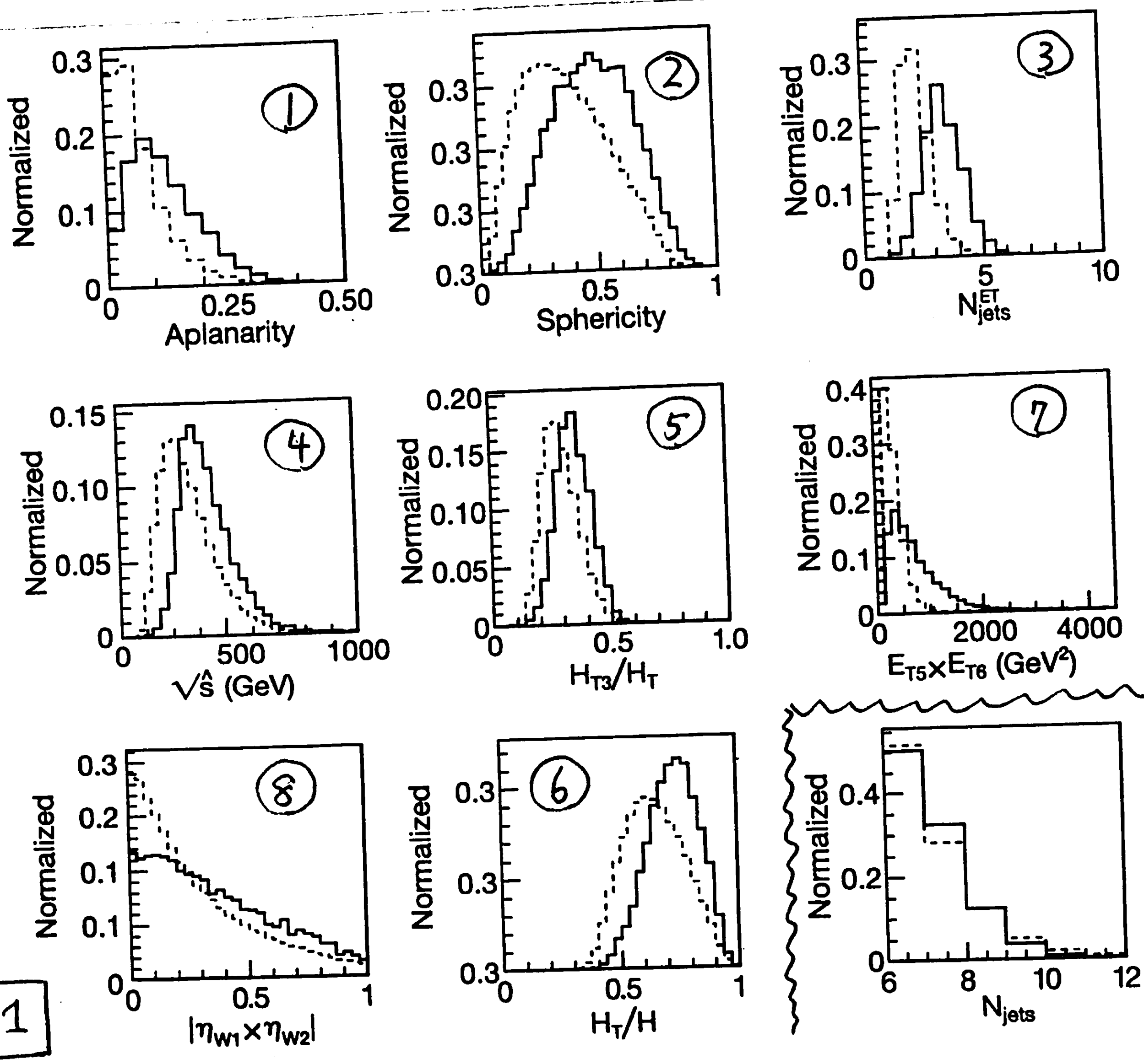
次に、少なくとも1ジェットが $(b \to \mu)$ シグナルをもつことを要求

$\xrightarrow{\text{b-tag}}$ 3,043コ　$\left(\frac{S}{N} \sim \frac{1}{100}\right)$　　S: 20%
N: 2%

この3,043 events を用いて、m_t を決めるのですが、S/N=1/100 ではどうにもなりません。まず

$$E_{T1} > E_{T2} > \cdots > E_{T6} > \cdots$$

として、6ジェットを選び、それらに対して8ヶの観測量の分布を計算し、SとNの分布を較べます。



これは使わない。

Fig. 1

① Aplanarity
② Sphericity } $M_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (p_k)_i (p_k)_j \quad = \mathcal{O}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}\mathcal{O}$

$i,j = x,y,z \qquad \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$

$A = \frac{3}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \xrightarrow{\text{planar}} 0$

$S = \frac{3}{2}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \xrightarrow{\text{collinear}} 0$

③ $N_{jet}^{E_T}$ = # of jets with $E_T^{jet} > E_T$

④ $\sqrt{\hat{s}} = \left[\left(\sum_{i=1}^{6} p_i^{jet}\right)^2\right]^{1/2}$: invariant mass of 6-jets

⑤ H_{T3}/H_T
⑥ H_T/H } $H_T = \sum_j E_T^j\,,\quad H_{T3} = H_T - E_{T1} - E_{T2}\,,\quad H = \sum_j E_j$

⑦ $E_{T5}\cdot E_{T6}$: product of two smallest E_T's

⑧ $|\eta_{W_1}\cdot\eta_{W_2}|$: product of two η's of W candidates

2005. 4. 14

In Fig. 1, { ——— Signal ($t\bar{t}$) expectation by MC
- - - - - Noize (background) constructed by Data

★ $t\bar{t} \to 6$ jet シグナルの方は、MCが(少しは)信用できると仮定する。

★ background ($p\bar{p} \to \geq 6$ jets) は、MCは全く信用できないので

データを用いる。 ⇒ b-tagをはずした、165,373イベントを使う。
(S/N = 1/1,000 なので 99.9% b.g.)

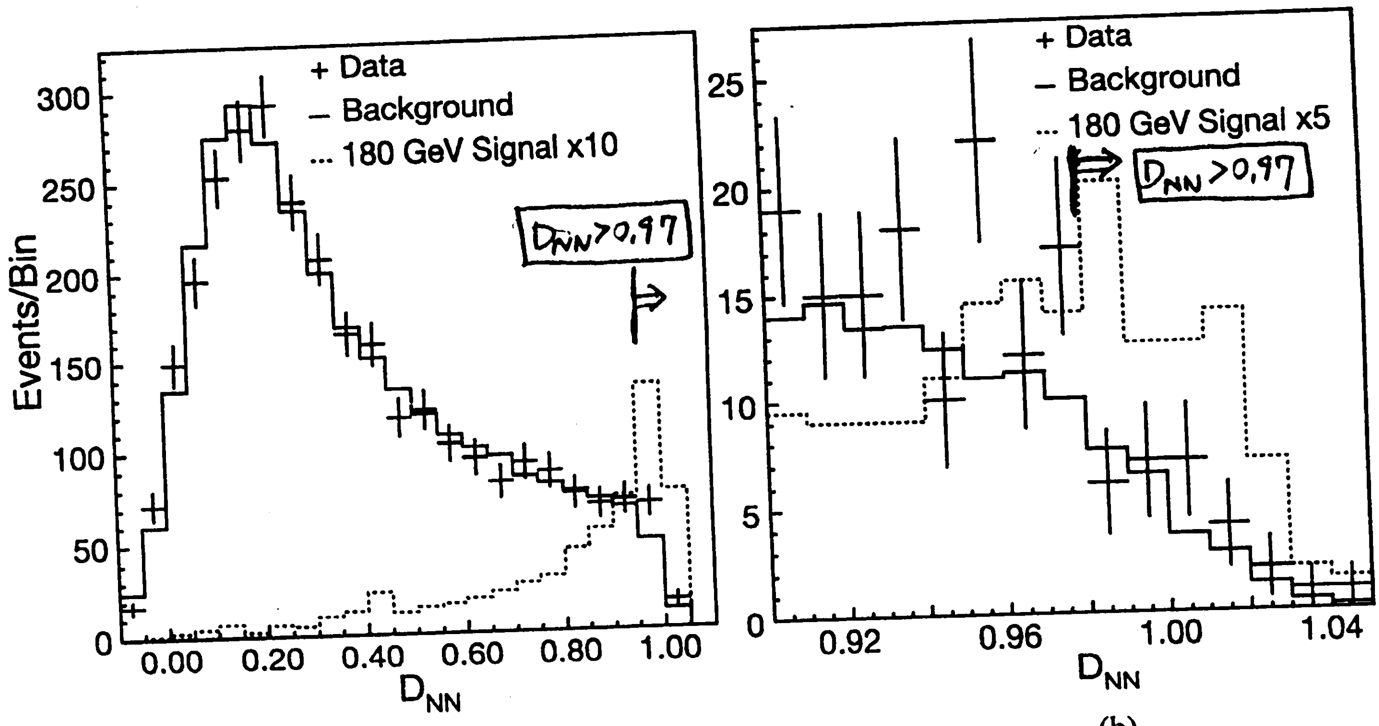
⇒ 1つ1つのイベントに対し、ウェイト w_i を計算する。

w_i = そのイベントが b-tagされる確率

↑
MCを使って評価

⇒ 165,373イベントそれぞれに w_i をかけた分布を加えたのが ---- の分布。

⇒ Neural Net を使って、⑧ヶの分布から、($t\bar{t}$)らしさ, D_{NN} を計算：



(a) (b)

2005、4.14

$D_{NN} > 0.97$ を選ぶと、65 イベント。 (S/N ~ 17/48 ~ 1/3)

W_1, W_2, t_1, t_2 を次の χ^2 を最小にする「解」として選ぶ：

$$\chi^2 = \left(\frac{m_{t_1} - m_{t_2}}{2 \times \sigma_t}\right)^2 + \left(\frac{m_{W_1} - m_{W_0}}{\sigma_W}\right)^2 + \left(\frac{m_{W_2} - m_{W_0}}{\sigma_W}\right)^2$$

ここで、W_1, W_2 は 2-jet の mass、t_1, t_2 は W_1, W_2 を含む 3jet の mass、

$m_{W_0} = 77.5$ GeV、$\sigma_W = 21$ GeV、$\sigma_{m_t} = 31$ GeV ⇐ $t\bar{t}$ MC

最後に、こうして選ばれた t_1 と t_2 の mass 分布を調べる。

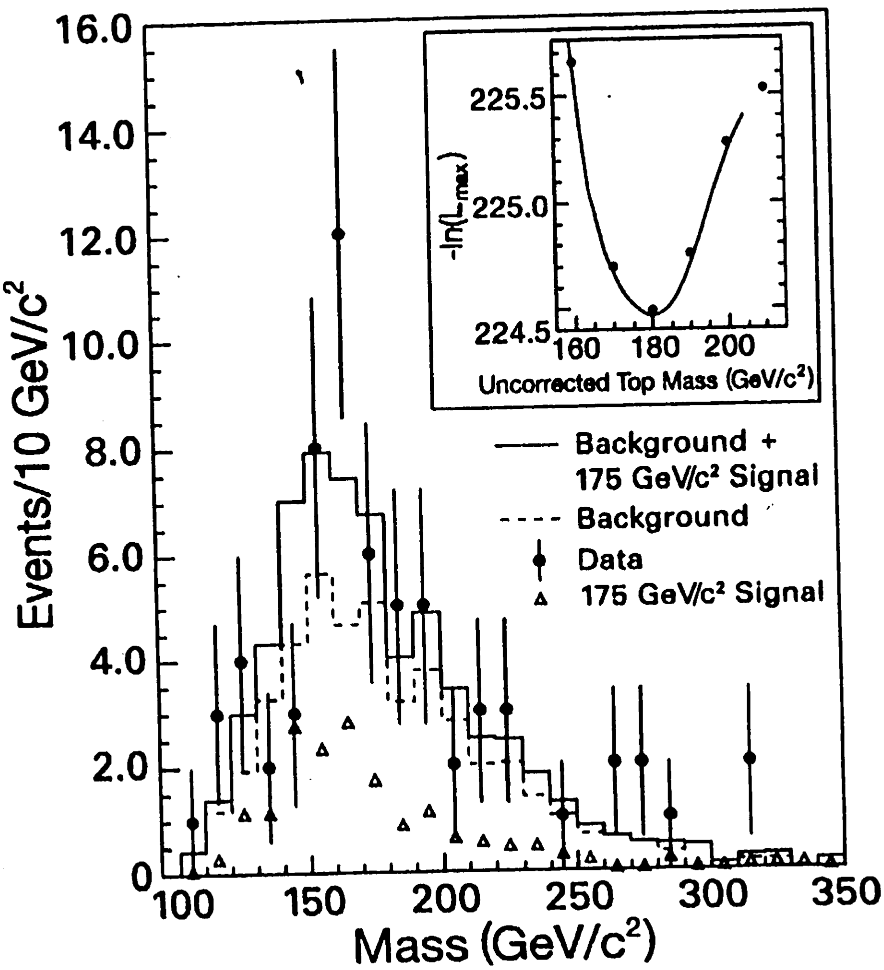


Fig. 3. Data and the sum of background and Monte Carlo signal plotted as a function of the mean mass, M. Insert is $-\ln L_{\max}$ as a function of the top quark mass.

シグナルとバックグランドの mass 分布がほとんど同じであることに注目して下さい。バックグランドの normalization の評価の信頼性（b-tag rate から求めた weight w_i 等，MC による評価）が重要であるように思われます。

次に、observed mass (m_{fit}) と「本当の」mass m_t との経験則

$$m_{fit} = 0.712\, m_t + 53.477 \text{ GeV}$$

を用いて、約 2.6 GeV の補正をします。これは MC。

最後に liklihood 分布から

$$m_t = 178.5 \pm 13.7\,(\text{stat}) \pm 7.7\,(\text{sys}) \text{ GeV}$$

を得ます。$\sigma_{t\bar{t}}^{D\emptyset} \approx 11 \pm 5$ pb （17 ± 7 イベント） は $\sigma_{t\bar{t}}^{QCD} = 5.6 \pm 1.4 \pm 1.2$ ($m_t = 172$ GeV)
⇓
8〜9 イベントの期待値。

と無矛盾と結論しています。

さて質問です。

この解析で、もし、あらかじめ、t の存在と、$m_t \sim 180$ GeV を知っていなかったら、シグナルは見つかるでしょうか？

どうぞ、私の全ての講義が終わったあとで、この問題をもう一度考えてみて下さい。LHC の物理を目指す方は全員例外なく、Tevatron の物理を経験することが必要です。

2005. 4. 14

Tevatronのデータから、QCDジェットについて、そしてMCがいかに信用できないかを学ぶことはLHCの物理のために必要ですが、十分ではありません。

Tevatronのjet ——外挿 = QCD——→ LHCのjet

2 TeV　　　　　　　　　　14 TeV

現在、MCを少しでも役に立つものにする為に多くの方々が努力をされていますが、これらの努力は基本的に、上の外挿を、よりQCDの基本原理に忠実に行うことで、LHCの実際の物理と、MCの予言とがかけはなれたものにならないようにという目標で行われているものです。最高のMCができても、実際のデータとの間に、normalizationはもとより、全ての分布に対し、数10%から100%近くまでのずれが予想されることを覚悟しておいていただきたいと思います。この場合、実際のデータを使ってMCを（場合によってはその理論的基礎までもを）補正しなければいけませんが、その補正が、QCDの基本的要請に合ったものでないと、次から次へと矛盾が拡大生産されてしまいます。「ここを直すとあちらが立たず」になってしまいます。ですから、ジェットの基本的性質をQCDのレベルで理解しておくことが重要だと思うのです。

いくつか例を考えてみます。

$pp \to h\ X$
$\hookrightarrow \gamma\gamma$ 　h の p_T 分布 vs b.g. の p_T 分布 ?

$\to j_1 j_2 h\ X$ 　$|\eta_1 - \eta_2| >$ large gap
$\eta_2 < \eta_h < \eta_1$
$\eta_2 < \eta < \eta_1$ の jet activity veto

$\hookrightarrow \tau^+\tau^- \to \ell^\pm \ell'^\mp$
$\ell^\pm \pi^\mp$
$\ell^\pm(\pi^\mp\pi^0)$

$\hookrightarrow WW^* \to \ell^\pm \ell'^\mp \underbrace{\not{p}_T}_{}$, $\underbrace{\ell^\pm \not{p}_T}_{W}$ $\underbrace{jj}_{W^*}$ (もし $m_h - m_W \sim 30$ GeV なら narrow jet)

(m_T peak)

jet physics で決まる (resolution が)

扇ジェット (面の向き)

$\to t\bar{t}h\ X$ 　… 超難しい (challenging) 4 b-jets + W^+W^-
$\hookrightarrow b\bar{b}$

$\to b\bar{b}h\ X$ 　(large $\tan\beta$) 　4 b-jets, 2b + $\tau^+\tau^-$
$\hookrightarrow b\bar{b}, \tau^+\tau^-$

$\to \tilde{g}\tilde{g}\ X$
$\hookrightarrow \begin{cases} q\bar{q}'\tilde{\chi}_i^\pm & ;\ \tilde{\chi}_i^\pm \to LSP + q\text{'s} + \ell\text{'s} \\ q\bar{q}\ \tilde{\chi}_i^0 & ;\ \tilde{\chi}_i^0 \to LSP + q\text{'s} + \ell\text{'s} \end{cases}$ 　W, Z
$\hookrightarrow \ell\bar{\ell}', jj$

<u>Calibration</u>

$\ell = e, \mu$ 　$J/\psi, \Upsilon, Z \to e^+e^-, \mu^+\mu^-$

$\not{\vec{p}}_T$ 　もし $\sigma_{QCD}(pp \to WX) \gg \sigma_{\text{new phys}}(pp \to WX)$ ならば
$W \to \ell\nu$ の
$m_T = \sqrt{(|\vec{p}_{\ell T}| + |\not{\vec{p}}_T|)^2 - (\vec{p}_{\ell T} + \not{\vec{p}}_T)^2}$ 分布の peak $\sim m_W$

E_{jet} : Jet の内容が良くわかっていて、σ_{obs} が十分大きい process でかつ $S/N \sim 1$.
$W \to j_1 j_2$, $Z \to j_1 j_2$, $t \to b j_1 j_2$ 位しかないが
他の条件を満たす場合が思いつけない。

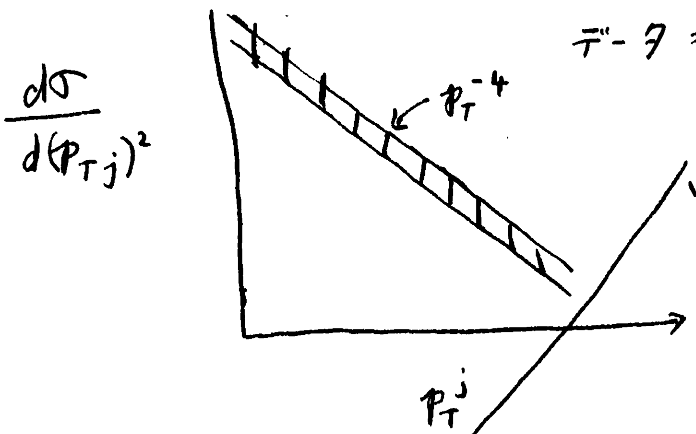
2005. 4. 14

QCD-jet を用いるしかないのではないか？　$pp \to j_1 j_2 X$ …①

$\to Z j X$ …②

$\hookrightarrow \ell^+\ell^-$

どちらも QCD-MC とデータを比較することになる。
② は p_T バランスの制限が強くて有理かも。



データ = QCD-MC を仮定すれば
$(p_T^j)_{obs}$ と $(p_T^j)_{physics}$ の関係が
$(p_T^j)_{obs}$ ごとに $\sim \frac{1}{4}\left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)$ の精度で
決まる。

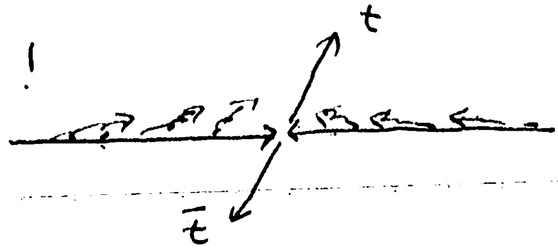
⇒ どうやってテストするか？

⇒ $t\bar t \to \ell + 4$jet で m_t が合うか？
⇒ $t\bar t \to 6$jets は無理かな？

jet の p_T だけでなく
$\left\{\begin{array}{l}\text{jet の definition（R の値）}\\ \text{親が q か g か}\end{array}\right.$
等に依存するはず。

依存性は QCD の考察で多少は予想できる。

QCD効果で一番重要なのは、hard scattering scale Q が大きくなると、initial parton からの radiation による 'mini'-jet activity が $\ln Q$ で増大すること。例えば、同じ $t\bar t X$ でも $m(t\bar t) = Q$ が大きくなる LHC では $t\bar t$ + multijet が増えてはる！



更に、例えQが同じ様に思えても、

$x_1 x_2 > \left(\frac{m_Z}{\sqrt{s}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{20}\right)^2$

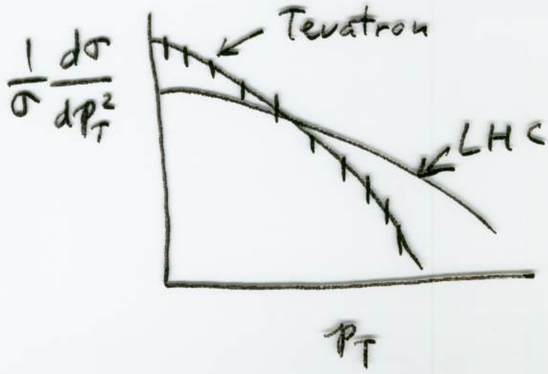
$\cancel{m_Z = x_1 x_2 \sqrt{s}}$

$x_1 x_2 > \left(\frac{m_Z}{\sqrt{s}}\right)^2 \sim \left(\frac{1}{150}\right)^2$

$$p\bar{p} \to Z X \quad @ \text{ Tevatron}$$

$$pp \to Z X \quad @ \text{ LHC}$$

phase space の大きなLHCでは、"X"のjet activityが大きくなると予想される。



Tevatron での Z の p_T 分布は、QCD-MCで fit されているが、

P-QCD の multiple soft-gluon resummation
と Non-perturbative な intrinsic parton k_T (~1GeV)
} の combination

⇓

LHCへの外挿に大きな不定性が残る。

ほとんどP-QCDになるはずだが、その部分が
Tevatron dataで本当に再現されているのか
どうか分からない。

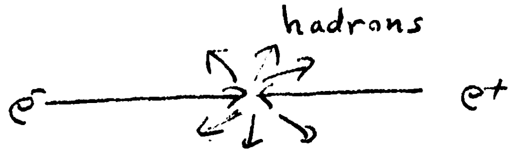
⇒ 実際のデータを使って PQCD-MC を tune する
必要があるだろう。

///

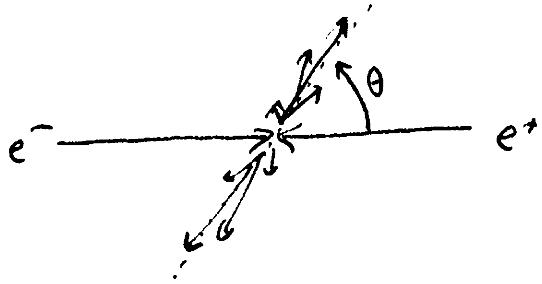
2005. 4. 14

PQCD によるジェットの理解 ($e^+e^- \to$ hadrons)

$\sqrt{s} < 3\,\mathrm{GeV}$ では $e^+e^- \to$ hadrons は fire "ball" と言われていた。
丸い



$\sqrt{s} > 5\,\mathrm{GeV}$ (SPEAR) で 2-jet に見え出した。



$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta_J} \sim 1 + \cos^2\theta_J$$

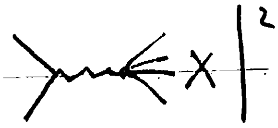
あたかも spin $\frac{1}{2}$ で構造も mass も持たない $q\bar{q}$ が対生成し、q と $\bar{q}$ の momentum の向きに hadron が生成されたように見えた。$q \to$ hadron jet
fragmentation

一方
$$\frac{\sigma_{tot}^{had}}{\sigma_{tot}^{\mu\mu}} = \frac{\sigma_{tot}(e^+e^- \to \gamma^* \to \text{hadrons})}{\sigma_{tot}(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)} \approx 3 \sum_{q=u,d,s,c} (Q_q)^2$$

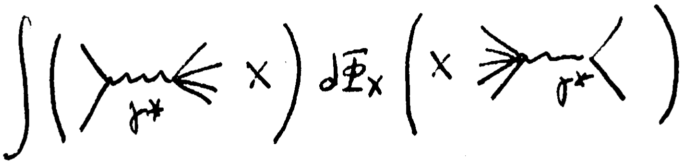
とほぼ合っていて、あたかもカラー自由度 3 を持ったゲルマンの半端電荷クォークが対生成したかのように思われた。

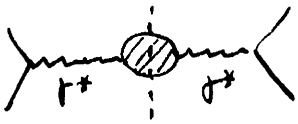
この現象は QCD の Asymptotic freedom (Short Distance = SD で弱結合) とどう関係しているのか? SD dominance (LD physics の suppression) が鍵。

2005. 4. 14.

① $\sigma_{tot}(e^+e^- \to hadrons) \sim \sum_{\substack{\text{all hadronic}\\ \text{final states}\\ X}} \int$  $d\Phi_X$

↑ X の phase space

$= \sum_X \int$ 

$\overset{\text{unitarity}}{=} 2\,\mathrm{Im}$ 

光学定理 (unitary S matrix) $\quad S = 1 + iT$

$$1 = S^\dagger S = (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1 - i(T^\dagger - T) + T^\dagger T$$

$$-i(T - T^\dagger) = T^\dagger T$$

$$-i\langle i|(T - T^\dagger)|i\rangle = \langle i|T^\dagger T|i\rangle = \sum_X \langle i|T^\dagger|X\rangle\langle X|T|i\rangle$$

$$-i(T_{ii} - T_{ii}^*) = \sum_X (T_{Xi})^*(T_{Xi}) \qquad \sum_X |X\rangle\langle X| = 1$$

↑ phase space 積分含む.

$$2\,\mathrm{Im}\,T_{ii} = \sum_X |T_{Xi}|^2$$

$|i\rangle = |\gamma^*\rangle \cdots |e^+e^-\rangle$

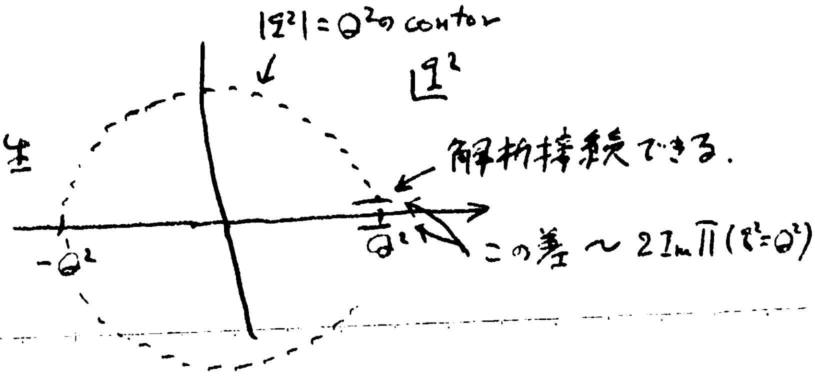
$|X\rangle = |hadrons\rangle$

$T_{ii} \sim \Pi(q^2)$ depends only on q^2

$q^2 < 0$ で $|q^2| = Q^2 \gg \Lambda_{QCD}^2$ ならば SD : $\frac{1}{Q}$ の時間しか存在できない。

$q^2 = Q^2 > 0$ ではどうか？

$\Pi(q^2)$ 関数の解析性

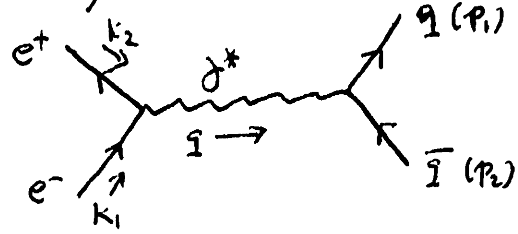


でも、摂動の各次では LD 依存性が現れる…
(ように見えるが実は)

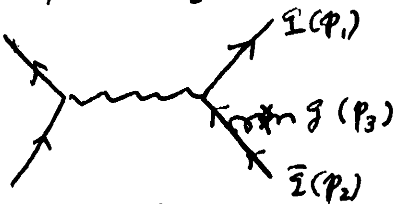
2005. 4. 14

0次： $M_0 = M_0(e^+e^- \to q\bar{q}) = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\dfrac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu v(p_2)$ $\quad \sim 1 \pm \cos\theta$

次回の講義で計算します.



1次： $M_1 = M_1(e^+e^- \to q\bar{q}g) = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\dfrac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu \dfrac{\not{p}_2+\not{p}_3}{(p_2+p_3)^2}\gamma^\nu v(p_2)\,\epsilon^*_\nu(p_3)$



$$\frac{1}{(p_2+p_3)^2} = \frac{1}{2p_2p_3} = \frac{1}{2E_2E_3(1-\cos\theta_{23})} \to \infty \quad \begin{cases} E_3 \to 0 & \text{soft} \\ \cos\theta_{23} \to 1 & \text{collinear} \end{cases}$$

少しだけ計算の練習をしましょう。

0次のcross section： $d\sigma_0 = \underset{\uparrow\ \text{invariant flux}}{\dfrac{1}{2s}} \sum |M_0|^2 \underset{\uparrow\ \text{invariant 2-body phase space}}{d\Phi_2}$

(1) $$d\Phi_n = (2\pi)^4\delta^4\left(q - \sum_{i=1}^{n} p_i\right)\prod_{i=1}^{n}\frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}$$

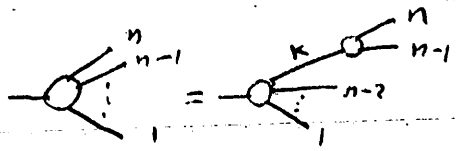
$E_i = \sqrt{m_i^2 + |\vec{p}_i|^2}$

$$\left(\int \delta(p_i^2 - m_i^2)\,\underbrace{d^4p_i}_{\Theta(p_i^0)} = \int \delta\big((p_i^0 - E_i)(p_i^0 + E_i)\big)\,\Theta(p_i^0)\,dp_i^0\,d^3p_i = \frac{d^3p_i}{2E_i} \right)$$

(2) $$d\Phi_1 = (2\pi)\,\delta^4(q-p)\frac{d^3p}{2E} = (2\pi)\,\delta(q^2 - M^2)$$

(3) $$d\Phi_n = \underbrace{d\Phi_{n-1}}_{q \to q - p_n}\frac{d^3p_n}{(2\pi)^3 2E_n}$$

(4) $$= \underbrace{d\Phi_{n-1}}_{p_{n-1} = k}\frac{dk^2}{2\pi}\,d\Phi_2(k = p_{n-1} + p_n)$$



2005. 4. 14

(4)式は n体の phase space を (n-1)体 と 2体の重ね合せで表すので重要.

右辺 → 左辺 は簡単に示せるはずです。次の変形

$$\delta^4\left(q-\sum_{i=1}^{n-2}p_i-k\right)\frac{d^3k}{2E_k}\ dk^2\ \delta^4(k-p_{n-1}-p_n)$$
$$=\delta^4\left(q-\sum_{i=1}^{n-2}p_i-k\right)\underbrace{\delta\left(k^2-(p_{n-1}+p_n)^2\right)d(p_{n-1}+p_n)^2}_{=1}\ \delta^4(k-p_{n-1}-p_n)\,d^4k$$
$$=\delta^4\left(q-\sum_{i=1}^{n}p_i\right)$$

です。(2)と(3)を用いて

(5) $$d\Phi_2=(2\pi)\,\delta\left((q-p_2)^2-m_1^2\right)\frac{d^3p_2}{(2\pi)^3\,2E_2}=\frac{1}{(2\pi)^2}\,\delta\left((q-p_2)^2-m_1^2\right)\frac{d^3p_2}{2E_2}$$

(6) $$=\frac{1}{8\pi}\frac{2p^*}{\sqrt{q^2}}\frac{d\cos\theta^*}{2}\frac{d\phi^*}{2\pi}$$ $\vec{p}_1^{\,*}+\vec{p}_2^{\,*}=0$ frame で $|\vec{p}_i^{\,*}|=p^*$

(5)と(6)は共に役に立つ公式です。(6)から, massless で flat な

2体の phase space の積分は

(7) $$\int d\Phi_2=\frac{1}{8\pi}$$

と規格化されていることが分かります。これらの式は、次回以降

しばしば使いますので、~~使~~使いこなせるようにしておいて下さい。

(6)を用いると例えば

$$d\sigma_0=\frac{1}{2s}\,\overline{\sum}|M_0|^2\,\frac{1}{8\pi}\frac{d\cos\theta^*}{2}\ \Rightarrow\ \frac{d\sigma_0}{d\cos\theta^*}=\frac{1}{32\pi s}\,\overline{\sum}|M_0|^2$$

一方 $M_1\,(e\bar{e}\to q\bar{q}g)$ は $|p_3|\ll E_1, E_2$ のとき

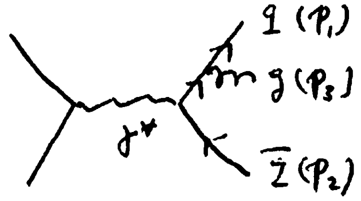
$$(\not{p}_2+\not{p}_3)\gamma^\nu v(p_2)\approx\not{p}_2\gamma^\nu v(p_2)=\left[2p_2^\nu-\gamma^\nu\not{p}_2\right]v(p_2)=v(p_2)(2p_2^\nu)$$
$\not{p}_2 v(p_2)=0$ (Dirac 方程式)

なので

$$M_1 = \bar{v}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)\frac{1}{q^2}\bar{u}(p_1)\gamma^\mu v(p_2)\frac{2p_2^\nu\epsilon_\nu^*(p_3)}{(p_2+p_3)^2}$$

$$= M_0 \frac{p_2\cdot\epsilon_3^*(p_3)}{p_2\cdot p_3}$$

となる。$|p_3| \ll E_1, E_2$ のとき (soft gluon), $q\bar{q}g$ 振幅が0次の $q\bar{q}$ 振幅と factorize することが重要です。もう一つの図



の寄与も足すと、

$$M_1 = M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)\epsilon_\nu^*(p_3)$$

となります。ゲージ不変性 ($A_\nu \to A_\nu + \partial_\nu\phi$; $\epsilon_\nu(p_3) \to p_{3\nu} + \epsilon_\nu(p_3)$ で振幅が不変) を確認して下さい。

$$M_1\left(\epsilon_\nu^*(p_3)\to p_{3\nu}\right) = M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)p_{3\nu} = 0$$

$q\bar{q}g$ の cross section は

$$d\sigma_1 = \frac{1}{2s}\sum|M_1|^2 d\Phi_3$$
$$= \frac{1}{2s}\sum\left|M_0\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3} - \frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)\epsilon_\nu^*(p_3)\right|^2 d\Phi_3$$

ここで (3) の公式

$$d\Phi_3 = \underbrace{d\Phi_2}_{q\to q-p_3\approx q}\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \approx d\Phi_2\cdot\frac{E_3^2 dE_3\, d\cos\theta\, d\phi}{16\pi^3 E_3} = d\Phi_2\cdot\frac{E_3 dE_3\, d\cos\theta}{8\pi^2}$$

と $$\sum_{spin} \epsilon_\nu^*(p_3)\,\epsilon_{\nu'}(p_3) = -g_{\nu\nu'} + (p_{3\nu} \text{ or } p_{3\nu'} \text{ terms})$$

↳ 0 by gauge invariance

を用いて

$$d\sigma_1 \simeq \underbrace{\frac{1}{2s}\,\overline{\sum}|M_0|^2 d\Phi_2}\cdot\left(\frac{p_2^\nu}{p_2\cdot p_3}-\frac{p_1^\nu}{p_1\cdot p_3}\right)(-g_{\nu\nu'})\left(\frac{p_2^{\nu'}}{p_2\cdot p_3}-\frac{p_1^{\nu'}}{p_1\cdot p_3}\right)$$

$$\frac{1}{8\pi^2}E_3 dE_3\, d\cos\theta$$

$$= d\sigma_0\cdot\frac{2p_1\cdot p_2}{(p_1\cdot p_3)(p_2\cdot p_3)}\frac{1}{8\pi^2}E_3 dE_3\, d\cos\theta$$

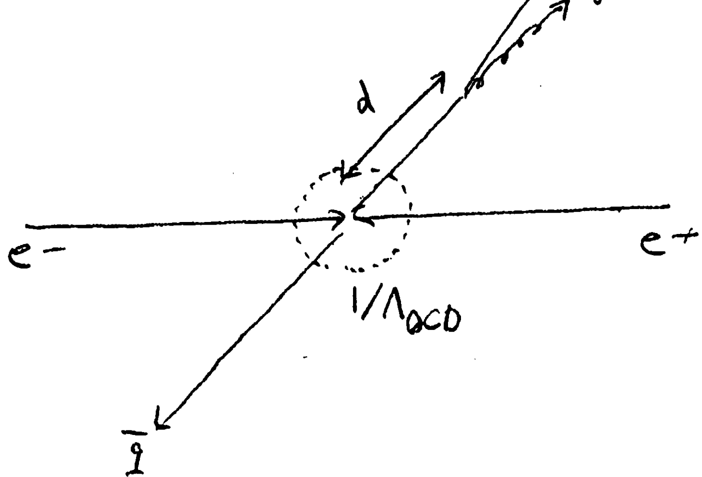
$$\simeq d\sigma_0\cdot\frac{4}{E_3^2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}\frac{1}{8\pi^2}E_3 dE_3\, d\cos\theta$$

$$= d\sigma_0\,\frac{1}{4\pi^2}\,\underbrace{\frac{dE_3}{E_3}}\;\underbrace{\frac{d\cos\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$\underbrace{\ln\frac{E}{m_g}} \qquad \underbrace{\ln(1-\cos\theta)}$$

soft な発散　　collinear な発散

LD (Long Distance) の物理



$$d = \frac{1}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}\gamma\beta \simeq \frac{1}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}\frac{\sqrt{s}/2}{\sqrt{(p_1+p_3)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{s}}{\cancel{2}\,p_1\cdot p_3}$$

$$= \frac{2E}{\cancel{2}E\cdot E_3(1-\cos\theta_{13})}$$

$$= \frac{1}{E_3(1-\cos\theta_{13})} > \frac{1}{\Lambda_{QCD}}$$

$d\sigma_1$ を見ると、大きな寄与がLD領域にあることがわかる。

何故 σ_{total} が有限で、且つLD物理によらないのか？

$d\sigma_1$ のLD依存性が $\underbrace{\text{ループ補正}}_{\text{virtual gluon 補正}}$ の寄与と相殺するから。

★ soft の相殺 … Bloch-Nordsieck

★ collinear (を含めた) 相殺 … KLN (木下 Lee Nauenberg)

⇓

これが重要 ⇒ LD依存性が全く無くなってしまう。

⇓

全エネルギースケールで物理が決まる。

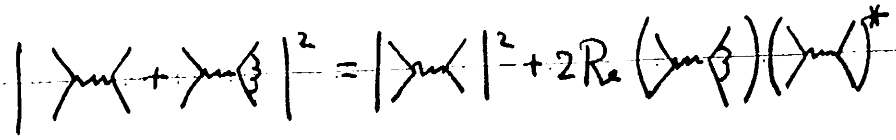
⇓

$Q=\sqrt{s} \gg \Lambda_{QCD}$ ならばPQCD.

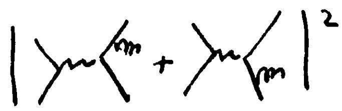
LD部分の寄与は、momentum space で見ると phase space が小さい（small momentum $\sim \frac{d^3p}{E} \sim p\,dp \sim dp^2$）ので、振幅が大きくならなければ、次第に効かなくなる。

LDの寄与の相殺を見るためには、計算の中で発散が起きないように、正則化（regularization）をして、3体と、2体のループ計算をしなければならない。少し面倒なので、ここでは、「相殺する」という結果を使って議論を進めます。

σ_{total} では　2体の寄与



と　3体の寄与



を足し合げることで

$$\sigma_{tot} = \int d\sigma(2体)\, d\Phi_2 + \int d\sigma(3体)\, d\Phi_3$$
$$= \sigma_0 \left(1 + \frac{\alpha_s}{\pi} + \cdots \right)$$

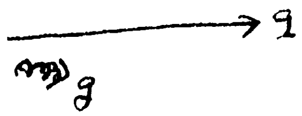
LDの寄与が相殺し、SDの物理が支配的になって

$\frac{\alpha_s(Q)}{\pi}$ の摂動展開が得られた。

ではジェットの断面積ではどうだろうか？ KLN定理が鍵となります。

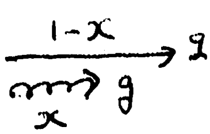
KLN定理 --- soft, collinearを含むLD物理の寄与の発散は全エネルギーが同じ状態を区別しない (Energy degenerate states) 全ての物理量について成立する。

(例)　ソフト

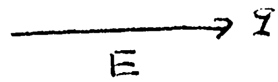


$E_q + \underbrace{E_g}_{\to 0} = E_q$

collinear

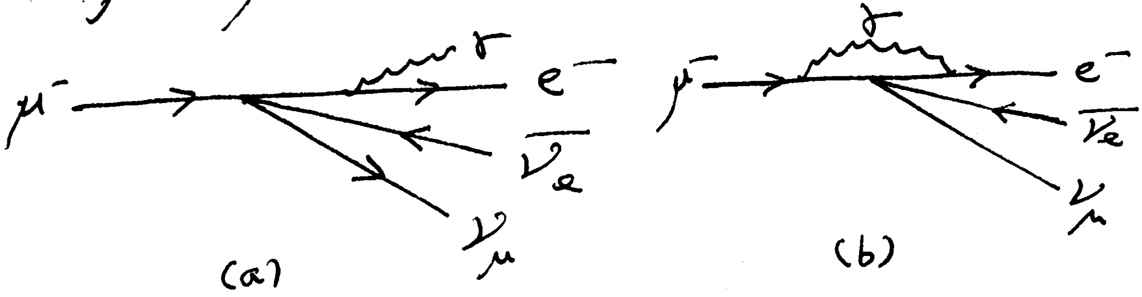


$E_q + E_g = (1-x)E + xE = E$



2005.4.14

木下東一郎は μ decay の輻射補正計算で



real 光子の寄与 (a) と virtual 光子の寄与 (b) のそれぞれに

$\ln\frac{m_\mu}{m_e}$ の項（$m_e \to 0$ で発散する項）が現れるのに、

$O(\frac{\alpha}{\pi})$ の全ての輻射補正の和、μ lifetime への補正では

この項が相殺することを発見し、ソフトな発散を ~~[illegible]~~ 光子の

微小質量 (m_γ) で正則化したときの $m_\gamma \to 0$ の発散と合わせ、

$$\left(\ln\frac{m_\mu}{m_\gamma} + \mathrm{const}\right)\ln\frac{m_\mu}{m_e}$$

の項全て（$m_\gamma \to 0$, $m_e \to 0$ の発散）が終状態を足し合げる

inclusive な量について相殺することを、摂動の全ての次数で

QEDの場合に証明した。Lee と Neuenberg は、$m_\gamma \to 0$, $m_e \to 0$

の時に、エネルギー ~~[illegible]~~ の和が同じになる状態（ソフトとコリニアー）を

足し合げる（区別しない）量に関して、この相殺が起きることを示した。

KLN 定理は P-QCD でも証明され、P-QCD の物理への

応用の根幹となった。

QEDでは $m_e = 0.5$ MeV が有限で、e も γ も外に出て来る(asymptotic stateとして存在する。confineされない)ので、$m_e \neq 0$ ならば区別できる。

$$\xrightarrow{(1-x)E} e \quad \underset{xE}{\rightsquigarrow} \gamma \qquad と \qquad \xrightarrow{E} e$$

でも、e の速度は $\beta = \sqrt{1 - m^2/E^2}$ で光子の速度は1なので、いずれ e は γ に置いてけぼりです。コリニアー項の積分も

$e(p)$, $\gamma(k)$, θ

$$\frac{1}{2p\cdot k} = \frac{1}{2E_e E_\gamma (1 - \beta\cos\theta)}$$

なので

$$\int_0^1 \frac{d\cos\theta}{1-\beta\cos\theta} = \left[\ln\frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right]_0^1 = \ln\frac{1}{1-\beta}$$
$$= \ln\frac{1+\beta}{1-\beta^2} \approx \ln\frac{2}{m^2/E^2} = \ln\frac{2E^2}{m^2}$$

となります。

QCDでは $m_q = 0$ と考えても良いし、$m_q \ll \Lambda$ なので、

$(q+g)$ 系の不変質量、collinearな場合は横運動量方向の質量が

q, g, p_T, p_T $\qquad 2p_T \lesssim \Lambda \qquad (p_T \simeq \Lambda$ でも良いです$)$

のとき、$q+g$ は q と区別できなくなってしまうわけです。

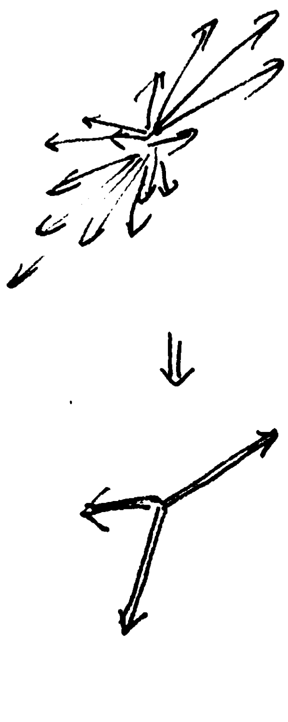
ここで $\dfrac{1}{\Lambda}$ がハドロンの拡がりと考えると良いかも知れません。

$\Lambda \sim 500$ MeV 程度とイメージすると、様々な現象を「量的に」とらえることができます。

Jet cross section

ここまでの議論で、コリニアーやソフトな(q+g)対をqと、(g+g)対をgと区別しない量は、LD依存性($\ln\frac{E}{\Lambda}$項)が相殺し、高エネルギー($E\gg\Lambda$)でSDの物理$\left(\frac{1}{E}\right)$が支配的になって、P-QCDで記述可能になることがわかります。

コリニアーとソフトの対を区別しないことは、一般的に、次の様なクラスターアルゴリズムで実現できます。



$\{\vec{p}_i\}$ のセットを考えます。$i=1,\cdots,n$ とします。

$\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = m_{ij}$ とし、$\min\{m_{ij}\}<\sqrt{s}\,y$ だったら

$\vec{p}_i+\vec{p}_j=\vec{p}_{ij}$ として、$n-1$ 個の残りのセットについてくり返します。

$\min\{m_{ij}\}>\sqrt{s}\,y$ になったら終わりです。

$y\approx 0$ だと、n コのパートン(ハドロン)が最後まで残ります

$y\ll 1$ だと、#(2クラスター)～#(3クラスター)～…#(5クラスター)

$y<1$ だと、#(2クラスター)$\gg$#(3クラスター)$\gg$#(4クラスター)

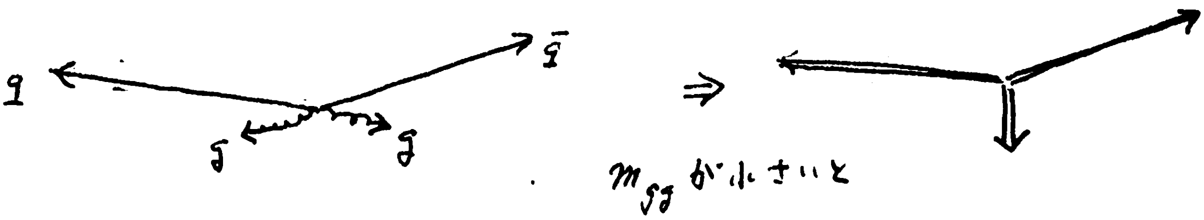
1 : $\frac{\alpha_s}{\pi}$: $\left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2$

$y=1$ だと、全てが足しあがって全断面積です。

このような cluster algorithm でできた momentum のクラスターを QCD-Jet と呼びます。

QCD-Jet はエネルギー角分布が同じ内部構造を区別せず、P-QCDで計算可能です。

(注) $\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = m_{ij}$ によるクラスター化は、エネルギーが同じペアが、
へのスプリット
$\vec{p}_i\cdot\vec{p}_j = 0$ （ソフトもコリニアーも）のときに起きることに注目したものですが、次の様な欠点があります。



このため、LD物理に少しびん感で、P-QCD展開の収束が悪くなり、実験との比較もエラーが大きくなります。

改良案は $$y_{ij} = 2\min(E_i^2, E_j^2)(1-\cos\theta_{ij})$$
を用いることで、k_T-algorithm 又は Durham algorithm と呼ばれます。

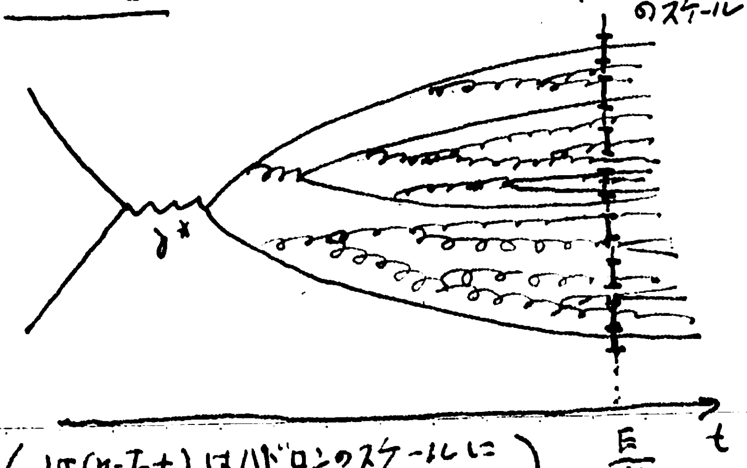
m_{ij}法は不測のエラーを導きますので、<u>必ず</u>、y_{ij}を用いるようにして下さい。

最後に、

ハドロンの$\{p_i\}$から作った $d\sigma(n\text{-Jet})_{hadrons}$ ‖ クォーク、グルオンの$\{p_i\}$から作った $d\sigma(n\text{-Jet})_{P\text{-}QCD}$	$\sigma_{tot}^{hadrons}$ ‖ $\sigma_{tot}^{q's, g's}$

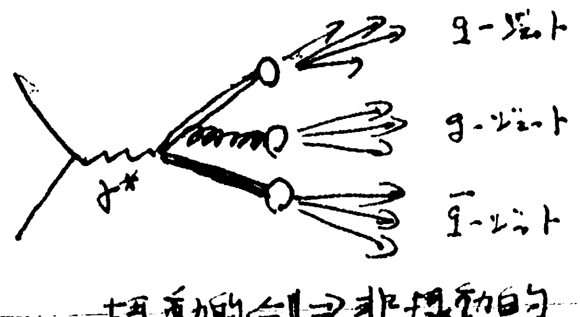
比較して良く考えて下さい。

<u>P-QCDの考え方</u>



（$d\sigma(n\text{-Jet})$はハドロンのスケールに依存せずに決まる。）

<u>大昔のパートン模型の考え方</u>



摂動的⇔|⇒非摂動的